TRANSFORMACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS DE UNA DOCENTE BILINGUE: REFLEXIONES SOBRE PATRONES NUMÉRICOS Y PROPORCIONALIDAD EN EL CICLO BÁSICO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

DORA JANNETH DEL CARMEN GÓMEZ GUERRERO

UNIVERSIDAD ICESI
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
JUNIO DE 2014

TRANSFORMACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS DE UNA DOCENTE BILINGUE: REFLEXIONES SOBRE PATRONES NUMÉRICOS Y PROPORCIONALIDAD EN EL CICLO BÁSICO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

DORA JANNETH DEL CARMEN GÓMEZ GUERRERO

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación

DIRECTOR
ARMANDO ZAMBRABO LEAL, PhD

UNIVERSIDAD ICESI
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
JUNIO DE 2014

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

pág.

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente estudio sobre *Formación de Maestros* está enmarcado en la disciplina Didáctica de las Matemáticas. Tiene como propósito fundamental conocer y describir las representaciones matemáticas de una docente bilingüe, específicamente centradas en el tratamiento de los patrones numéricos y la proporcionalidad, para cuarto grado de educación básica primaria.

Desde un enfoque cualitativo, de carácter exploratorio y descriptivo (León & Montero, 2003), se realizó un estudio de casos con la docente bilingüe, nueva en el sistema educativo y que inicia procesos de formación en el Departamento de Matemáticas del Colegio Bennett **(D.M.C.B.)**, entidad que tiene institucionalizado como línea de investigación, los referentes teóricos de Situaciones Didácticas **(S.D.)**, planteados por el francés Guy Brousseau.

Los conceptos matemáticos de patrones numéricos y proporcionalidad, objeto de investigación de este estudio, corresponden a investigaciones realizadas por los colombianos Carlos Vasco (2014) y Gilberto Obando (2006), el francés Gerard Vergnaud (1991) y el inglés John Mason (1985). En ellas presentan marcos de referencia para potenciar procesos de Formación de Maestros, así como el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes para el ciclo básico, comprendido entre los grados cuarto y quinto de básica primaria.

Con los referentes teóricos anteriores, se organizó el trabajo de investigación en tres fases. Inicialmente se identificaron las representaciones matemáticas que poseía la docente seleccionada para el estudio. Para ello, se adelantaron indagaciones a través de una encuesta, el análisis de las primeras planeaciones de su clase de matemáticas y las producciones escritas de dos de sus estudiantes.

Posteriormente, se intervino didácticamente exponiéndola a situaciones problema referidas desde las S.D., producto de sistematizaciones realizadas en el D.M.C.B. Las situaciones corresponden a los conocimientos previos que sus estudiantes construyeron en los años anteriores, permitiendo así completar la última fase del trabajo que consistió en que la docente diseñe una situación problema concerniente a los patrones numéricos y a la proporcionalidad.

Para la fase inicial se diseñó una encuesta con preguntas de selección múltiple, referidas a las S.D. y la identificación de patrones numéricos y proporcionalidad. Las soluciones dadas por la docente fueron motivo de reflexión durante el desarrollo de la siguiente fase, a medida que ella participaba en la solución de las diferentes situaciones a las que fue expuesta. Igualmente, en la etapa final, frente al diseño, planeación, ejecución y evaluación de la situación propuesta por la docente, todo lo cual se desarrolla bajo la metodología de Estudio de Clases (M.E.C.) (MEN, 2009).

Para el análisis de la información se usa la técnica de protocolos de observación, a través del registro en *rejillas de observación*, que permitieron recoger información sobre las opiniones y eventos que sucedieron durante la investigación, y de esta manera conocer las transformaciones de las representaciones matemáticas que la docente bilingüe evidencia durante el proceso de diseño de una situación problema, referida desde las Situaciones Didácticas.

Por todo lo anterior, el Trabajo de Grado permitirá abrir futuras líneas de investigación relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas y la Formación de Maestros en Servicio (Gómez, 2014), específicamente de aquellos que siendo profesionales en otra línea de formación, se encuentran desarrollando procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas escolares. En el presente caso se pretende incentivar la creación de programas institucionales de formación de docentes que no posean la línea en Educación Matemática, para establecer procesos de acompañamiento y atender a sus necesidades didácticas, las cuales son campos de investigación en Educación Matemática y en Didáctica de las Matemáticas.

1 TRANSFORMACIÓN DE REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS DE DOCENTES BILINGÜES

1.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El mundo contemporáneo demanda la construcción de los saberes escolares, entendidos como los plantea Brousseau (1997): "…*se asume que el estudiante es capaz de dibujar su conocimiento a partir de sus propias experiencias, de su propia interacción con su entorno". (*pág. 30*).* Para asumir este reto se requiere un docente formado en la disciplina de Didáctica de la Matemática, lo que constituye una dificultad para los colegios bilingües, en tanto la implementación de los planes de área son desarrollados por docentes bilingües no formados en la línea de Educación Matemática.

La presente investigación se origina en la necesidad de decantar la experiencia luego de un trabajo de experimentación y sistematización en *Formación de Maestros* del área de matemáticas, especialmente de básica primaria con docentes bilingües, que ha realizado la investigadora y jefe del Departamento de Matemáticas del Colegio Bennett (D.M.C.B.) durante más de diez años. En este proceso se identificó la importancia de las representaciones matemáticas de los docentes, para que su práctica favorezca la construcción de los saberes escolares.

Debido a que el tratamiento de los patrones numéricos y la proporcionalidad son estructurales para el desarrollo del pensamiento matemático, se decide acotar la investigación a la representación matemática, y de manera específica, al proceso de su transformación en una docente bilingüe.

La hipótesis que se tiene para realizar esta investigación está centrada en que "la exposición de un docente -no formado en la línea de Educación Matemática- a Situaciones Didácticas, incide en la transformación de sus representaciones matemáticas iniciales, con respecto a los patrones numéricos y a la proporcionalidad.

Por consiguiente, en este trabajo se considera necesario indagar sobre:

¿Cómo se transforman las *representaciones matemáticas* de una docente bilingüe, referidas desde los *patrones numéricos* y la *proporcionalidad* en el ciclo básico de primaria, después de haber estado expuesta a procesos orientados desde la teoría de Situaciones Didácticas?

1.2 JUSTIFICACIÓN

La necesidad de formar a los docentes bilingües en el diseño de situaciones de aprendizaje de matemáticas, tiene sentido en tanto fortalece una de las áreas más importantes en la formación de sujetos con capacidad de responder a los desafíos que el mundo actual les plantea.

En ese orden de ideas, rescatar la experiencia de años, en el tema de la Formación de Maestros en Didáctica de la Matemática cobra enorme significación, en tanto que no sólo enriquece la experiencia vital de la investigadora, sino que aporta al Colegio Bennett un modelo organizado y sistemático de formación de maestros.

Es así como, en el Colegio Bennett, el tratamiento de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), se ha institucionalizado como referente para el diseño de situaciones problema. Para el año lectivo 2013-2014, desde las secciones de Escuela Maternal hasta grado once, se tiene el diseño de cien (100) situaciones de aprendizaje, de las cuales treinta (30) se encuentran en proceso de sistematización (ver Anexo, pág. 88). Los diseños se realizan tanto en inglés como en la lengua materna.

Es por ello que el acompañamiento a docentes bilingües debe ser cercano a sus necesidades en Didáctica de la Matemática, no sólo por la falta de formación en esta línea, sino por la cantidad de diseños existentes en inglés, fruto de investigaciones de muchos docentes que con la orientación de los lineamientos de formación de docentes, se han institucionalizado en el D.M.C.B.

Luego, desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas y para el caso de estudio, es interesante y pertinente revisar las representaciones matemáticas (Castro & Castro, 1997) sobre los patrones numéricos (Mason 1985) y la proporcionalidad (Obando, 2006) de la docente bilingüe, posicionándose desde las investigaciones recientes sobre el razonamiento proporcional (Obando, Vasco & Arboleda, 2014), como un campo privilegiado de investigación de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1991).

Las investigaciones desarrolladas al interior del D.M.C.B. sobre Situaciones Didácticas y los diseños referidos especialmente al tratamiento de los patrones numéricos y proporcionalidad, llevan a plantear el problema del Trabajo de Grado, al reflexionar sobre los procesos de acompañamiento que se realizan a una docente bilingüe y cómo, después de atender sus necesidades didácticas, se pueden conocer las transformaciones de sus representaciones matemáticas, al momento que ella tiene que planear, ejecutar y evaluar la situación referida en el estudio.

Por último, para la academia, la experiencia de Formación de Maestros permitirá abrir futuras líneas de investigación relacionadas con la *Didáctica de la Matemática*, en tanto, desde el Informe Compartir se contempla la necesidad de crear un perfil de *Formación en Servicio* (Gómez, 2014), para que toda institución educativa de Colombia cuente con profesionales expertos en varias áreas del conocimiento para acompañar a educadores no formados en determinadas competencias.

1.3 OBJETO DE LA INVESTIGACIÓN

Al considerar la problemática a tratar en el Trabajo de Grado sobresale el contenido matemático correspondiente a patrones numéricos (Mason, 1985) y la proporcionalidad (Obando, 2006) como elementos centrales de un proceso de matemática escolar en básica primaria, que brinda a los estudiantes herramientas conceptuales y procedimentales para la búsqueda de la *generalización* (Mason, 1985), la cual permite desarrollar habilidades de pensamiento matemático. Como las relaciones dadas desde los patrones numéricos están asociadas con procesos de variación, los niveles de abstracción son de profundidad, potenciando así la afinidad entre los conceptos de *relación y función* (Vergnaud, 1991), pero ante todo, determinando la estructura multiplicativa como función. Con base en ello, el uso de patrones numéricos se toma como punto central para desarrollar procesos de generalización y potencializar así el desarrollo del razonamiento proporcional (Obando, 2006).

1.3.1 Generalizaciones sobre Patrones

Según Mason (1985, pág. 29), en su texto *Rutas hacia el Álgebra. Raíces del Álgebra*, expresa en los siguientes términos los patrones numéricos:

“Un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición. Es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etc.) que se construye siguiendo una regla o algoritmo, ya sea de repetición o de recurrencia”.

Entre las reflexiones realizadas por Rivera y Sánchez (2012, pág. 32) proponen algunas actividades referidas a los patrones numéricos:

Ejemplo: patrones con números

Los siguientes ejemplos con patrones numéricos permiten identificar regularidades, a un paso de la generalización.

1+2 =3

4+5+6 =7 + 8

9+10+11+12 =13 + 14+ 15

1x 2x 3x 4 +1 =?

2x 3x 4x 5+ 1 =

3x 4x 5x 6 + 1 =?

¿De cuántas formas diferentes puede encontrar dos números naturales que adicionados nos den el mismo resultado? ¿Qué pasará con tres números naturales?

Haga una predicción de los números que aparecerían en la fila más larga.

Los patrones se presentan en diferentes contextos y dominios de las matemáticas, tales como, lo numérico, lo geométrico, lo aleatorio y lo variacional. Permiten la interpretación de regularidades presentes en diversas situaciones de la vida diaria por ejemplo en la música, en el movimiento, en la economía, en la geografía y en la variación en general.

Desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN 2006), proponen el tratamiento de patrones para la Educación Básica Primaria, así:

> *"Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y las leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado"* (pág. 67)

La idea es que los patrones se reflexionen desde lo numérico, para permitir a los estudiantes construir comprensivamente recursos de solución, encontrar regularidades e interpretaciones de procesos de generalización para usarlos con propiedad. Estos saberes se deben desarrollar a lo largo de toda la Educación Básica, siempre relacionándolos con los otros pensamientos matemáticos propuestos en el currículo (coherencia horizontal de un plan de área (MEN, 2006)).

Teniendo en cuenta lo anterior se hace necesario diseñar situaciones didácticas donde se pueda analizar de qué manera cambian las secuencias, si aumentan o disminuyen; calcular o refutar conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Al respecto Rivera y Sánchez (2012), refieren a Mason quien describe cuatro etapas para trabajar la generalización desde el estudio de patrones, muy apropiadas para preparar el aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a la educación secundaria: “Ver”, “Decir”. “Registrar” y “Probar la validez de las fórmulas”,

> *“Ver”, hace relación con la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común. “Decir” ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar”, es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos). “Probar la validez de las fórmulas”, para procesos de generalización, cuando se logra observar desde características específicas, se puede mostrar lo general. (pág. 29)*

1.3.2 Las relaciones de proporcionalidad

Por tratarse de elementos básicos de las estructuras multiplicativas, como lo refiere Obando (2006):

> *La proporcionalidad se asume como un concepto altamente estructurante que, a partir del estudio de los procesos de variación y cambio, permiten conceptualizar aspectos relativos a lo numérico y a lo variacional: dado que a través del estudio de situaciones que implican la proporcionalidad, se ponen en correlación dos o más variables, entonces se conceptualiza la proporcionalidad tanto en relación con lo numérico, como en relación con el concepto de función, desde lo variacional*. (pág. 32)

Los contextos donde aparece la noción de proporcionalidad, establecen relaciones funcionales entre dos mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función, como la proporcionalidad, integran el estudio y comprensión del razonamiento multiplicativo. En relación con lo anterior, se resalta que el papel de las tablas y gráficas contribuye en gran medida a la identificación de patrones, ya que tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables.

Un claro referente de esta clase de relaciones lo expresa Gilberto Obando (2007) en la siguiente situación:

> *La relación multiplicativa fundamental no es una relación ternaria, sino cuaternaria. Esto es, en un problema como el siguiente: ¿Si una libra de sal cuesta $ 250, cuánto cuestan 4 libras de sal?, no se relacionan tres términos, sino cuatro. La relación cuaternaria sería:*
>
> $$1 \rightarrow 250$$
>
> $$4 \rightarrow \quad x$$
>
> *y no como generalmente se hace:*
>
> *250 × 4 = 1000 o, 4 × 250= 1000.*
>
> *Esto se presenta en tanto que en el planteamiento clásico escolar no se explicita la relación entre la unidad y el precio de la unidad, la cual es clave para la solución de este tipo de problemas. Es más, cuando el problema se representa como la suma repetida 250 + 250 + 250 + 250, se esconde la relación de proporcionalidad que éste implica. El modelo de la suma repetida de un sumando es importante para producir un modelo inicial de significación a la multiplicación, pero es insuficiente para dar cuenta de la complejidad subyacente a las estructuras multiplicativas*. (pág. 121)

1.3.3 Aspectos sobre la proporcionalidad

Las diferentes concepciones de la proporcionalidad, referidas desde el razonamiento proporcional y la construcción de las operaciones formales, pasando por las operaciones concretas, tan estudiadas por Piaget (citado por Vergnaud, 1991) desde la escolaridad, se relacionan con las estructuras multiplicativas que corresponden a la construcción del concepto de función y del Isomofismo de Medidas (Vergnaud, 1991), basadas en procedimientos escalares o analógicos ($f(x+y) = f(x)+f(y)$, o $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$) o las propias de funcionales o analíticos ($f(x)= k \cdot x$) que responden a dos fenomenologías distintas, pero que se deben construir o conceptualizar paralelamente.

Los anteriores referentes multiplicativos son tomados desde las relaciones multiplicativas establecidas por Vergnaud (1991). Así,

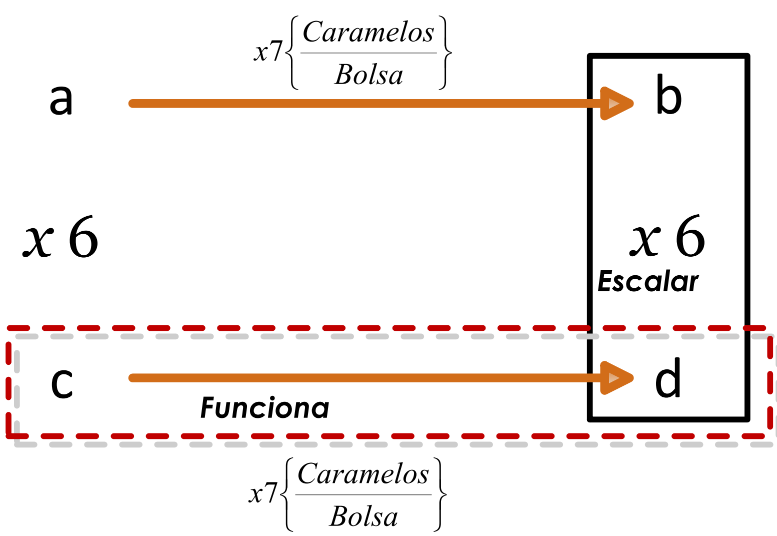
> *Se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas – definimos así las relaciones que comportan una multiplicación o una división. La más importante de ellas, que se utiliza para la introducción de la multiplicación en la escuela primaria y que forma la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria; por ello no está bien representada en la escritura habitual de la multiplicación: $axb = c$, ya que dicha escritura no comporta más que tres términos.* (pág. 197)

En la Figura 1 se muestra la primera forma de relación multiplicativa denominada *Isomorfismo de Medidas,* y definida como “una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de cierto tipo, y el resto son medida de otro tipo" (Vergnaud, 1991).

Para la operatividad se tienen dos tipos de operadores:

- **Escalar:** es aquel factor que se establece verticalmente, no posee dimensión y sirve para relacionar dos valores de una misma medida.
- **Funcional:** es aquel factor que relaciona dos valores de forma horizontal y determina el pasaje de una medida a otra. Razón por la cual se expresa en términos de ambas medidas (Caramelos/bolsa)

Figura 1. Esquema general del isomorfismo de medidas



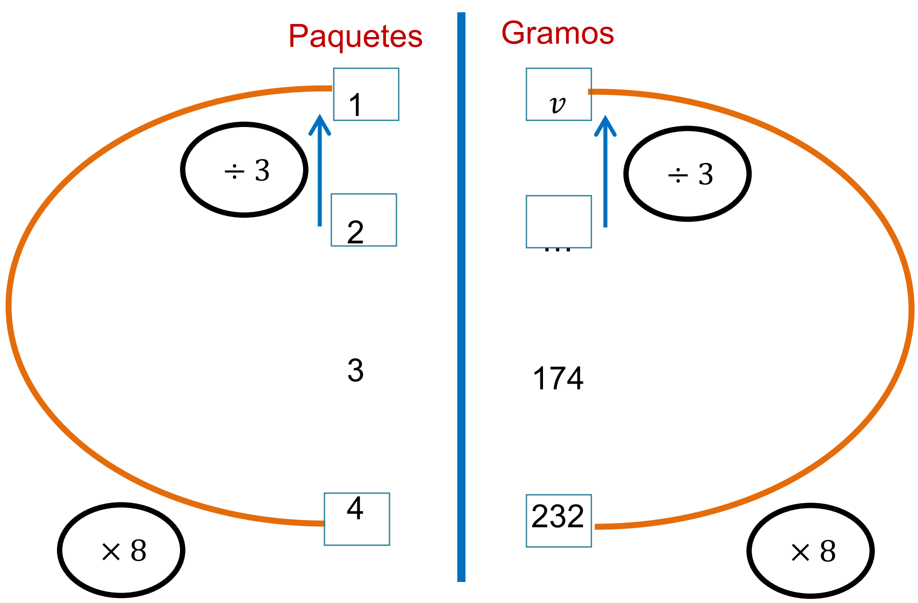
Fuente: Vergnaud (1991, p197)

En referencia al *Isomorfismo de Medidas*, Vergnaud (1991) realiza un análisis para cada uno de los operadores. En el caso del operador escalar determina la naturaleza de los operadores multiplicativos y la noción de fracción, como algunos elementos presentes en este tipo de operación.

En la Figura 2, el operador fraccionario $\times\, ^{8}/_{3}$ representa de manera sintética la aplicación sucesiva de dos operadores multiplicativos (una división $\div 3$ y una multiplicación $\times 8$) comenzando ya sea por la división o por la multiplicación.

Este esquema aísla seis cantidades particulares, de aquí se pueden relacionar en un isomorfismo de medidas: 1 paquete con v gramos y 3 paquetes con 174 gramos o 3 paquetes con 174 gramos y 8 paquetes con x gramos. Lo cual genera una composición de isomorfismos en relacionar 1 paquete con v gramos y 8 paquetes con x gramos.

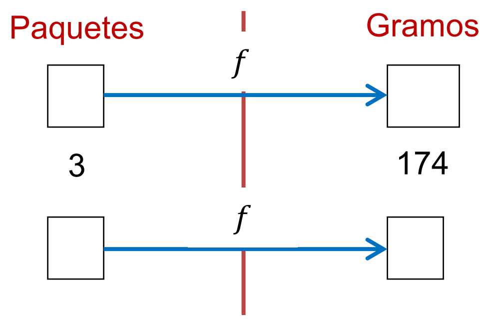
Figura 2. Tabla de correspondencia entre dos magnitudes



Fuente: Vergnaud (1991, p211)

La Figura 3 muestra el caso del análisis horizontal, referente al operador funcional, que Vergnaud (1991) utiliza como razón de cambio, de una categoría a otra.

Figura 3. Relación funcional



Fuente: Vergnaud (1991, p211)

La razón de cambio entre el número de paquetes y el gramaje está determinada por $^{174}/_{3}$, con este valor, se puede entonces encontrar la cantidad de gramos contenidos en 8 paquetes, para lo cual se genera la función:

$$x\ gramos = (número\ de\ paquetes) \times \frac{174}{3} {gramos}/{paquete}$$

$$x\ gramos = 8 \times \frac{174}{3} {gramos}/{paquete}$$

Desde otra perspectiva, existe una segunda forma para establecer relaciones multiplicativas: el *Producto de Medidas*, definido por Vergnaud (1991) como “una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional”. (pág. 211)

Con respecto a este tipo de relación, las combinaciones entre dos medidas dan lugar a una tercera medida, la cual es tratada en otros niveles de escolaridad más avanzados por las magnitudes resultantes y el tratamiento que ellas requieren para significarlas. Vergnaud (1991) expresa esta relación como “la utilización de un operador-función para la solución de los problemas de la primera forma (isomorfismo de medidas) permitiendo encontrar la segunda forma (producto de medidas)” (Vergnaud, 1991, pág.216)

Por su parte, la proporcionalidad se evidencia en el producto de medidas visto como un doble isomorfismo de medidas. Para ello se citan los siguientes ejemplos:

> *Sea, por ejemplo, el caso del número de parejas: se puede decir que es proporcional a la vez al número de niños (para un número de niñas constante y al número de niñas (para un número de niños constante).*
>
> *De la misma manera, el área del rectángulo es proporcional por una parte a la longitud (cuando el ancho permanece constante) o al ancho (cuando la longitud permanece constante).* (Vergnaud, 1991, pág. 217)

Desde otra perspectiva, los objetos de investigación antes mencionados,se encuentran presentes en el Currículo de Matemáticas, que en el D.M.C.B. se tienen organizados para potenciar el desarrollo del pensamiento proporcional de sus estudiantes, en todas las secciones de escolaridad y desde una coherencia horizontal (MEN, 2006).

La siguiente organización corresponde a la secuenciación de los conceptos matemáticos en cuestión, desde el pensamiento Numérico y Variacional, incluidos en el plan de área (Plan de área 2011) y referidos desde los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006).

Ciclo Primera Infancia: Escuela Maternal y Preescolar

Pensamiento numérico-variacional

Inicia la construcción del número, desde el conteo espontáneo hasta las nociones de cardinalidad, usando contextos de actividades rutinarias, para realizar las primeras aproximaciones de las estructuras aditivas de esquema aditivo simple.

Ciclo Unidad Infantil: Preparatorio a 3º E. B. P.

Pensamiento numérico-variacional

Reconoce diferentes representaciones de los números Naturales, sus equivalencias, notaciones y el uso significativo desde la estructura del Sistema de Numeración Decimal, iniciándose así, en la construcción de las fracciones. Usa las estructuras aditivas de composición, transformación y relación de dos medidas, además de la estructura multiplicativa de proporcionalidad a través del tratamiento de patrones numéricos y geométricos, para resolver problemas contextualizados.

Ciclo Básico: 4º a 5º E. B. P.

Pensamiento numérico-variacional

Explora la mayor cantidad de relaciones existentes desde la construcción de los números Naturales hasta los Racionales positivos, favoreciendo el desarrollo del razonamiento proporcional, a través del reconocimiento de las estructuras multiplicativas y aditivas y las relaciones que de ellas se derivan.

Ciclo de Fundamentación: 6º y 7º E. B. S.

Pensamiento numérico-variacional

Reconoce las relaciones en los números, explorando el universo de los Racionales y de los Enteros (construcción, diferentes representaciones y conceptualización), enfatizando en su uso en diferentes situaciones significativas (usando el número para medir, para contar, para ordenar) y explorando sus propiedades, relaciones y operaciones aditivas y multiplicativas (potenciación, radicación, repartos proporcionales)

Ciclo Exploratorio: 8º y 9º E. B. S.

Pensamiento variacional-numérico

Establece relaciones entre lo numérico y variacional a través de las grafica cartesianas, contextualizadas desde la variación proporcional (razonamiento multiplicativo), modelando situaciones de variación con funciones polinómicas (fenómenos de cambio y variación), haciendo énfasis en la utilización de descripciones verbales y tablas, favoreciendo la comprensión sintáctica de las nuevas expresiones algebraicas (simbólica, tabular, gráfica (cartesianas)), construyendo expresiones algebraicas equivalentes, conceptualizando funciones lineales y cuadráticas.

Ciclo Especializado: 10º y 11º E. M. V.

Pensamiento variacional – numérico

Usa la conceptualización del conjunto de los números Reales formalmente, desde su estructura algebraica, para Interpretar y analizar las propiedades globales de las funciones polinómicas y racionales, interpretando geométrica y físicamente los conceptos de límite, continuidad y derivada a la representación de funciones y el estudio de situaciones susceptibles de ser tratadas mediante funciones.

1.4 FORMULACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1 Objetivo general

Identificar la transformación de las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad en una docente bilingüe, no formada en Educación Matemática.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad, que la docente bilingüe del ciclo básico, no formada en educación matemática, posee antes de diseñar una situación de aprendizaje.

- Observar las transformaciones de las representaciones matemáticas de una docente bilingüe cuando está expuesta a situaciones problema sistematizadas en el D.M.C.B.

- Conocer las transformaciones de las representaciones matemáticas sobre patrones numéricos y proporcionalidad, que la docente bilingüe demuestra cuando diseña una situación problema.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 REFERENTES TEÓRICOS

La fundamentación teórica de este trabajo se organiza desde dos perspectivas: un análisis didáctico que orienta el diseño de Situaciones Didácticas y la otra, centrada en las representaciones matemáticas que el sujeto posee para desarrollar pensamiento matemático.

2.1.1 Perspectiva didáctica

La teoría de Situaciones Didácticas tuvo su origen en Francia. Concebidas por Guy Brouseeau como el conocimiento de los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas (Brousseau & Balacheff, 1997). Desde esta perspectiva el docente toma la condición de sujeto reflexivo que decide, diseña, implementa y experimenta estrategias de acción para que sus estudiantes alcancen todas las metas de aprendizaje propuestas.

Brousseau nació en Taza, Marruecos, el 4 de febrero de 1933. Como hijo de un soldado tuvo una educación marcada por los frecuentes cambios de una escuela a otra. En 1948, inició sus estudios superiores en a *l'École Normale Supérieure d'Instituteurs* (Escuela Normal) y en 1950 se le otorgó el bachillerato elemental con distinción en matemáticas en *l'École Normale Supérieure,* en Montpellier. En seguida obtuvo una beca para el estudio de las matemáticas superiores en Toulouse sin embargo, decidió abandonar la beca y regresar a la *École Normale Supérieure* en Agen, para realizar un año de estudios profesionales, porque le interesaba y deseaba observar la forma en que los niños aprenden matemáticas.

En 1953, Brousseau fue nombrado profesor en un pequeño pueblo de la región *Lot et Garonne,* en una clase en la que enseñaba todas las asignaturas a alumnos cuyas edades oscilaban entre los 5 y los 14 años. En el transcurso del año se casó con Nadine Labeyue.

En octubre de 1954, él y su esposa fueron nombrados como profesores donde enseñaban a niños entre 9 y 10 años de edad, centrando sus reflexiones en la adquisición y la enseñanza de las matemáticas. Esta actividad se vio interrumpida en octubre de 1956, cuando fue llamado para el servicio militar. Es aquí donde tiene la oportunidad de tomar algunos cursos en la Universidad de Sorbona, e inicia sus reflexiones sobre la teoría de juegos y su estructura.

Para mayo de 1961, Brousseau se encuentra con Lucienne Félix, autora de varios artículos en la revista pedagógica *l'Education Nationale*, quien al conocer los planteamientos de Brousseau decidió escribir sobre él, alentándolo a continuar este trabajo. Ella le sugirió que participara en la conferencia de CIEAEM, que se celebra en Suiza. En 1965 editó su manual para maestros de 4° y 5°.

En 1964, culminando sus estudios universitarios, publica un gran número de artículos tendientes a establecer las condiciones para el surgimiento de verdaderas investigaciones. Para febrero de 1968 y creado el *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (*IREM*) para investigar sobre la enseñanza de las matemáticas, se dedica a tratar la fundamentación teórica y experimental en la enseñanza de las matemáticas, obedeciendo las normas académicas de la investigación, que más tarde se convertiría en "epistemología experimental" y después "transposición didáctica de las matemáticas". Por ello se crea el *Centre pour l'Observation del 'Enseignement des Mathématiques (COREM)*, lo que proporciona el medio para desarrollar la investigación académica.

En octubre de 1970, Guy Brousseau fue contratado por la Universidad de Bordeaux para participar en la realización del proyecto IREM, donde divulga los elementos de la teoría de las situaciones didácticas, como el primer ejemplo de un modelo matemático relativo a una modificación de la enseñanza, comprobado experimentalmente (la enseñanza del cálculo de multiplicación y división). En 1973 fue recibido en el Sexto Congreso Internacional de Ciencias de la educación.

Progresivamente (1970-74) se crean escuelas para la observación de la enseñanza de las matemáticas, donde las investigaciones se centran en la enseñanza de los números naturales, las operaciones de los números naturales y sus estructuras fundamentales. Otros temas son la enseñanza de la probabilidad y la estadística, la enseñanza de las razones y de los decimales.

En 1975, en el programa de doctorado en Transposición Didáctica, despliega todas sus investigaciones para que la didáctica de la matemática sea tratada como una disciplina científica.

Para 1980, gracias a la creación de la revista *Recherches en Transposición didáctique de Mathématiques* y por ser miembro del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Burdeos I desde 1970, Guy Brousseau, después de haber renunciado a presentar dos veces diferentes obras como tesis de grado en áreas, presentó su *Thèse d'Etat* y se le concedió el doctorado en

1986. Brousseau ha sido profesor en el IUFM de Burdeos desde 1990. (Brousseau & Balacheff, 1997)

Actualmente tiene 81 años, está jubilado y participa desde 2007 en el Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones (IMAC) de la *Universitat Jaume-I de Castelló*.

2.1.2 Definiendo el escenario de las Situaciones Didácticas

Para Mabel Panissa (2003) la teoría de las Situaciones Didácticas se presenta como una teoría compleja y la define así:

> *"Enseñar matemáticas demanda, por parte del docente, identificar toda una red conceptual para diseñar situaciones de enseñanza y de esta manera poder desarrollar procesos de interactuación con los estudiantes, con un medio, en general con la situación, permitiendo la apropiación de conceptos, descubriendo su organización interna para utilizarlos en la solución de diferentes problemas". (pág. 30)*

En términos generales, las acciones que permiten establecer las relaciones anteriores están dadas por interrelaciones de los participantes en juegos de interacción, donde se puede identificar un estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles de solución, para determinar un estado final, que corresponde a la solución del problema involucrado.

Brousseau (1997), en el libro *Theory Of Didactical Situations In Mathematics Didactique Des Mathématiques*, 1970-1990 sustenta las acciones de una Situación Didáctica desde una concepción constructivista, cuando afirma:

*“El método socrático puede mejorarse si se asume que el estudiante es capaz de dibujar su conocimiento a partir de sus propias experiencias, de su propia interacción con su entorno, incluso si ese medio no se organiza con el aprendizaje en mente. El estudiante aprende a mirar el mundo (empirismo-hipotético) o haciendo hipótesis o el tipo de experiencia le permite elegir (a-priorist hipótesis) o en una compleja interacción que consta de la asimilación y alojamiento como lo descrito por Piaget”. (*pág. 30*)*

Desde esta perspectiva, la importancia que posee la teoría de Brousseau, además de explicarse desde las relaciones descritas anteriormente, tiene que ver con las características específicas del saber matemático, donde los conceptos, los procedimientos de desarrollo, los sistemas de representaciones concretas y simbólicas y la validación de nuevas concepciones matemáticas, permiten un acercamiento a la clasificación de cuatro tipos de situaciones didácticas, secuenciados, que corresponden a procesos didácticos organizados. A continuación se explica cada una de ellas.

2.1.2.1 Situaciones de acción

Después del análisis de los saberes previos que poseen los participantes, la identificación de su contexto, su historia, su entorno, entre otros elementos, le permiten al diseñador planear el juego, traducido en situaciones de acción, donde las relaciones entre el estudiante y el medio, a través de material concreto o simbólico, son la esencia de la situación de acción. Para el caso específico presentado por Brousseau, el juego es el medio que permitirá la puesta en acto de conocimientos implícitos por parte del estudiante, abordando la situación de manera individual como producto de reflexiones desde los saberes previos. Brousseau (1997)

Cuando se determina qué clase de juego se propondrá a los estudiantes, se debe partir de un jugador que reta a otro, enfrentándose cada uno de ellos a la situación y cuando uno de ellos actúa sobre la situación, el otro debe tomar decisiones y también actuar sobre esa nueva situación creada. Este proceso se repite varias veces, hasta que se determina quién gana o pierde, hecho que permite generar las primeras estrategias de éxito o fracaso en el intento de solución.

En las situaciones de acción, todo lo que actúa sobre el estudiante o que actúa en el juego se llama "medio". Brousseau (1997) lo expresa de la siguiente manera:

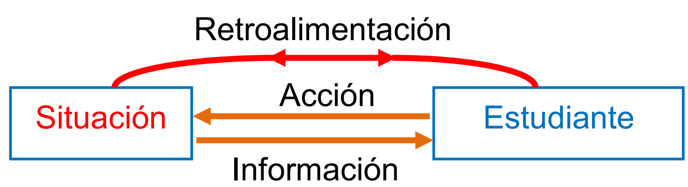
> *"Esta sucesión de interacciones entre el estudiante y el "milieu" constituye lo que llamamos una "dialéctica de acción". Usamos la palabra "dialéctica" en lugar de la palabra "interacción" porque, por un lado, el estudiante es capaz de anticipar los resultados de sus elecciones y, por otro lado, sus estrategias son, de alguna forma, proposiciones confirmadas o invalidadas por la experimentación en un tipo de diálogo con la situación" (*pág. 9*)*

Por lo general, en esta clase de situaciones, una estrategia es aprobada por intuición o por hechos de raciocinio. En vista de que la segunda estrategia rechaza la estrategia intuitiva porque ella es el resultado de la experimentación, puede ser aceptada o rechazada por los participantes, tras su evaluación para determinar su eficacia, resultando una estrategia implícita.

La secuencia de las "situaciones de acción" constituye el proceso por el cual el estudiante forma sus estrategias, es decir, "descubre" un método para resolver su problema. Esta sucesión de interacciones entre el estudiante y el medio se presenta porque, por un lado, el estudiante es capaz de prever los resultados de sus decisiones y, por otro lado, sus estrategias son, de algún modo, las proposiciones confirmadas o refutadas por experimentación en una especie de diálogo con la situación, lo cual le permitie organizar sus estrategias y construir una representación de la situación que le sirve de "modelo" y guía sobre sus decisiones.

Aunque el modelo implícito no coincida con el conjunto de los saberes que se pretende desarrollar, puede suceder que durante el desarrollo, las estrategias de solución del estudiante sean desconocidas para el profesor, justificando los modelos incorrectos o nuevos y requiriendo de análisis antes de comunicarlos.

Figura 4. Situación de Acción



Fuente: Adaptado de Brousseau (1997, p.9)

La Figura 4 representa el modelo implícito para describir el conjunto de relaciones o las normas según las cuales el participante puede tomar sus decisiones después de la experimentación, las estrategias y los descubrimientos se presentan implícitamente antes de formular una solución al problema.

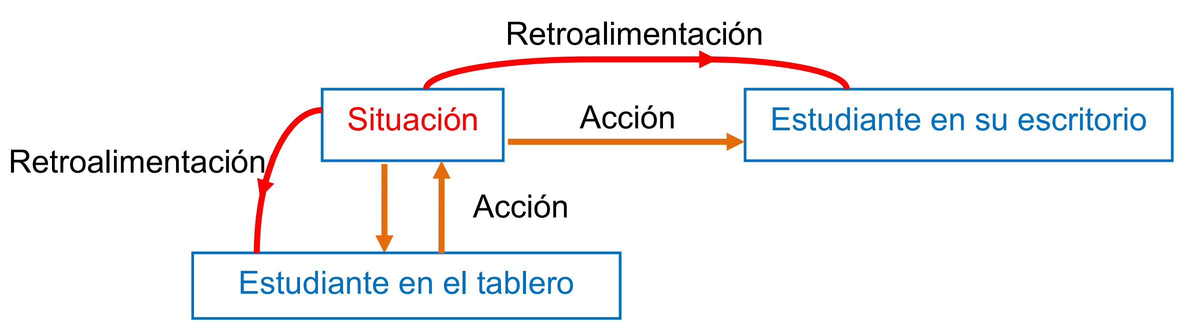
2.1.2.2 Situaciones de formulación

Una vez superada la etapa de uso de estrategias personales, hay necesidad de comunicarlas a los demás. Para ello se debe generar otro momento de la situación, donde los participantes puedan comunicar las estrategias construidas en la situación anterior. Esto significa que uno de los estudiantes (o un grupo de ellos), será el emisor, quien deberá formular explícitamente un mensaje destinado a otro compañero (o grupo de compañeros), esto es un receptor, que debe comprender el mensaje y actuar (sobre el medio).

Debido a la necesidad de compartir la estrategia ganadora, esta deberá ser debatida y socializada con un grupo de jugadores, quienes identificando claramente las reglas de juego, nombrarán a un representante que pueda comunicarla y asegurarse que ella es la única forma de actuar sobre la situación.

En consecuencia, como las situaciones de formulación tienen el objetivo de comunicar información entre los jugadores, ellos deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a la información que deberán comunicar a los demás.

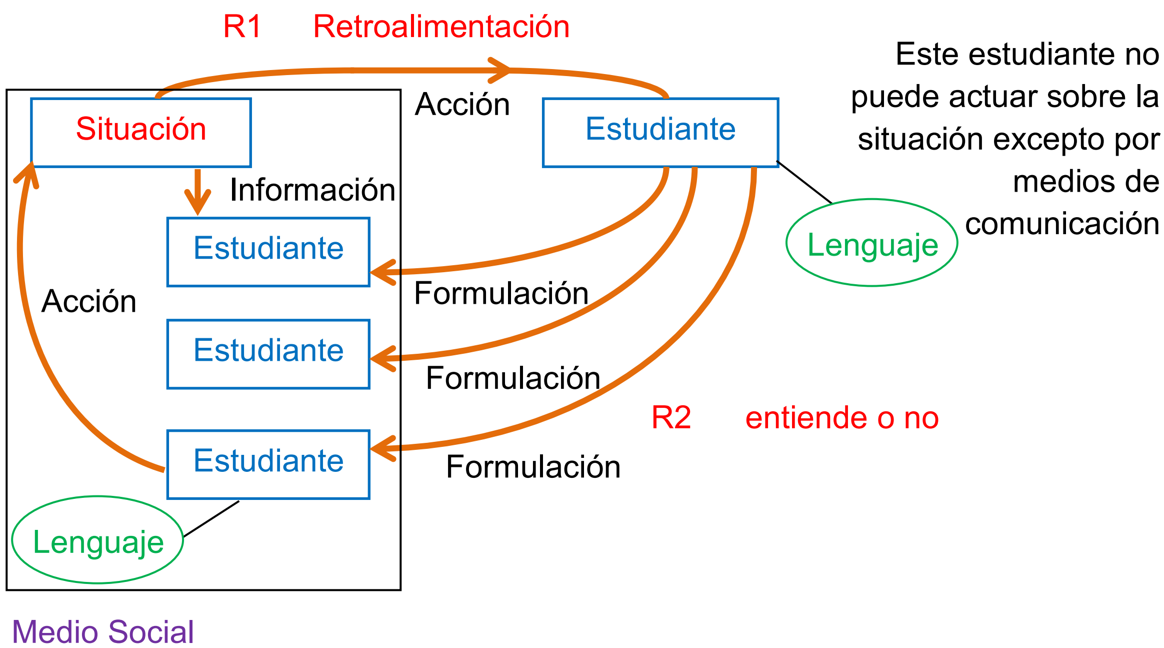
Figura 5. Situación de formulación



Fuente: Adaptado de Brousseau (1997, p.10)

La Figura 5, modela esta fase, donde los debates en grupo son la actividad central, por la necesidad de unificar criterios entre todos y así elaborar, con un lenguaje claro, la estrategia ganadora para convencer al otro equipo que esa es la forma de solucionar el problema. Para ganar, no es suficiente que el estudiante tenga su estrategia personal (un modelo implícito), sino que ésta también debe indicar a sus compañeros que la estrategia es la única forma que tiene de actuar sobre la situación.

Figura 6. Situación de formulación



Fuente: Adaptado de Brousseau (1997, p.11)

La Figura 6 es un caso especial del plan de formulación, donde la reflexión debe partir de la situación de acción. La formulación se compone, entonces, del establecimiento progresivo de un lenguaje que todos puedan entender, teniendo en cuenta los objetos y las relaciones de la situación de forma adecuada (con razonamientos útiles y acciones concretas). En cada momento, este lenguaje construido se pone a prueba desde la facilidad en la construcción de los mensajes que se intercambian entre los miembros del grupo. La construcción de un lenguaje o código (repertorio, vocabulario, sintaxis) a veces en una lengua o un lenguaje formalizado hace posible la explicación de las medidas y modelos de acción.

El régimen de la formalización se basa en las leyes de la comunicación, esto se refleja cuando Brousseau (1997) expresa:

> *"Llamamos a estas discusiones espontáneas acerca de la validez de estrategias "fases de validación". Aparecen aquí como medios de acción. Los estudiantes las usan como medios de animar a sus compañeros para completar la acción propuesta. Los medios de transmitir convicción pueden variar ampliamente (autoridad, retórica, pragmatismo, valides, lógica).*
>
> *En la dialéctica de formulación, estos medios están fuera del control del estudiante y permanecen implícitos, diferente a otras validaciones que aparecen como el propósito u objeto de estudio. Para obtener el último, uno debe organizar un nuevo tipo de situación didáctica" (*pág. 12-13*)*

2.1.2.3 Situaciones de validación

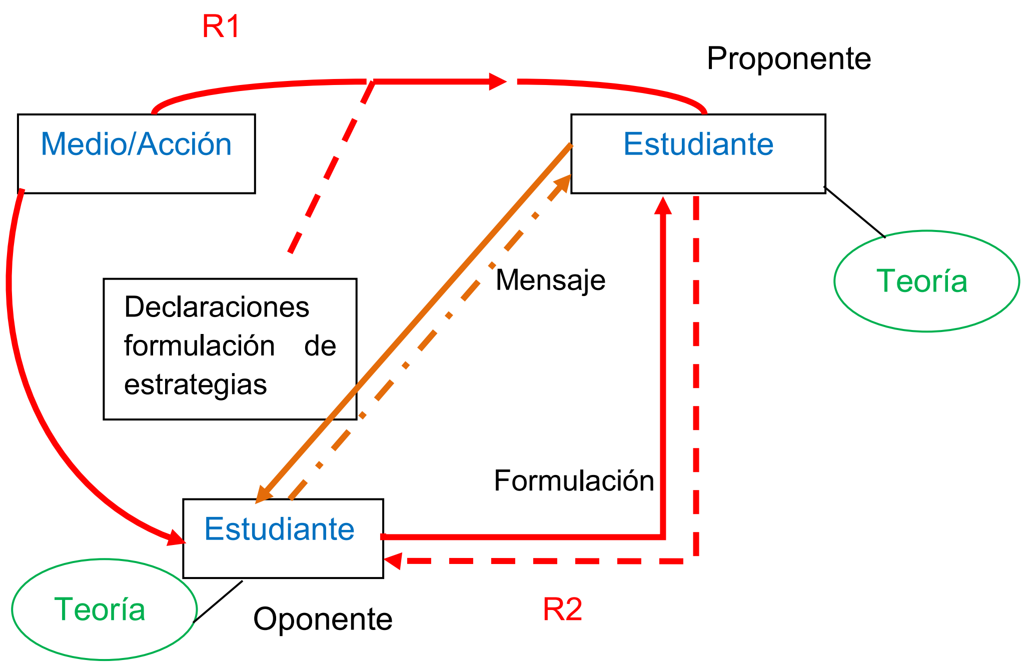
Identificadas las estrategias de solución frente a la situación, las situaciones de validación permiten a los estudiantes (o grupo de estudiantes), exponer o enunciar sus aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de la estrategia construida para la solución, y así tratar de convencer al interlocutor de la validez del descubrimiento realizado. En este caso, los participantes deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones.

> *En matemáticas, el "por qué" no se puede aprender sólo refiriéndose a la autoridad del adulto. La verdad no conforme a la regla, a una convención social como la "belleza" o lo "bueno". Requiere un soporte, una convicción personal, una internalización, la cual por definición no se puede recibir de otros sin la pérdida de su valor. Pensamos que el conocimiento empieza a construirse en una génesis de la cual Piaget ha indicado las características*

*esenciales, pero en las cuales involucra relaciones específicas con el "milieu", particularmente después de comenzar la escuela. Por lo tanto, consideramos que para el niño, hacer matemáticas es primeramente, una actividad social y no sólo individual. (*Brousseau, G. Brousseau, N, 2014, pág. 15*)*

La Figura 7 representa el modelo de las consideraciones anteriores.

Figura 7. Situación de validación



Fuente: Adaptado de Brousseau (1997, p.16)

Paralelamente a las concepciones anteriores, el equipo de investigadores de la Universidad del Valle, Arce, Castrillón & Obando, (1998) brindan la siguiente definición:

> *Las situaciones de formulación favorecen la aparición de mensajes que pueden tener una forma muy cercana al discurso matemático y que son concretamente significativas para cierto "medio". Pero esos mensajes no tienen el sentido de un texto matemático. Las situaciones de validación van a poner ante sí a dos jugadores que se enfrentan a propósito de un objeto de estudio, compuesto de mensajes y descripciones que el alumno ha producido por una parte y del medio a-didáctico que sirve de referencia a esos mensajes, por otra.* (pág. 174).

> *Los dos jugadores son alternativamente uno que "propone" y un "oponente"; ellos intercambian aseveraciones, pruebas y demostraciones a propósito de la pareja "medio/mensajes". Esa pareja es el nuevo dispositivo, el "medio"-el juego en el sentido de la situación de validación. Puede presentarse como un problema de acompañamiento de sus tentativas de soluciones, como una situación y su modelo, o como una realidad y su descripción…* (pág.175).

Es claro, entonces, que las situaciones de validación son el resultado de las situaciones particulares de acción y formulación.

2.1.2.4 Necesidades de situaciones de institucionalización

Este último concepto se presenta como complemento a la devolución realizada por los estudiantes, después de la experimentación. Desde el punto de vista teórico el concepto de institucionalización no parece ser más complejo que las demás situaciones, requiriendo del docente toda su habilidad para recoger información de sus estudiantes, capacidad de síntesis, de observación, de análisis para establecer relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural. Esto es, apoyándolos en el establecimiento de conclusiones a través de la recapitulación, la sistematización, la organización de la información, vinculando lo que se produjo en diferentes momentos de la situación didáctica, entre otros. (Panizza, 2003).

En la conferencia que ofrece en Montreal, Brousseau (2011), establece particularidades sobre la institucionalización:

> *"La adición de este conocimiento al repertorio, implica que uno podrá referirse al mismo para una decisión o para la construcción de un nuevo conocimiento. La adición de un conocimiento producido por los protagonistas a su repertorio común supone (exige) que sea reconocido (por ellos) que este conocimiento es válido, que él servirá en otras ocasiones aún no conocidas, que será ventajoso entonces reconocerlo (no es evidente), y a menudo que él será aceptado como verdadero, fuera del círculo restringido de los protagonistas de las situaciones de origen (...)" (*pág. 46*)*

Una explicación posible de este fenómeno puede encontrarse en el análisis de Brousseau (2011):

> *Estas situaciones surgen de la necesidad de darle a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes. Para ello, los docentes deben tratar los conocimientos como medios sociales culturales de identificación, de organización, validación y uso de los conocimientos. El mismo concepto como conocimiento y como saber, no tiene las mismas propiedades, ni como medio de investigación, ni como posibilidades de*

expresiones, ni como instrumento de creencia o como argumento, esto es, no es aprendido de la misma manera.

*Los docentes deben ser capaces de tratar a largo plazo lo que es en cada instante, de que debe ser dicho, puede ser dicho, no se debe decir, pero se pueden dar a entender, y no se debe decir a todos. El esquema de las cosas que las situaciones de acción han causado a ser descubierto, en las situaciones de formulación, a continuación, hacer que se expresa, las situaciones de validación causa que demostrarse y otras situaciones que se toman como referencia, de institucionalización, que se han de estudiar y si es necesario para ser practicado.(*pág. 203*)*

2.1.3 Representaciones matemáticas

Todos los objetos matemáticos, presentes en un currículo de educación formal, requieren de algún sistema de representación, que para algunos casos puede ser de tipo gráfico, en otros de tipo simbólico, y de ambos tipos en la mayor parte de los casos. Por ello la importancia de poseer un sistema de representaciones para, dado el caso, usar la más adecuada, referente al tipo de objeto y de momento cognitivo que el estudiante posea para desarrollar una determinada actividad matemática.

Entre los investigadores más consultados, están los hermanos españoles Encarnación Castro y Enrique Castro (1997), quienes afirman que las representaciones matemáticas son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes.

Al respecto, Castro & Castro afirman:

> *"Las representaciones y modelos gráficos permitirán que el estudiante perfeccione su capacidad de visualización, diferenciando muy bien del "ver", porque ésta no produce necesariamente entendimiento. Habrá que dibujar figuras simples para representar problemas matemáticos, interpretar aquellas representaciones que ilustran situaciones dadas, de forma comprensiva, y usar de manera adecuada diagramas y modelos para resolver problemas planteados; todas estas acciones son destrezas eminentemente visuales". (Pág. 103)*

Es así como la percepción y la observación se entienden como fuentes privilegiadas del conocimiento humano. Luego, resulta acertado considerar la intervención de estos sentidos para los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, especialmente cuando se trate de trasmitir, adquirir y construir el conocimiento, generando imágenes y objetos mentales para formar y desarrollar un concepto. Este proceso requiere de enunciados verbales (declarativos) y organizaciones visuales gráficas o simbólicas para comunicar un saber matemático.

Desde esta perspectiva, Castro & Castro (1997, pág. 95) expresan: "La noción de representación la vinculamos con los signos, notaciones figuras y expresiones usuales de las matemáticas; las representaciones forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos". Es por eso que cuando se razona o se comunican reflexiones propias, usualmente no se presentan los objetos o conceptos sobre lo que se trate, sino que se sirve de expresiones, dibujos o símbolos que las representan. Según Hiebert y Carpenter (citado por Castro y Castro 1997) "la manera en la cual un estudiante trata las representaciones externas o genera dichas representaciones, revela algo de cómo ha representado tal información internamente".

De esta manera, Castro & Castro expresan:

> *"Esta idea va unida al carácter positivo que se asigna al desarrollo de la capacidad de visualización en dichos procesos. Todo ello ha llevado a un incremento progresivo en el interés por el tratamiento y estudio de las diversas representaciones, incluidas las gráficas, superando el predominio anterior en el trabajo casi exclusivo con representaciones simbólicas". (Pág 102)*

Se perciben pues dos cambios, el primero con los textos de los estudiantes, donde presentan una conceptualización a partir de diferentes representaciones: esquemas; cuadros; figuras e ilustraciones. El segundo cambio importante lo promueven grandes investigadores, entre los citados Castro & Castro está Duval (2003) con los *Registro Semióticos* y Vergnaud (1991) por el tratamiento de *Esquemas*, quienes precisan el concepto de representaciones y el papel que juegan las representaciones gráficas en el razonamiento de los estudiantes.

Castro & Castro consideran:

> *"Una de las conclusiones a que se ha llegado es que el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos.*

No obstante, se hace hincapié en que es necesario distinguir el objeto matemático de su representación. Es fundamental no confundir los objetos matemáticos (el número, las funciones, la recta) con sus representaciones (la escritura decimal o fraccionaria, la gráfica, el trazo lineal, etc.)

La conceptualización actual del conocimiento matemático, basada en la noción de estructura, sostiene que los conceptos y propiedades matemáticas se construyen a partir de relaciones entre objetos, fenómenos o conceptos previos; estas relaciones llegan a convertirse en entidades abstractas y su expresión viene dada por enunciados y demostraciones que exigen de algún sistema de representación.

El conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática han de responder a su carácter sistémico, por lo que hablamos de sistemas de representación, en vez de representación simplemente". (Pág. 102)

3 ELEMENTOS DE REFERENCIA Y METODOLOGÍA

3.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La comunidad educativa donde se desarrolló el Trabajo de Grado es el Colegio Bennett. Ubicado en la Avenida Cascajal, Calle Alférez Real, barrio Ciudad Jardín. Pertenece a la comuna 22, de estrato 6 y se encuentra en el Municipio de Santiago de Cali, Departamento del Valle del Cauca. La institución cuenta con una única jornada académica: de 6:45 a.m. a 2:30 p.m.

Es un colegio de carácter bilingüe que presenta una propuesta de valor que lo hace diferente a los otros colegios bilingües y consiste en "*Formar personas bilingües, capaces de discernir ética y moralmente con un pensamiento crítico, creativo y reflexivo desarrollado a través de metodologías globalizadoras que les permiten comprender la realidad y afrontar un mundo cambiante*" (Colegio Bennett. 2010). El nivel educativo se considera muy alto, según los resultados de las Pruebas Saber 3°, 5°, 9° y 11°, siendo el área de matemáticas la de mejor promedio desde el año 2006.

El equipo del D.M.C.B. está conformado por 37 profesionales de la educación; siete educadores matemáticos, de los cuales cuatro desarrollan los planes de secundaria y dos el de básica primaria. Dora Janneth Gómez es la Jefe de departamento, quien no tiene carga académica porque su función la centra en la formación de docentes del área de matemáticas y la administración del currículo del Colegio Bennett. La formación académica de los demás miembros del equipo está entre profesionales de primera infancia y lenguas modernas.

Acorde con los principios que rigen a todo colegio bilingüe, las matemáticas escolares deben trabajarse en una lengua extranjera; para el caso del Colegio Bennett, el inglés. Por esta razón, los profesionales de preescolar y primaria desarrollan los planes de matemáticas en ese idioma.

De ahí la necesidad de organizar programas de formación permanente (especialmente con los profesionales no formados en la línea de Educación Matemática), generando conciencia en el equipo docente de que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales (MEN, 2006).

Siguiendo esta idea y orientados desde una metodología globalizadora, se institucionalizan en el D.M.C.B. las Situaciones Problema, orientadas desde las investigaciones realizadas por Jhon Jairo Múnera (2001) y referidas desde las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, donde además de dinamizar la actividad matemática del estudiante en un contexto de participación colectiva, permite la creación de comunidades de aprendizaje (C.D.A.), conformadas por docentes que investigan sobre dichas situaciones.

3.2 SUJETOS PARTICIPANTES

Inicialmente, en la presentación del anteproyecto, se propuso indagar a siete docentes: certificados por TEFOL ISSO dos (2), Licenciados en lenguas Modernas Inglés/Francés tres (3) y dos (2) profesionales extranjeros; uno con máster en Biología y otro en Educación Elemental. Debido a que la orientación del estudio es de tipo cualitativo y el análisis con respecto a las representaciones matemáticas sobre patrones numéricos y proporcionalidad de cada docente es único y extenso por su complejidad, junto con el director del Trabajo de

Grado se decidió acotar la muestra a un solo docente, quien participó de todo el proceso de investigación.

Por tratarse de docentes que inician procesos de formación en el D.M.C.B., desde septiembre de 2013, se describe a la docente seleccionada: profesional en lenguas modernas de la Universidad del Valle, con cuatro años de experiencia; dos en Colombia y dos en los Estados Unidos. Llega al Colegio Bennett a desempañarse como maestra titular en el grado cuarto “A” y desarrolla las áreas básicas de matemáticas y ciencias en lengua extranjera, inglés, tanto en su grupo como con el grado cuarto “B”.

3.3 DISEÑO METODOLÓGICO

Este estudio se enmarca en el campo de la investigación cualitativa, desde un enfoque de estudio de casos, con énfasis en el análisis minucioso de los datos y contextualización del medio en que se trabaja (León & Montero, 2003), para identificar la transformación de las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad de una docente bilingüe, no formada en Educación Matemática.

Las investigaciones de los españoles Luis Rico y Encarnación Castro (2001), los colombianos Evelio Bedoya (2008) y Fabio Sanabria & Jaime Cortés (2012), han indagado sobre las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas, frente a la solución de problemas, aportando al análisis de los datos del Trabajo de Grado, reflexionando sobre la formación de docentes bilingües.

En atención a las referencias anteriores, se diseñó una metodología para conocer las transformaciones de las representaciones matemáticas de la docente bilingüe que participa de esta investigación, en tres fases, como se describen a continuación:

1. Para identificar las representaciones matemáticas previas que poseía la docente seleccionada para el estudio, se realizaron indagaciones a través de una encuesta, el análisis de las primeras planeaciones de su clase de matemáticas y las producciones escritas de dos de sus estudiantes. La encuesta es el resultado de una planificación y elaboración cuidadosa de contenidos y procedimientos sobre los que se enfocó cada una de las preguntas, donde, además de tener el formato de selección múltiple, hacían referencia a las S.D, elementos conceptuales y/o procedimentales de patrones numéricos y proporcionalidad. También se hace análisis de las planeaciones que la docente realiza y revisión de la producción escrita de sus estudiantes, antes de exponerse a la formación del D.M.C.B.

2. Paralelo a esta indagación, se intervino didácticamente exponiendo a la docente bilingüe a situaciones problema referidas desde las S.D., producto de sistematizaciones realizadas en el D.M.C.B. y que permiten un acercamiento a los cuatro tipos de S.D., secuenciados y que corresponden a las *situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización* del saber matemático (Brousseau, 1997). Adicional, las situaciones aluden a los conocimientos previos que sus estudiantes construyeron en los años anteriores; significación del Sistema de Numeración Decimal; identificación de las estructuras aditivas, multiplicativas y proporcionalidad y patrones numéricos. Del mismo modo, se reflexiona sobre el impacto de estas temáticas en las Pruebas Saber (MEN, 2009) y su relación con los Lineamientos del Área Fundamental de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). El instrumento privilegiado para este momento fue el video, donde se registra cómo la docente se enfrenta a las situaciones referidas desde Guy Brousseau.

3. Esta última fase tiene como propósito conocer las transformaciones matemáticas sobre patrones numéricos y proporcionalidad que la docente bilingüe posee, después de finalizado el proceso de intervención didáctica. Para ello, la docente se enfrenta al diseño de una situación problema, donde la temática está referida a los objetos de investigación antes mencionados. En esta fase de planeación de la situación se utiliza la metodología de Estudio de Clases (M.E.C.) (MEN, 2009), donde se hace necesario socializar dicha planeación con la CDA que asistieron a los procesos de formación de la fase anterior y quienes acompañan a la docente, en calidad de observadores, en la ejecución y evaluación de la situación.

3.4 DESCRIPCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

El carácter semiestructurado de la encuesta, las exposiciones de la docente a situaciones problema y las herramientas usadas por ella para diseñar una situación problema, permitieron generar registros de observación (registros fílmicos) y análisis de la información usando la técnica de rejillas de observación. Este instrumento permitió recoger información sobre las opiniones y eventos que sucedieron durante la investigación, y de esta manera determinar las transformaciones que la docente bilingüe realiza durante el proceso de formación.

Para la organización de la información del Trabajo de Grado se tuvieron en cuenta tres categorías (C.1. a C.3.) que se desprenden del objetivo principal: transformación de las representaciones matemáticas de una docente bilingüe no formada en la línea de Educación Matemática, estas son:

C.1. Identificación de las representaciones matemáticas iniciales (IRMI):

Se propone indagar sobre las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad y las Situaciones Didácticas, que la docente bilingüe posee, antes de estar expuesta a las S.D.

C.2. Formación Departamento de Matemáticas Colegio Bennett (FDMCB):

Esta categoría permite indagar cómo se transforman las representaciones matemáticas, cuando se exponen a las S.D. como línea de investigación institucionalizada para formar maestros en el D.M.C.B.

C.3. Nuevas Representaciones Matemáticas (NRM):

Esta categoría se refiere a las transformaciones que la docente evidencia sobre representaciones matemáticas, para realizar diseños de situaciones problema y así mejorar sus prácticas de aula.

En la Tabla 1 se presenta una relación entre cada categoría de análisis y los objetivos del Trabajo de Grado.

Tabla 1. Relación entre las categorías de análisis y los objetivos del estudio.

CATEGORÍAS / OBJETIVOS	IRMP	FDMCB	NRM
O1	X	X	
O2	X	X	
O3		X	X

Fuente: La autora

Los análisis en las rejillas de observación de la encuesta, la exposición de la docente a las situaciones problema diseñadas en el D.M.C.B y las herramientas usadas por ella para elaborar su propio diseño se realizaron en varios momentos:

Momento 1: Inicialmente se expusieron los resultados de la encuesta teniendo en cuenta las preguntas relacionadas con cada categoría de análisis, reconociendo las explicaciones y argumentos enunciados en sus respuestas, permitiendo hacer observaciones que la caracterizan. (Ver Tabla 3, pág. 53-54).

Las rejillas de observación referidas al momento de exposición de la docente a las situaciones diseñadas en el D.M.C.B., se analizaron a través de dos acciones representativas; las primeras corresponden a las diez (10) sesiones de formación, y la segunda a cuatro (4) sesiones, acompañando a la docente en su ejercicio de planeación, ejecución, evaluación y cierre de una situación de matemáticas en inglés para 4°. (Ver Tablas 4 y 5 pág. 56-61)

Momento 2: Después de los procedimientos de la etapa anterior se identificaron subcategorías relacionadas con cada categoría de análisis según observaciones detectadas en la primera etapa, las cuales se recogen en las rejillas de análisis fase 2 (Ver Tablas 6, 7 y 8, pág. 62-64).

Momento 3: Realizados los correspondientes análisis de categorías y subcategorías, se construyó una rejilla que define la última fase del estudio y en la cual se muestran las nociones conceptuales y/o observaciones finales al hacer intercepción de los elementos de cada subcategoría, para luego relacionar y analizar éstas con la respectiva categoría de análisis. (Ver Tabla 9, pág. 67-68).

En la Tabla 2 se presentan las categorías y subcategorías, con sus dispositivos de análisis, los cuales son útiles para la construcción de las rejillas.

Tabla 2. Relación de las categorías, subcategorías y dispositivos de análisis útiles en la construcción de las rejillas (acordes con los objetivos)

	SUBCATEGORÍAS	DISPOSITIVOS DE ANÁLISIS
C.1. **IDENTIFICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES PREVIAS**	• Apreciaciones sobre Situaciones Didácticas • Nociones sobre representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad.	• Encuesta • Apuntes del planeador del docente, producciones escritas de los estudiantes
C.2. **FORMACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS COLEGIO BENNETT**	• Nociones sobre Situaciones Didácticas a partir de procesos de formación Departamento Matemáticas • Nociones sobre Patrones Numéricos y proporcionalidad, derivados de la formación y sistematización de situaciones en el D.M.C.B.	Registros de observación, cuando un docente se expone a situaciones problemas institucionalizadas en el D.M.C.B.
C.3. **NUEVAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS**	• Diseño de una situación didáctica para identificar los patrones numéricos y la proporcionalidad con estudiantes de 4°. • Seguimiento a las nuevas representaciones a partir de la metodología de Estudio de Clases	Registros escritos de observación sobre planeación y la práctica; planeador de clase, diseño de Situación Problema, cuadernos de estudiantes, talleres y evaluaciones.

Fuente: La autora

3.5 MÉTODOS, TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

Las rejillas de análisis 1 fueron construidas teniendo en cuenta las tres fases de la investigación y las tres categorías. Para el caso de la primera sesión y el desarrollo de la encuesta a la docente en formación, se analizaron sus respuestas, sus registros de planeación y las producciones escritas de sus estudiantes, con el fin de obtener información sobre las representaciones matemáticas iniciales que ella posee, frente a los objetos mencionados anteriormente. La encuesta se envió por correo electrónico y se recopiló la información desde el 11 de septiembre hasta el 18 del mismo mes de 2013 (ver Rejilla de análisis 1, págs. 54-55).

Las rejillas de análisis 2 corresponden a las sesiones en que la docente se expone al tratamiento de las situaciones problema, referidas desde las S.D., que en el D.M.C.B. se han institucionalizado para garantizar el aprendizaje de los saberes matemáticos. Se analizaron las diez sesiones (cada una de 45 minutos, que corresponden a una hora de clase), realizadas en el Colegio Bennett entre los días 18 de septiembre de 2013, al 16 de marzo de 2014 bajo la técnica de observación participante, registrando los hechos con el uso de instrumentos de filmación. (Ver Rejilla de análisis 2, págs. 56 a 60).

Para las cuatro últimas sesiones se construyeron las rejillas de análisis 3, donde se registraron los hechos, empleando el recurso audiovisual con el fin de analizar el diseño realizado por la docente bilingüe desde las Situaciones Didácticas para el tratamiento de las representaciones de patrones numéricos y de proporcionalidad. Las sesiones se realizaron en la oficina del D.M.C.B. y en el aula de clases de cuarto “A” entre los días 12 de febrero al 12 de marzo de 2014 (Ver Rejilla de análisis 3, págs. 61 a 62).

Tabla 3. Rejilla de análisis 1: Encuesta, análisis de planeador y las producciones escritas de los estudiantes.

PREGUNTA	ARGUMENTO	OBSERVACIONES
EDP5	B. Dependiendo de la complejidad de la situación problema	La docente identifica una actividad propuesta desde situaciones didácticas, donde las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización requieren de tiempo para contextualizarlas. (Brousseau, 1997)
EDP7	A. El estudiante	La docente no diferencia aún las responsabilidades en una situación problema, referida desde las situaciones didácticas, donde el docente es quien diseña la situaciòn. (Múnera , 2001)
EDP10	A. Una situación de la vida cotidiana planteada en el aula de clases, que da cuenta de un currículo.	La docente reconoce que uno de los contextos usados para la enseñanza de las matemáticas escolares, es diseñando situaciones cercanas a la realidad del estudiante para que le sean significativas (MEN, 2006)
EDP2	C. 71, 79, 87, 95, 103	La representación matemática que posee le permite identificar patrones numéricos cuya variación corresponde a la adición de 5. Entre las opciones también estaba de la variación N+1, decidiéndose únicamente por la aditiva. (Mason, 1985)
EDP6	C. Valores que se establecen en un mismo conjunto de características	Al igual que la anterior, la docente refiere a patrón desde una representación única, donde no existe la posibilidad de una regla de recurrencia para su solución.
EDP1	B. Contextos definidos.	Entre las alternativas que la docente tenía para tomar la decisión, estaban: Los conocimientos previos, un problema de la vida cotidiana y los conocimientos del año siguiente. La importancia que se tiene desde la identificación de los conocimientos previos, permite acercamientos a los estudiantes, con sus fortalezas y debilidades, marcando en el maestro actividades diferenciadas para casos específicos al momento de interactuar con sus estudiantes. (Múnera , 2001)
EDP3	C. Diseño, aplicación, exploración, validación.	La docente reconoce los procesos institucionalizados en el departamento de matemáticas, porque su filosofía así lo propone y se comunica permanentemente en toda sesión que se organiza para mantener la línea desde preescolar hasta 11°.
EDP4	D. Todas las anteriores	Los referentes dados a la docente se centraron en un Contexto numérico, un contexto social (banco, negocio) y un contexto métrico. Ella reconoce la importancia de todos los contextos, acercándose a la representación matemática de proporcionalidad desde la variedad de contextos, que permite la variedad de representaciones.
EDP9	B. Toma en cuenta todas las	La docente indica la validación como resultado del proceso de solución del problema, donde

	respuestas de los estudiantes y junto a ellos escoge la más acertada.	la socialización de estrategias de solución por parte de los estudiantes está referida a su toma de decisión de ellos, donde exponen y prueban sus intentos de solución, sean exitosos o no.
EDP8	B. Generar conflicto cognitivo frente a las preguntas de los estudiantes.	Frente a las opciones que la docente tenía, están la de participar activamente con los estudiantes o mantenerse distante de ellos. Elige la de generar conflicto cognitivo, porque corresponde a una de las políticas institucionalizadas en el Colegio Bennett, para potenciar el desarrollo del pensamiento.
Análisis de las primeras planeaciones	En las representaciones existentes, se evidencian algoritmos, secuencias y las aproximaciones a las representaciones de la proporcionalidad.	Las representaciones matemáticas existentes en sus planeaciones son aditivas, realizando tratamientos algorítmicos al momento de definir los términos de la sucesión que se generalizarán más adelante con los patrones encontrados. Los tratamientos que le da a la proporcionalidad los presenta desde las representaciones icónicas, enfatizando, a través de sus planeaciones el esquema de la regla de tres, referida desde su aproximación a textos escolares. Más, en las diferentes reuniones en que ha participado para la planeación de las situaciones de aula con el D.M.C.B. inicia la identificación de otra clase de representación para el objeto matemático en mención.
Producción escrita de los estudiantes (30 de agosto y 25 de septiembre de 2013)	Las primeras producciones escritas de los estudiantes se evidencian variadas representaciones referidas a las soluciones de problemas de proporcionalidad y el reconocimiento de patrones numéricos.	Los estudiantes de 4°, desde los inicios de la primaria, están expuestos a una variedad de representaciones y registro, que les permite analizar una solución por cualquiera de las vías que consideren se puede solucionar. En contraste con la planeación de la docente, donde usa una sola representación (algorítmica formal), requiere de constantes indagaciones entre sus pares y con sus estudiantes, para identificar la variedad de representaciones que ellos usan para solucionar problemas.

Fuente: La autora

Tabla 4. Rejilla de análisis 2: Categoría C2. Elementos de formación del departamento del D.M.C.B.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
PRIMERA SESIÓN: SEPTIEMBRE 18 DE 2013 RECONOCIMIENTO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS A PARTIR DE PATRONES NUMÉRICOS	Las situaciones problema permiten relacionar los contextos, los conocimientos básicos y los procesos, desde la actividad matemática, buscando la posibilidad de aplicarla a la solución del problema. Para el estudio, se propone una situación que consiste en hallar patrones numéricos usando el contexto de los círculos multiplicativos (diseño realizado en una herramienta tecnológica (software público Geogebra)), el cual permite a los participantes evidenciar dos tipos de registro; uno geométrico, referido a las posibles formas geométricas planas que determina cada múltiplo (polígonos regulares convexos e irregulares estrellados) y el otro tabular para reconocer el patrón numérico de diferentes múltiplos. Frente a las representaciones tabulares, se rescatan los efectos de visualización y de conceptualización que permiten las diferentes formas de organización. Por ejemplo, los patrones se organizan de acuerdo con el número de filas y columnas que tengan; si resultan cuadradas (igual número de filas y columnas) se obtiene un patrón, donde se guarda una estrecha relación con los conteos del círculo multiplicativo, pero si el número de columnas es diferente al número de filas, se obtendrán una variedad de patrones, acordes con variables de dependencia de filas y columnas, acercando a la noción de generalización tan importante en los grados de primaria.	La formación del pensamiento matemático en el Colegio Bennett se desarrolla a través de Situaciones Didácticas, registradas en el currículo que atiende a lAs líneas de investigación desde las S.D. Adicional, se relacionan los conocimientos de aprendizaje con las experiencias cotidianas de los estudiantes, a partir de los desempeños y habilidades en la resolución de problemas, el uso de conocimientos y de intercambios de diferentes puntos de vista. Las situaciones problema, permiten relacionar, los contextos además de los conocimientos y los procesos, convirtiéndose en una propuesta significativa, porque despliega su actividad matemática logrando el aprendizaje de los conceptos que se les quería enseñar. En este sentido, no se trata de aprender matemáticas para luego buscar la posibilidad de aplicarlas a la solución de problemas aislados, sino de aprender las matemáticas a través de la actividad (matemática) del estudiante en proceso de interactuar con un conjunto de situaciones problema
SEGUNDA SESION: SEPTIEMBRE 25 DE 2013 RECONOCIMIENTO DE PATRONES NUMÉRICOS TABLAS DE REGISTRO	La definición de patrón numérico, al igual que la de proporcionalidad, se debe descubrir a través del desarrollo de la situación como la anterior y las reflexiones sobre la información recolectada en ella. Por ejemplo, si los datos aumentan o disminuyen moviliza a los participantes a calcular o refutar conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Esta primera aproximación permite describir las cuatro etapas de la generalización desde el estudio de patrones, la cual es muy apropiada para preparar el aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico, a través del "Ver", "Decir". "Registrar" y "Probar la validez de las fórmulas".	Las generalizaciones en este punto se presentan como el resultado repetitivo de un patrón, ya sea en términos aditivos o multiplicativos, posibilitando otra representación matemática que es la expresión algebraica, o el lenguaje matemático (Castro & Castro, 1997).

TERCERA SESIÓN: OCTUBRE 2 DE 2013 IDENTIFICACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS Y PROPORCIONALIDAD EN EL ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS SABER 3° Y 5°	La importancia que cobra el Análisis de las Pruebas Saber (MEN-ICFES, 2009-2012) en las propuestas de mejora de todo currículo escolar, deben estar al mismo nivel que el análisis de sus resultados y el de las evaluaciones internas propuestas desde el plan de aula. Esta reflexión se realiza en la sesión, buscando la pertinencia del tratamiento de los patrones numéricos y la noción de proporcionalidad en las Pruebas. Una vez identificadas las diferentes representaciones matemáticas existentes en ella, permiten evidenciar las relaciones entre los objetos de investigación a través de relaciones funcionales entre dos mundos que cambian, enlazadas con patrones de variación que permiten predecir y controlar el cambio, integrando así el estudio y la comprensión del razonamiento multiplicativo (Vergnaud, 1991). Los problemas propuestos para la sesión tienen una relación muy estrecha con la sesión anterior, por el énfasis en los problemas que permiten registrar sus informaciones en tablas y gráficas, contribuyendo en gran medida a la potenciación de un pensamiento proporcional (Obando, Vasco & Arboleda, 2014).	El tratamiento de los patrones numéricos permite pensarse contextos donde aparece la noción de proporcionalidad, estableciendo relaciones funcionales entre dos mundos que cambian, donde emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función como la proporcionalidad integran el estudio y comprensión del razonamiento multiplicativo. En relación a lo anterior, se resalta que el papel de las tablas y gráficas contribuye en gran medida a la identificación de patrones, ya que tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables.
CUARTA SESIÓN: OCTUBRE 16 DE 2013 IDENTIFICACIÓN DE DE PATRONES NUMÉRICOS Y PROPORCIONALIDAD EN EL DIFERENTES PROBLEMAS MATEMÁTICOS	En vista de que las relaciones de un pensamiento proporcional tiene una estrecha conexión con las categorías de relaciones multiplicativas (definimos así las relaciones que comportan una multiplicación o una división) y permite el estudio de los procesos de variación y cambio, referidos desde los pensamientos numérico y variacional. En la encuesta inicial y en las sesiones anteriores, la docente tiene identificada la regla de tres simple como una de las representaciones matemáticas más recurrente, cuando se presenta la nueva representación matemática que permite acercamientos a la introducción de la multiplicación en primaria y que toma forma cuando se requiere hacer análisis de tipo multiplicativo. En este sentido, permite acercamientos a las categorías de relaciones multiplicativas –definimos así las relaciones que comportan una multiplicación o una división-. La más importante de ellas, que se utiliza para la introducción de la multiplicación en primaria y que forma la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria donde las relaciones entre el par de magnitudes que ella relaciona, permite acercamientos a la proporcionalidad o tradicionalmente referida desde el tratamiento de la regla de tres simple.	La proporcionalidad, además de ser tratada en todo currículo de matemáticas de primaria como un concepto altamente estructurante, permite el estudio de los procesos de variación y cambio, referidos a los desarrollos del pensamiento numérico y variacional. Los estudios de Vergnaud (1991), Castro & Castro, (1997) y Obando (2014) presentan los esquemas multiplicativos como una relación cuaternaria donde las relaciones entre el par de magnitudes que ella relaciona, permite acercamientos a la proporcionalidad, reconociéndola como la representación matemática más potente que la tradicionalmente referida en los currículos como la regla de tres simple. De igual manera, el tratamiento de los patrones numéricos, juega papel fundamental para determinar las propiedades que rigen un estudio de la proporcionalidad.

QUINTA SESIÓN: OCTUBRE 30 DE 2013 PRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMA "PALITOS CHIN OS" Y EL USO DEL S.N.D. IDENTIFICANDO LA PROPORCIONALIDAD PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS	La siguiente sesión pretende que la docente bilingüe se acerque a los conocimientos previos que los estudiantes de cuarto grado han construido en los años anteriores. Para dar inicio al reconocimiento de las estructuras del Sistema de Numeración Decimal (SND), se diseña una actividad, tanto introductoria como exploratoria, llamada "El juego de palitos chinos". El objetivo es que ella pueda visualizar y conceptualizar los aspectos multiplicativos del SND al igual que la composición y descomposición de las unidades del sistema, hecho importante que le permitirá significar las diferentes estrategias que los estudiantes de este nivel poseen para solucionar problemas, tanto aditivos como multiplicativos. La actividad central está dada por la manipulación de materiales concretos; artefactos que al momento de etiquetarlos como un objeto matemático toman la dimensión de un instrumento didáctico, permitiendo relaciones entre el significado del instrumento y su representación matemática.	Para el tratamiento de las diferentes representaciones de los números Naturales, sus equivalencias, notaciones y el uso significativo desde la estructura del Sistema de Numeración Decimal, se deben proponer varias situaciones, que le permitan al estudiante exponerse a la mayor cantidad de representaciones matemáticas, de tal manera que identifique todas las relaciones posibles existentes en el sistema. La actividad le facilita a la docente comprobar lo versátiles que pueden ser los conceptos y saberes matemáticos y como estos, a su vez, pueden ser aplicados en otros ámbitos. La manipulación del material permitió evidenciar los procesos de observar (variedad de representaciones de contextos numéricos y su significado desde el SND) y decir (verbalización de todas las relaciones multiplicativas que posee el sistema), al momento de argumentar el significado de uso en la lógica que posee cada algoritmo aritmético (suma, resta, multiplicación y división).
SEXTA SESIÓN: NOVIEMBRE 6 DE 2013 IDENTIFICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA DIFERENCIAR LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS DE COMPOSICIÓN	Siguiendo el orden de la coherencia vertical del plan de área para identificar los conocimientos previos de los estudiantes, se presenta el estudio de las estructuras aditivas (Vergnaud, 1991), a partir de sus generalidades, sus elementos y sus esquemas. Por ello se reflexiona en la sesión sobre la estructura aditiva de composición y cómo ella está inmersa en una red conceptual desde las estructuras aditivas (Obando, 2007) Para el desarrollo de la situación, se crea un contexto, y de acuerdo con él, se presenta a la docente una serie de folletos (alusivos a los de una tienda escolar), para iniciar dos folletos referidos a la solución y formulación de problemas aditivos de composición. El primero contiene elementos conceptuales sobre el esquema, esto es, accede a la identificación del todo y cada una de sus partes, hecho que permitirá diferenciarse de los otros esquemas aditivos. Y el segundo, a manera de evaluación, facilita identificar el nivel de conceptualización que realiza la docente. El desarrollo de la situación busca darle un tratamiento conceptual a la estructura, por el hecho que en ellas se evidencian cuatro representaciones matemáticas; el esquema, la ecuación problema y la solución, la formulación del problema que representa el esquema y el cálculo que permite hallar la solución del problema.	El reconocimiento y uso de las estructuras aditivas de composición, potencia en los estudiantes la toma de conciencia al momento de tomar decisiones si se trata de una solución que requiera la suma o la resta. Los elementos referidos desde esta estructura son terciarios (tres elementos) y se determinan por la parte-parte y el todo. La exposición a una variedad de contextos, admite dicha conceptualización. Desde esta perspectiva, las representaciones anteriores permiten generar estrategias de solución, tanto desde la vía directa (cuando se conocen las partes y se debe hallar el total), como desde la inversa, esto es, identificado un total y una de sus partes, la resta es la solución que facilita hallar la otra parte. Adicionalmente, esta clase de representaciones (esquemáticas, verbales o icónicas) generan seguridad en la docente cuando acompañe a sus estudiantes a solucionar estructuras aditivas de composición.

SÉPTIMA SESIÓN: NOVIEMBRE 13 DE 2013 IDENTIFICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA DIFERENCIAR LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS DE TRANSFORMACIÓN	Para el desarrollo de esta sesión se requiere retomar el esquema de composición para diferenciarlo de transformación. Posee otras representaciones matemáticas, donde las acciones tienen otro significado, porque en su escritura y simbología se relaciona con las magnitudes relativas. La diferencia entre los problemas de composición y los de transformación radica en sus partes, pues para la segunda, las relaciones se dan en términos de una cantidad inicial, una acción que permite transformarla, llamada cantidad final (tercer componente) (Vergnaud, 1991). La conceptualización que permite esta clase de representaciones matemáticas radica en la diferenciación de las tres partes que la componen y la claridad en la clase de transformación (magnitud relativa) que tiene el problema.	La estructura aditiva de transformación, precisa de la identificación de cada una de sus partes, porque la toma de conciencia frente a la decisión de la suma o la resta, para resolver problemas contextualizados, requiere de otro tratamiento diferente al de las composiciones. Las definiciones de la cantidad inicial y la final, referidas desde una misma magnitud, requiere la acción de transformación, que aunque corresponde a la misma magnitud, su valor es relativo a la acción. En esta clase de definiciones cabe el comprar, vender, ganar, perder, entre otros, y que el resolutor de problemas deberá estar muy atento cuando tome la decisión de qué clase de cálculo usará para la solución del problema. En la introducción de la situación, la docente alude a su representación inicial de que si la acción es relativa a aumentar, la solución debe ser una suma y si la acción hace que la cantidad inicial disminuya, entonces debe ser una resta. La exposición a esta clase de esquemas le permitió acercarse a otro tipo de soluciones, donde la nueva representación matemática indica que esta afirmación no es completa, en el sentido que si el dato desconocido es la cantidad inicial y la medida relativa es negativa, su solución no corresponde a una resta, sino a una suma, contraria a la representación inicial que poseía la docente.
OCTAVA SESIÓN: NOVIEMBRE 20 DE 2013 IDENTIFICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA DIFERENCIAR LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS DE COMPARACIÓN DE DOS MEDIDAS	Las representaciones matemáticas, referidas desde las estructuras aditivas de relación de dos medidas a través de las comparaciones e igualaciones, requieren, igual que las demás estructuras, de la identificación de cada una de sus tres partes; una cantidad mayor, otra menor y la relación de comparación o de igualación que es otra magnitud relativa. La decisión de si la solución es una suma o una resta, depende nuevamente de la clase de dato que se esté indagando. De esta forma, las relaciones que se dan entre una cantidad mayor y otra menor, referidas desde una misma magnitud, requieren la acción de comparar o igualar, que aunque corresponde a la misma magnitud, su valor es relativo a la acción que se desee o comparar o igualar. Entre las conceptualizaciones referidas a esta clase de esquemas aditivos se presentan las relaciones: cuánto le falta al menor para igualar al mayor, cuál es la diferencia, entre otros. Hecho que permite identificar a un resolutor exitoso de problemas cuando toma decisiones sobre qué clase de cálculo usará para la solución del problema.	La estructura aditiva de relación de dos medidas a través de las comparaciones e igualaciones, supone, igual que las demás estructuras, la identificación de cada una de sus partes, porque la toma de conciencia frente a la decisión de la suma o la resta, para resolver problemas contextualizados, necesita de otro tratamiento diferente a las demás estructuras. Frente a esta clase de estructura aditiva, la docente relaciona la representación clásica de diferencia entre dos cantidades, encontrando relaciones con las otras comparaciones o igualaciones, y así organizar otro repertorio cuando tenga que formular problemas de este tipo, y exponer a sus estudiantes a soluciones de este esquema.

NOVENA SESIÓN: NOV. 27 SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA DIFERENCIAR ESTRUCTURAS ADITIVAS	Las anteriores representaciones matemáticas demandan más acción frente a las situaciones referidas desde este esquema, mas es importante continuar con las reflexiones desde otros esquemas, porque ello, según Mason (1985) permite asegurar un patrón. Para este caso, poder diferenciar los modelos de representación para identificar una generalidad frente a la solución de problemas aditivos.	La importancia de la formulación de problemas aditivos fortalece los procesos de resolución de problemas, generar representaciones que más adelante le permitirán diferenciarlas de las estructuras multiplicativas. Las nuevas representaciones matemáticas, referidas a las estructuras aditivas, aseguran que la diferenciación se tendrá en cuenta cuando la docente exponga a sus estudiantes a esta clase de situaciones y pueda acompañarlos exitosamente, desde sus conocimientos previos.
DÉCIMA SESIÓN: FEBRERO 5 DE 2014 IDENTIFICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA DIFERENCIAR LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS Y LA PROPORCINALIDAD	Para dar cierre a las sesiones de actualización, se retoma el trabajo avanzado en las primeras sesiones y los patrones geométricos y numéricos, relacionados con las estructuras multiplicativas propuestas desde la teoría de Gerard Vergnaud, ampliamente desarrollados desde el marco teórico de este trabajo de grado. La situación que se propuso a los maestros es un juego adaptado del STOP, pero que para efectos didácticos, especialmente de uso de los esquemas multiplicativos se le ha llamado STOP MULTIPLICATVO. La posibilidad de identificar al esquema multiplicativo, desde una relación cuaternaria, permite la significación de la variación, la dependencia, las magnitudes relacionadas, al mismo tiempo que la propiedad constante y de homogeneidad presentes en las relaciones de proporcionalidad directa simple. La relación anterior se representa matemáticamente así: **$f(x+y)= f(x)+f(y)$ propiedad aditiva de la proporcionalidad** **$f(\alpha\cdot x) = \alpha\cdot f(x)$ propiedad constante de la proporcionalidad**	Las estructuras multiplicativas, de las cuales se define la proporcionalidad como “una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo”. Para la operatividad se tienen dos tipos de operadores; uno escalar y el otro funcional. Escalar: es aquel factor que se establece verticalmente en la representación de la proporcionalidad. No posee dimensión, y genera una relación entre dos valores de una misma medida. Funcional: es aquel factor que relaciona dos valores de forma horizontal y determina el pasaje de una medida a otra. Razón por la cual se expresa en términos de ambas medidas, por ejemplo, helados/pesos o paquetes/dulces, entre otros. Estas relaciones corresponden a la proporcionalidad.

Fuente: La autora

Tabla 5. Rejilla de Análisis 3: Categoría C3. Nuevas representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad de la docente al diseñar una situación problema, referida desde las situaciones didácticas

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
PRIMERA SESIÓN: FEBRERO 12 DE 2014 PLANEACIÓN Y SOCIALIZACIÓN DE LA SITUACIÓN.	En la fase de planeación, la docente decide transformar la situación presentada en la primera sesión de formación, porque debe desarrollar con sus estudiantes de grado cuarto, el contenido de la enseñanza expresado en el currículo desde la concepción de Múltiplo y Divisores. Ella lo adapta para el aprendizaje de los estudiantes en el aula. Este proceso lo inicia con la identificación sobre un tópico concreto del saber escolar, de tipo disciplinar (relacionado con la rigurosidad, vigencia, validez y/o consistencia teórica referida a los patrones numéricos y la proporcionalidad). El otro análisis es de tratamiento didáctico (referido a las estrategias metodológicas y a la creación, adaptación, selección o utilización de materiales para apoyar la enseñanza). Siguiendo las recomendaciones anteriores, la docente delimita el problema y lo somete a un estudio reflexivo y profundo, abordado desde diferentes perspectivas teóricas en relación con aspectos disciplinares, pedagógicos, didácticos y curriculares y alimentado de la experiencia práctica de sus compañeros de la CDA. Este ejercicio de planeación rigurosa y argumentada, es sometido a una crítica constructiva desde diferentes puntos de vista, con la participación de los docentes de la CDA, para posibilitar la construcción de nuevas formas de enseñar y aprender.	La docente usa la MEC para planear una situación problema, dinamizando procesos de autoformación. Aunque en el D.M.C.B., existen diseños de Situaciones Didácticas sistematizados, ella rediseña la situación “Círculos Mágicos” para potenciar con sus estudiantes, además de las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad, el tratamiento de los múltiplos y divisores de números Naturales. En una primera instancia, convoca a sus compañeros (CDA) para socializar el rediseño que presentará a sus estudiantes, evidenciando un trabajo con referentes investigativos, partiendo de las experiencias que ha vivido a lo largo de las sesiones de actualización, de sus propias prácticas y de la observación y acompañamiento de sus colegas.
SEGUNDA SESIÓN: FEBRERO 19 DE 2014 PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DE LA SITUACIÓN.	Cuando se habla de evaluación de procesos en construcción, se requiere del análisis de una evaluación por competencias, referida desde los documentos emanados por el MEN (2009). La docente hace alusión a las clases de evaluaciones existentes para los diferentes momentos que ha planeado, haciendo distinciones entre evaluación diagnóstica, formativa y sumativa. Presenta la primera actividad, de descubrimiento, desde una evaluación diagnóstica por los niveles de reconocimiento que ella exige, desde sus conocimientos previos, hecho que le permite continuar con lo planeado, o realizar acciones para que todo el grupo haga avances en la propuesta. La exposición a la CDA de la evaluación final, hizo que el grupo se dividiera entre los que veían factible la solución, tanto como los que consideraban que la evaluación exigía nuevos retos frente a la construcción. Mas se realizan algunos ajustes a ella y se lleva al aula, después de las recomendaciones del grupo.	Las diferentes representaciones matemáticas, que se evidencian en la planeación de las evaluaciones formativas, autoevaluaciones, coevaluaciones y a evaluación por pares, por el hecho de retroalimentaciones permanentes durante el proceso de construcción de saber, ya sea para avanzar o reforzar o exponer a los estudiantes a acciones propositivas frente a sus respuestas. La propuesta de evaluación sumativa, antes de ser sancionadora, es el resultado de utilizar diferentes técnicas de evaluación para hacer triangulación de la información, y así emitir juicios y valoraciones contextualizadas (parte social de la evaluación). La heteroevaluación permite analizar los alcances conceptuales y procedimentales, analizados por el docente y afinar la información final o valoración de todo el proceso.

TERCERA SESIÓN: MARZO 5 DE 2014 ACOMPAÑAMIENTO Y REGISTROS FÍLMICOS DE LA CLASE	Una vez finalizada la fase de planeación se procede al momento de la ejecución-observación en el aula de clases, donde, preferiblemente toda la CDA que apoyó el diseño, debe participar paralelamente en la observación, sin intervenir y registrando el desarrollo de la misma, con la finalidad de poder evaluar el impacto de la situación. En el aula, la docente presenta a los estudiantes las actividades planeadas, siguiendo de la manera más próxima posible el plan construido colaborativamente en la CDA. La docente está atenta a todas las posibles reacciones y respuestas de los estudiantes. Se presentan en el desarrollo de las actividades, algunas situaciones no previstas, en las cuales la docente cuenta con la habilidad para continuar con el curso de la clase, en la justa medida, sin desconocer estas nuevas intervenciones de los estudiantes, ni el objetivo de la clase. La secuenciación organizada en la planeación, es desarrollada detalladamente por la docente, quien hace acompañamientos muy cercanos a los procesos de acción, formulación y validación que los estudiantes proponen para la solución del problema. Frente a la institucionalización del saber matemático, referido a los múltiplos y divisores, se requirió de tiempo adicional al presupuestado en la planeación, debido a la exposición en inglés y la participación activa de los estudiantes. El uso de las tecnologías se convierte en la herramienta que le permite a la docente apoyarse en procesos de visualización para que los estudiantes puedan ver, decir, registrar y generalizar sobre patrones numéricos y proporcionalidad. El reconocimiento de la docente de toda una variedad de representaciones, que le permite proponer mejoras a los diseños de matemáticas en inglés para cuarto grado.	En el aula, la docente presenta a los estudiantes la situación planeada, siguiendo de la manera más próxima posible al plan construido colaborativamente con el equipo. Si bien en la etapa de planeación, ella presentó y tomó nota de todas las posibles reacciones y respuestas de los estudiantes, cuando uno de los estudiantes presentó un patrón numérico, que no se había contemplado en la planeación, pudo surgir con la situación no prevista, evidenciando habilidades para recocer cualquier representación matemática de patrones numéricos. Esa nueva representación la comparte con sus estudiantes y la resalta como un hallazgo valioso para la sistematización que se realizará de la situación problema.
CUARTA SESIÓN: MARZO 12 DE 2014 EVALUACIÓN Y SEGUIMIENTO DE LA PLANEACIÒN	Para la fase de evaluación, se realiza el análisis de las observaciones de clase en relación con las acciones de la docente que orientó. En este espacio se analizan las fortalezas y debilidades de la ejecución efectuada, se determina el impacto que se alcanzó sobre el desarrollo de los estudiantes y se establecen los aprendizajes didácticos, pedagógicos, disciplinares y metodológicos que los docentes de la CDA registraron en la observación para los siguientes ítems: alcance de los objetivos; plan de clase propuesto; metodología empleada para el desarrollo de la clase; interacciones profesor y estudiante; estudiante y estudiante; desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes, proceso de evaluación y aspectos generales. Por último, se hace un análisis detallado de cada una de los materiales entregados a los estudiantes, como mediadores en la solución de la situación.	Inicialmente la docente realiza su autoevaluación, y evidencia satisfacción por la meta alcanzada y por el cumplimiento de todo lo planeado con la CDA, organizada especialmente para este trabajo. Comenta cuáles fueron los inconvenientes así como las fortalezas y dificultades que observó. Inmediatamente se presentan los registros fílmicos realizados durante las sesiones de clases, y los compañeros de la CDA I registrarán en el "Observador de clases" a medida que se van presentando los videos. Las observaciones son rigurosas y pertinentes, en la medida que, desde el momento mismo de la planeación, se discutieron con el equipo de docentes cuál(es) es(son) el(los) foco(s) de observación, estableciendo mecanismos para registrarla en formatos que permitan realizar esta labor sin generar discusiones o reflexiones inútiles frente al propósito de formación. El análisis de las acciones realizadas por la docente para institucionalizar el saber permitió reflexionar sobre las fortalezas y debilidades de la planeación y su ejecución. Además del impacto que la situación tuvo en los estudiantes, los compañeros rescatan la acción como un aprendizaje desde lo didáctico, pedagógico, disciplinar y metodológico. (MEN, 2009 pág. 35).

Tabla 6. Rejillas de análisis Fase 2: Apreciaciones de la docente sobre S.D. y representaciones matemáticas

Subcategorías

1. Apreciaciones sobre Situaciones Didácticas
2. representaciones matemáticas sobre patrones numéricos y proporcionalidad

SUBCATEGORÍAS	PRIMERAS REPRESENTACIONES	FORMACIÓN DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS	NUEVAS REPRESENTACIONES	OBSERVACIONES
APRECIACIONES SOBRE SITUACIONES DIDÁCTICAS	La docente reconoce los elementos de una situación problema, requiriendo de exposición al diseño para diferenciarlos y aprovechar las ventajas en la acción. Identifica la importancia de los conocimientos previos de sus estudiantes, de una red conceptual del saber y el valor que tienen los contextos para el diseño de situaciones problema, ya sean de la misma matemática, de la vida cotidiana o de las otras ciencias.	La versatilidad que pueden alcanzar los conceptos y saberes matemáticos y cómo estos a su vez, puede ser aplicados en muchos otros ámbitos, solamente se pueden realizar a través del diseño de Situaciones Problemas, donde los participantes, ya sean estudiantes o docentes, tienen la oportunidad de construir y crear nuevos sistemas de representación frente a posibles soluciones de las situaciones presentadas.	La exposición a diseñar una situación problema, le permite a la docente realizar investigaciones de tipo didáctico, pedagógico, disciplinar, metodológico, entre otros, de tal manera que se asegure que el diseño es pertinente y cumple con los institucionalizados en el D.M.C.B.	Para la docente, el diseño de Situaciones problema se debe centrar en contextos cercanos a la realidad del estudiante, donde la acción, la validación, la formulación y la institucionalización del saber permitan acercamientos a las conceptualizaciones propias de la Matemática Escolar. Adicional, ella permite la búsqueda de diferentes estrategias, respuestas, relaciones, distintas formas de representación y formulación de conjeturas, a partir de las validaciones que presentan los estudiantes durante el desarrollo de la situación problema.
REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS SOBRE PATRONES NUMÉRICOS y PROPORCIONALIDAD	Frente a las primeras representaciones matemáticas de patrones numéricos, la docente evidencia linealidad en el sentido de completar una secuencia, cuando reconoce un patrón. No existen procesos de reversibilidad, donde, identificado el patrón se halla cualquier término. Las relaciones son netamente aditivas. Frente a la proporcionalidad, realiza comparaciones uno a uno, esto es, relaciona el objeto representado y su significado con una regla de tres simple.	La posibilidad de identificar al esquema multiplicativo, desde una relación cuaternaria, permite la significación de la variación, la dependencia, las magnitudes relacionadas, al mismo tiempo que la propiedad constante y de homogeneidad presenten en las relaciones de proporcionalidad directa simple.	La docente, una vez expuesta a rediseñar una situación problema referida a las representaciones matemáticas de patrones numéricos, siente la necesidad de investigar sobre la red conceptual que exige la situación, los referentes existentes en el D.M.C.B. y toda una serie de herramientas que le permiten modificar esas primeras representaciones.	La exposición de la docente a los sistemas de registros y representación institucionalizados en el D.M.C.B., le permiten asegurarse en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos, sin confundir el objeto con su representación.

Tabla 7. Rejillas de análisis Fase 2: Formación en el D.M.C.B.

Subcategorías
1. Concepciones sobre Situaciones Didácticas
2. Concepciones sobre representaciones matemáticas de patrones y proporcionalidad
3. Elementos de Formación de Maestros, institucionalizados en el D.M.C.B.

SUBC.	EXPOSICIONES A SITUACIONES DIDÁCTICAS	OBSERVACIONES
CONCEPCIONES SITUACIONES DIDÁCTICAS	La planeación de una situación dinamiza en procesos de formación de docentes, desde un referente académico y pedagógico, propiciando aprendizajes colaborativos para diseñar y construir mejores situaciones de clase. La actividad se convierte en una alternativa de capacitación para potenciar competencias pedagógicas, disciplinares e investigativas.	La concepción que tiene el D.M.C.B sobre las Situaciones Didácticas está basada en investigaciones de corte francés, específicamente de la línea de Guy Brouseeau, logrando desplegarlas desde momentos más cortos, donde las Situaciones Problema toman sentido al diseñar. Elementos de Trasposición Didáctica y el uso de recursos pedagógicos, juegan el papel de mediadores del conocimiento y son las herramientas con las que cuenta al momento de planear y diseñar las situaciones.
CONCEPCIONES REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS	El tratamiento de los patrones numéricos permite pensar contextos donde aparece la noción de proporcionalidad, emergiendo así la función como herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función como la proporcionalidad, integran el estudio y comprensión del razonamiento multiplicativo.	El tratamiento y diseño de situaciones, donde las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad son el centro de reflexión, permite que todo sujeto expuesto a este objeto matemático signifique las variables que intervinieron en la situación planteada y encuentre las relaciones existentes entre ellas, lo que a su vez da lugar a la observación de ciertas regularidades que generan el trabajo con diferentes patrones, logrando así un acercamiento a procesos de generalización.
ELEMENTOS DE FORMACIÓN DE MAESTROS EN EL D.M.C.B.	En el D.M.C.B se han institucionalizado los siguientes acompañamientos: el primero es el desarrollo de un programa de actualización a docentes nuevos, durante los primeros dos años de ejercicio, mediante el cual reciben atención, retroalimentación y orientación especial sobre los diseños institucionalizados y sistematizados. La segunda intervención pretende, a partir de acompañamientos en la planeación, identificar las necesidades de formación de los docentes y así ofrecer actualizaciones pertinentes, acordes con sus necesidades particulares. Finalmente, la intervención en el aula de clases, retomando elementos de didáctica y apoyando con sugerencias para maximizar el potencial de los docentes y aprovechar todas las estrategias que los estudiantes proponen, cuando están expuestos a la solución de Situaciones Didácticas.	Las situaciones referencias, establecidas y sistematizadas en el D.M.C.B., permiten a los docentes participantes de las propuestas de diseño, la puesta en acción de la situación, la validación, formulación e institucionalización, redireccionando sus representaciones matemáticas, no solamente por todo el bagaje de sistematizaciones que existen en el departamento y que están a disposición de toda la comunidad educativa, sino por la posibilidad de experimentar ya que a través de la acción, la formulación y la validación es como los sujetos institucionalizan el saber que se quiere desarrollar.

Fuente: La autora

Tabla 8. Rejillas de análisis Fase 2: Nuevas representaciones matemáticas

Subcategorías

1. Papel de las Situaciones Didácticas en el aula de clases
1. Papel de las representaciones matemáticas en el aula de clases

SUB CATEGO RÍAS	DISEÑOS DE LA DOCENTE BILINGÜE	-EVALUACIONES-CUADERNOS DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES
PAPEL DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL AULA DE CLASES	La organización, al momento de planear una situación, dinamiza procesos de formación de docentes inmersos en sistemas, donde los diseños de Situaciones Didácticas están institucionalizados. Las reflexiones son de corte académico y pedagógico, propiciando el aprendizaje colaborativo, para diseñar y construir mejores situaciones de clase. La actividad se convierte en una alternativa de capacitación para el docente, mediante la revisión y actualización permanente de sus competencias pedagógicas, disciplinares e investigativas, a partir de sus propias prácticas.	Se evidencia en el formato del preparador de clase la metodología centrada en Situaciones Problema. Adicional, la docente usa todos los formatos institucionalizados en el D.M.C.B. La información está centrada en los diferentes formatos, de tal manera que si se quiere reconstruir otra situación o se requiere hacer ajustes, para aumentar el nivel de complejidad, se puede retomar de otra situación y hacer las mejoras que la docente considere necesario. Se resalta la variedad de representaciones encontradas en las producciones de los estudiantes, donde se evidencia que tuvieron la oportunidad de descubrir y afianzar sus representaciones matemáticas.	La participación activa del docente en los diseños de situaciones problema, permite, además de actualizaciones en el área, identificar toda una red conceptual para diseñar situaciones de enseñanza, que alineadas con el reconocimiento de los saberes previos de los estudiantes, permitan desarrollar procesos de interactuación con los estudiantes, con un medio, en general con la situación, facilitándoles así la apropiación de conceptos, descubrir su organización interna para utilizarlos en la solución de diferentes problemas.
PAPEL DE LAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA DE CLASES	En el proceso de ejecución de una situación, se presenta a los estudiantes la situación planeada, siguiendo de la manera más próxima posible el plan concebido anteriormente. Para el caso específico de las representaciones de los patrones numéricos y la proporcionalidad, se consideran todas las posibles reacciones y respuestas de los estudiantes, así como el surgimiento de situaciones no previstas, en las cuales se debe contar con todas las posibles estrategias para continuar con la clase, en la justa medida, sin desconocer estas nuevas intervenciones de los estudiantes, ni el objetivo de ella.	Los referentes para el tratamiento de los patrones numéricos y la proporcionalidad, están centrados en investigaciones de Didáctica de la Matemática y en las realizadas en pregrados, maestrías y doctorados, de las diferentes facultades de Educación de Colombia y el mundo. El diseño de estas actividades matemáticas difiere de las presentadas en los textos escolares, por la secuencialidad que ellas realizan. El tratamiento de los textos es fragmentado y no permite las reflexiones que se potencian en las situaciones problema.	La posibilidad de que las representaciones matemáticas de patrones se reflexionen desde el pensamiento numérico, permite construir comprensivamente recursos de solución, encontrar regularidades e interpretaciones de procesos de generalización para usarlos con propiedad. La proporcionalidad se asume como un concepto altamente estructurante que, a partir del estudio de los procesos de variación y cambio, permiten conceptualizar aspectos relativos a lo numérico y a lo variacional.

4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La finalidad de este trabajo fue conocer las transformaciones de las representaciones matemáticas que la docente bilingüe se apropió y/o construyó sobre patrones numéricos y proporcionalidad, y cómo ellas se concretan en procesos de diseño de situaciones problema referidas desde las Situaciones Didácticas. Para esta aproximación a las representaciones de la docente, concebidas como un componente importante de la formación matemática y didáctica, se han tenido en cuenta las relaciones de éstas con los elementos teóricos, con las actividades o prácticas de la docente y con los distintos contextos curriculares en que enmarcan todo proceso de formación de profesores.

Mediante técnicas e instrumentos de recolección y análisis de información, se hizó un análisis exploratorio y descriptivo (León & Montero, 2003) analizando no solamente las trasformaciones de las representaciones matemáticas en las sesiones de trabajo de formación, sino en el momento de diseñar una situación para el aula de clases, referida al tratamiento de patrones numéricos y proporcionalidad.

Por esta razón, se decidió por el estudio de caso único ya que facilita la identificación de las transformaciones de las representaciones matemáticas de la docente bilingüe. El estudio se extendió por más de medio año y, para profundizar en el análisis de la información se tuvo fácil acceso a las actividades de formación docente, que en el D.M.C.B. se han institucionalizado para fortalecer permanentemente su propuesta de valor.

Frente a la organización y los resultados de la investigación (véase Rejillas de Análisis 1 y 2 págs. 54 a 65), se muestran las tendencias encontradas en el estudio al relacionar el correspondiente análisis de la primera y segunda etapa (análisis de categorías, subcategorías; las primeras representaciones matemáticas, documentos institucionales y nuevas representaciones). Se construyó la tercera rejilla (Tabla 9, págs. 67 a 69) para definir la última fase de estudio en la cual se muestran las nociones conceptuales y/o tendencias encontradas al hacer la intersección de los elementos de cada subcategoría para luego relacionar y analizar éstas con la respectiva categoría de análisis.

En la misma línea se describen las tendencias de las categorías que interaccionan con el propósito de estudio del Trabajo de Grado *desde la transformación de las representaciones matemáticas de una docente bilingüe sobre patrones numéricos y proporcionalidad,* y su *concreción en procesos de diseño de situaciones problema, referidas desde las Situaciones Didácticas.*

Igualmente, para la segunda categoría, se analizan tanto las representaciones matemáticas como las situaciones didácticas y el tratamiento que se les da en la formación de docentes en el D.M.C.B.

Finalmente, se observa que al relacionar las nuevas representaciones matemáticas, cuando la docente bilingüe diseña una situación problema, para el tratamiento de los múltiplos y divisores de cuarto grado, que las representaciones matemáticas de los patrones numéricos y la proporcionalidad juegan un papel relevante al momento de conceptualizar el objeto matemático.

Tabla 9. Tendencias encontradas al relacionar las categorías y subcategorías de análisis.

CATG	SUBCATEGORÍAS		OBSERVACIONES
	APRECIACIONES SOBRE SITUACIONES DIDÁCTICAS	REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS SOBRE PATRONES NUMÉRICOS y PROPORCIONALIDAD	
IDENTIFICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES PREVIAS	La docente reconoce los elementos de una situación problema, requiriendo de exposición al diseño para diferenciarlos y aprovechar las ventajas en la acción. Reconoce la importancia de los conocimientos previos de sus estudiantes, la identificación de una red conceptual y la valía que tienen los contextos para el diseño de situaciones problema, ya sean de las matemáticas, de la vida cotidiana o de las otras ciencias.	Frente a las primeras representaciones matemáticas de patrones numéricos, la docente evidencia linealidad en el sentido de completar una secuencia, cuando reconoce un patrón. No existen procesos de reversibilidad, donde, identificado el patrón, se halla cualquier término. Las relaciones son netamente aditivas. Frente a la proporcionalidad, realiza comparaciones uno a uno, esto es, relaciona el objeto representado y su significado con una regla de tres simple.	Aunque la docente identifica algunos elementos de diseño de situaciones y relaciona los objetos matemáticos con las nuevas representaciones, se requiere de exposiciones al uso de elementos didácticos, para establecer verdaderas relaciones e identificar las estructuras que posee cada una de ellas.
FORMACIÓN D.M.C.B.	CONCEPCIONES SOBRE REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS DE Y S.D.	ELEMENTOS DE FORMACIÓN DE MAESTROS INSTITUCIONALIZADOS EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	OBSERVACIONES
	El tratamiento y diseño de situaciones donde las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad son el centro de reflexión, permite que todo sujeto expuesto a este objeto matemático, signifique las variables que intervinieron en la situación planteada y encuentre las relaciones existentes entre ellas, dando lugar a la observación de ciertas regularidades que generan el trabajo con diferentes patrones, desde la variación.	Las situaciones sistematizadas en el D.M.C.B., permiten a la docente participar de las propuestas de diseño, la puesta en acción de la situación, la validación, formulación e institucionalización, redireccionando sus representaciones matemáticas, no solamente por todo el bagaje se sistematizaciones que existen en el departamento y que están a disposición de toda la comunidad educativa, sino por la posibilidad de experimentar, a través de la acción, la formulación y la validación.	Los procesos de sistematización que se vienen organizando en el D.M.C.B. corresponden a principios de la Educación Matemática, sustentado desde el diseño de situaciones problema, donde a través de la contextualización de los procesos del aula se busca la creación de ambientes de trabajo perceptibles a los estudiantes y que por tanto, la conceptualización que de ellos se derive, les sean significativos.

	PAPEL DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL AULA DE CLASES	PAPEL DE LAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA DE CLASES	OBSERVACIONES
NUEVAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS	La participación activa de la docente en el rediseños de situaciones problema permitió, además de actualizaciones en el área, identificar toda una red conceptual para diseñar otras situaciones de enseñanza, que alineadas con el reconocimiento de los saberes previos de los estudiantes, favorece procesos de interactuación entre ellos, con un medio, en general con la situación, permitiéndoles así la apropiación de conceptos, descubriendo su organización interna para utilizarlos en la solución de diferentes problemas.	La posibilidad de que las representaciones matemáticas de patrones se reflexionen desde el pensamiento numérico, permite construir comprensivamente recursos de solución, encontrar regularidades, interpretaciones de procesos de generalización para usarlos con propiedad. La proporcionalidad se asume como un concepto altamente estructurante que, a partir del estudio de los procesos de variación y cambio, permiten conceptualizar aspectos relativos a lo numérico y a lo variacional.	La exposición de la docente a procesos de rediseño de una situación problema y el análisis de las acciones realizadas para institucionalizar el saber, le permitió reflexionar sobre las fortalezas y debilidades de la planeación su ejecución y la evaluación del impacto que la situación tuvo sobre los estudiantes. Reto que le permitió investigaciones de corte didáctico, pedagógico, disciplinar y metodológico.

4.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS REFERIDOS A LAS TRES CATEGORIAS

4.1.1 Identificación de las representaciones previas

Después de realizadas las indagaciones a docentes bilingües sobre situaciones didácticas y las representaciones matemáticas de patrones numéricos y proporcionalidad, se observa, para el caso de estudio y seleccionada una docente bilingüe, que aunque identifica algunos elementos de diseño de situaciones y relaciona los objetos matemáticos con las nuevas representaciones (véase Tabla 9. Págs. 67 a 68), evidencia la necesidad de un acompañamiento frente al uso de elementos didácticos para establecer verdaderas relaciones e identificar las estructuras que posee cada una de ellas.

Por ejemplo, con respecto a la tendencia de la rejilla 1, frente a los símbolos que la docente usa para representar un objeto matemático, como es el caso de la identificación de patrones numéricos, se puede afirmar que éstos corresponden a "*toda expresión representada con los signos, notaciones figuras y expresiones usuales de las matemáticas, forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos"* Castro & Castro (1997). En la rejilla 2 (Págs. 56 a 60), se describe, cómo a través de registros espontáneos, la docente trata de responder a tareas de representación, incluyendo todo un sistemade los *gráficos* cuando se trata de comunicar una idea. Los autores sostienen que "*cuando se razona o se comunican reflexiones propias, usualmente no se presentan los objetos o conceptos sobre lo que se trate, sino que se sirve de expresiones, dibujos o símbolos que la representan"*. Cuando la docente representaba linealmente una solución, esto es, sin reflexiones inversas, estaba representando informaciones que existían internamente en su sistema de representaciones y que requerían de motivaciones o exposiciones para identificar otras equivalentes pero de diferente forma.

En cuanto a nociones didácticas referidas desde las Situaciones Didácticas, (véase rejilla 2 págs. 56-60), la docente *no expresa* una definición exacta de éstas, pero propone que todo proceso de diseño debe centrarse en que el estudiante sea capaz de construir su conocimiento a partir de sus propias experiencias, de sus interacciones con el entorno acercándose a los planteamientos de Brousseeau (1997).

Frente a las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización del saber, se observa desde la planeación hasta las producciones escritas de sus estudiantes, la importancia del apoyo de diferentes estrategias de solución desde la lúdica; desde el reconocimiento de su estado natural (sin uso pedagógico), sus posibilidades de uso (establecimiento de reglas de juego sobre el material) y alcances en investigaciones realizadas sobre él, para más tarde sistematizar las estrategias que el instrumento potencia en los estudiantes.

Desde esta perspectiva, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no representan procesos independientes, donde todo docente requiere del empleo de una serie de recursos metodológicos, iniciando con acciones motivadoras para presentar las temáticas, enfocándose en situaciones de juegos y con el uso de recursos manipulables como mecanismos de aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante.

En cuanto a las representaciones matemáticas la docente enfatiza en la importancia de reconocer con antelación, la variedad de representaciones que el estudiante haya construido anteriormente, para hacer acompañamientos exitosos a la variedad de representaciones que ellos poseen. De igual forma, el reconocimiento de las estrategias metodológicas determinadas para la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático, deben estar planteadas desde el currículo, por ende, su uso y aplicabilidad están prescritos desde un plan de aula, que contribuye a la comprensión del saber y su desarrollo. Para el caso del estudio, las reflexiones se centraron en el tratamiento de los patrones numéricos y la proporcionalidad, saberes referidos a una estructura de pensamiento multiplicativo y desde la variación (Obando 2012).

4.1.2 Formación en el Departamento de Matemáticas del Colegio Bennett

Las concepciones que se tienen desde el D.M.C.B. sobre situaciones didácticas y representaciones matemáticas de patrones y proporcionalidad, para este caso específico del Trabajo de Grado, corresponden a principios de la Educación Matemática, referidos desde las concepciones de Guy Brousseau y la Teoría de las Situaciones Didácticas para orientar diferentes propuestas, sustentado desde la base que ya existe todo un camino recorrido desde el diseño de situaciones problema, donde a través de la contextualización de los procesos del aula se busca la creación de ambientes de trabajo perceptibles a los estudiantes, y que por tanto, las conceptualizaciones que de ellos se deriven les sean significativas.

En este sentido, el reconocimiento de elementos de formación de docentes, se relaciona con las características específicas del saber matemático, allí los conceptos, los procedimientos de desarrollo, los sistemas de representaciones concretas y simbólicas y la validación de nuevas concepciones matemáticas, son el centro de reflexión en la formación y acompañamiento a los docentes, especialmente bilingües. Igualmente, por tratarse de objetos matemáticos presentes en el currículo, cuya estructura está basada en competencias, la reorganización es continua, desde el rediseñar situaciones del área, en otras oportunidades, hasta las mismas concepciones matemáticas. Por ejemplo, cuando una representación diferente a la existente, aporta al significado conceptual y facilita el proceso de aprendizaje, ingresa al currículo como producto de indagaciones e investigaciones didácticas y disciplinares.

Las concepciones anteriores son resultado de reflexiones continuas sobre las relaciones entre teoría y práctica, desde la Didáctica de la Matemáticas, específicamente las que corresponden a las Situaciones Didácticas, lo que permite esta clase de investigaciones. Es por ello que cuando la docente se expone en la encuesta a estas concepciones y en las intervenciones que realiza durante el proceso de formación, se plantea continuamente las relaciones de los contextos, además de los conocimientos y los procesos (véase rejilla de análisis 3). Esta relación, existente en todo diseño, hace que las situaciones sean significativas para los estudiantes, donde la actividad matemática permite acercar los conceptos que se les querían enseñar. "*En este sentido, no se trata de aprender matemáticas para luego buscar la posibilidad de aplicarlas a la solución de problemas aislados, sino de aprender las matemáticas a través de la actividad (matemática) del estudiante en proceso de interactuar con un conjunto de situaciones*" (Colegio Bennett, 2011).

Esta vía de trabajo favorece una visión del conocimiento matemático como un proceso globalizador, que admite pluralidad de procedimientos, conllevando a diversidad de representaciones, que permanentemente se transforman, que se adaptan a las nuevas situaciones y a los diferentes contextos, favoreciendo el establecimiento de relaciones, asociaciones, inducciones, deducciones y generalizaciones (Mason, 1985). Relaciones potentes de las matemáticas que propician niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático, como elementos indispensables en la construcción de conceptos.

Es por ello que las situaciones problema son vistas como un recurso pedagógico en constante cambio, por medio del cual el docente se involucra y apropia de todos los elementos necesarios (desde la planeación, la ejecución, la sistematización, entre otros), en las que se reconoce que el uso de los recursos pedagógicos en el aula no es una simple repetición, sino que exige el reconocimiento de procesos de transposición que adaptan y transforman los recursos a las nuevas condiciones. Lo anterior, como producto de reflexiones sobre las prácticas de aula, las nuevas estrategias usadas por los estudiantes al momento de solucionar los problemas, esto es, a través de procesos de sistematización y divulgación de los hallazgos a las comunidades de aprendizaje.

4.1.3 Nuevas representaciones matemáticas

La exposición de la docente a procesos de rediseño de una situación problema y el análisis de las acciones realizadas para institucionalizar el saber, le permitió reflexionar sobre las fortalezas y debilidades de la planeación, la ejecución y la evaluación del impacto que la situación tuvo sobre los estudiantes. Reto que le dio curso a investigaciones de corte didáctico, pedagógico, disciplinar y metodológico.

Desde esta perspectiva, las representaciones que todo docente posee frente a un saber institucionalizado, en lo posible debe ser el resultado, no solamente desde unas posiciones teóricas, sino que deben provenir de un saber construido a través de la experiencia y las continuas reflexiones sobre ellas -sistematización-, para promover que el docente revalúe permanentemente sus prácticas (praxis locales), que deben estar acordes con los contextos, los momentos cognitivos de sus estudiantes, los recursos pedagógicos que disponga y, lo más importante, que facite compartir todo hallazgo en comunidades de aprendizaje. Esto es, aportando a una praxis, evidenciando que la didáctica es una disciplina reconstructiva de la práctica, donde el reconstruir lo que ha pasado con la enseñanza (práctica), sus fracasos, posibles causas y posibles alternativas de cambio, deben ser motivo de permanente reflexión y teorización sobre la didáctica.

Por tanto, desde esta perspectiva didáctica, los elementos presentados anteriormente deben convertirse en una reflexión sistemática y disciplinada acerca del problema de cómo enseñar, cómo aprenden los niños y jóvenes; del por qué se tienen tantos fracasos al tratar de que aprendan lo que se les enseña. De ahí la importancia del reconocimiento de las representaciones matemáticas del docente, al momento de diseñar situaciones didácticas para sus estudiantes. Según el Dr. Carlos Eduardo Vasco (Conferencia ICESI, 2013), las representaciones que posee el docente le permiten cualificar la validez del intento de solución (exitosa o no), para valorar en lo posible todos los intentos de solución de los estudiantes, ya que los hallazgos realizados por ellos desde su autonomía y libertad, se deben valorar de manera sobresaliente, teniendo en cuenta el intento de sintetizar lo que han aprendido y el de armar un modelo mental desde una teoría propia, que puede no ser muy potente, pero aproximada a una solución. Para el docente, esta acción debe ser motivo de investigación, partiendo de las representaciones que ella posee, para promover la formulación de intervenciones en este sentido y generar experiencias inspiradoras.

5 CONCLUSIONES

5.1 Conclusiones generales

En el presente capítulo se encuentran las conclusiones del Trabajo de Grado, producto de las reflexiones obtenidas a partir del análisis de la información recolectada, teniendo como referencia guía, el problema, las preguntas y los objetivos del Proyecto. De igual forma, se revelan algunas propuestas que pueden servir de base para estudios posteriores, en estrecha relación con los resultados generales y los enfoques teóricos y metodológicos en que se basó el Trabajo de Grado.

Como reflexión general, en calidad de formadora de docentes y educadora matemática de básica primaria, considero que la experiencia ha sido muy enriquecedora, ya que el trabajo permite aproximarse, desde una perspectiva indagadora, al problema que se tiene con la desarticulación entre *Teoría, Discurso y Práctica*, uno de los principales campos problemáticos de la Didáctica de las Matemáticas, al cual todo docente está expuesto desde su formación inicial, en cualquiera de los programas de pedagogía existentes, y que requiere ser afinado para obtener mayor coherencia en sus acciones pedagógicas.

Desde esta perspectiva, identificar las Situaciones Didácticas, como se evidencia en las observaciones de la rejilla de análisis 3 (págs. 61 a 62), favorece la motivación hacia la investigación y la acción por parte del docente; estableciendo unos referentes sólidos, frente a marcos teóricos que sustentan la práctica, permitiéndole consolidar un discurso o establecer nuevas teorizaciones desde la Didáctica de la Matemática.

Igualmente, se observa que el proceso de identificación de Situaciones Didácticas fomenta el pensamiento creativo, la posibilidad de generar ideas propias, la flexibilidad y la originalidad en los estudiantes, atendiendo a las diferencias individuales y promoviendo competencias ciudadanas como la solidaridad, el conocimiento de sí mismo, de los otros y del contexto. Este hecho apoya la formulación de competencias desde el *saber ser* tan anheladas en todo currículo del área de matemáticas, porque cabe anotar que en las propuestas de los Estándares de Competencias (MEN, 2006), los referentes en este aspecto están dados desde el *saber hacer y el saber conocer.*

5.2 Conclusiones referidas a los objetivos

Las reflexiones y conclusiones del Trabajo de Grado se centran específicamente en el problema objeto de estudio y más concretamente en los objetivos específicos (O.1 al O.3, véase página 14) de la siguiente manera:

5.2.1 Conclusiones y reflexiones referidas al Objetivo O1

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y presentados en la Tabla 9 (ver págs. 67 y 68), la principal conclusión se presenta desde una perspectiva didáctica, donde el problema de cómo enseñar, cómo aprenden los niños y los jóvenes; del por qué se tienen tantos fracasos al tratar de que aprendan lo que se les enseña, pueden encontrar un indicio de respuesta cuando se indaga sobre las representaciones del docente, al momento de diseñar situaciones didácticas para sus estudiantes.

En primera instancia se puede concluir que la docente en el desarrollo de su práctica en el aula experimenta la necesidad de conocer otras representaciones del objeto matemático (véase rejilla análisis 2, pág. 56 a 60). Se infiere esto, porque probablemente en las inducciones recibidas ha conocido sobre los alcances de los estudiantes y las estrategias que ellos han desarrollado a lo largo de su trayectoria escolar. Esto muestra que la experiencia de un docente influye notablemente en sus concepciones y prácticas de enseñanza, puesto que las representaciones matemáticas que posee, requieren ajustarse a los procesos actuales, o definitivamente deben transformarse y así interactuar con las representaciones que los estudiantes han construido en los años escolares anteriores y de esta manera hacer acompañamientos exitosos.

Las primeras concepciones de la docente sobre las representaciones matemáticas, después de estar expuesta al proceso de formación (véase rejillas análisis 3, págs. 61-62), evidencian su transformación, cuando se ve expuesta a divulgar la planeación que ejecutará con los estudiantes de cuarto grado, rediseñando una situación referida al tratamiento de patrones numéricos y proporcionalidad. Este cambio se analiza comparando las producciones escritas de las primeras planeaciones y las que socializó, al final del proceso de investigación, con la CDA.

De lo anterior, y como resultado de las observaciones realizadas en el estudio, se concluye que las nuevas representaciones que la docente construye frente al saber institucionalizado son más efectivas en cuanto no son solamente el resultado de unas posiciones teóricas claras, sino que se complementan con el saber construido a través de la experiencia y las constantes reflexiones sobre ellas –haciendo uso de una continua sistematización-, donde revalúa permanentemente sus prácticas (praxis locales), enmarcados en unos contextos, en los momentos cognitivos de sus estudiantes, en los recursos pedagógicos de que dispone y, lo más importante, compartiendo todo hallazgo en comunidades de aprendizaje.

5.2.2 Conclusiones y reflexiones referidas al Objetivo O2

Con respecto al O2, las observaciones permiten reconocer las actividades institucionalizadas en el D.M.C.B. para formar docentes en matemáticas escolares, especialmente desde el propósito central de realizar acompañamientos pedagógicos, acordes con las necesidades individuales de los docentes participantes en él.

Frente a los referentes y/o concepciones que se evidencian con respecto al tratamiento de las situaciones didácticas, se concluye que además de estar sustentado teóricamente desde los lineamientos de Guy Brouseeau (1997), encuentra soporte en otros investigadores, donde se evidencia una metodología activa, centrada en la acción, la formulación, la validación y la institucionalización del saber matemático, permitiéndole la sistematización permanente de sus prácticas de aula, para divulgarlas especialmente en procesos de formación de docentes de básica primaria, y/o para que los docentes de secundaria puedan continuar con el proceso construido.

Lo anterior lleva a concluir que los docentes formados en el D.M.C.B, adquieren una postura reflexiva y definida frente a las propuestas del área, que les permite relacionar elementos teóricos y prácticos, por lo cual terminan permeados por el modelo institucionalizado.

Las revisiones relacionadas con las categorías de análisis suponen promover acciones para continuar ampliando y mejorando las experiencias de formación, a través de prácticas investigativas como la realizada en el Trabajo de Grado, reflexionando para este caso desde el campo de la Educación Matemática.

5.2.3 Conclusiones y reflexiones referidas al Objetivo O3

El enfoque cualitativo basado en la metodología de estudio de un caso único, permitió hacer reflexiones sistemáticas y fundamentadas sobre las concepciones y prácticas aplicadas en la formación de un docente bilingüe hacia la educación matemática, acompañándolo permanentemente en su práctica, atendiendo a las necesidades didácticas y tomando como punto de referencia los fundamentos conceptuales y metodológicos organizados en el D.M.C.B., para formar maestros bilingües.

Finalmente se puede decir que el Trabajo de Grado permitió abordar desde un punto de vista práctico, el clásico problema en el campo de la Formación de docentes de Educación Matemáticas, especialmente de Básica Primaria y desde la Didáctica de las Matemáticas.

Todo esto a pesar que se reitera desde distintas propuestas curriculares (PISA, MEN) y desde múltiples estudios y desarrollos en Didáctica de las Matemáticas (Guy Brousseau 1998, Vergnaud 1991, Castro & Castro 1985, entre otros) que la actividad matemática se concreta en un alto porcentaje en el diseño de situaciones, impactando no solamente los desarrollos de una clase sino también a nivel curricular.

Desde esta perspectiva, los currículos flexibles cobran importancia cuando superan la fragmentación, en cuanto a concepciones, formas de organización y procedimientos, articulando diferentes saberes, referidos desde coherencias horizontales y verticales, esto es, organizaciones curriculares centradas en situaciones didácticas (MEN 2006). Por tanto la variedad de representaciones matemáticas que los docentes posean sobre un saber, permitirá mejorar sus prácticas pedagógicas.

BIBLIOGRAFÍA

Arce, J., Castrillón, G., & Obando, G. (1998). *Documentos de trabajo Ingeniería Didáctica*. Cali: Universidad del Valle.

Bedoya, E. (2008). *Formación de Profesores de Matemáticas: conocimiento y análisis didáctico. Área de Educación Matemática*. Instituto de Educación y Pedagogía. Cali: Universidad del Valle. Sin publicar.

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970 - 1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Edits.) Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1999). *Educación y Didáctica de las Matemáticas*. Revista de Educación Matemática.

Brousseau, G. (Junio de 2011). *La théorie des situations didactiques*. Recuperado el 30 de Noviembre de 2013, de Guy Brousseau: Didactique des mathématiques: http://guy-brousseau.com

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, G. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. http://guy-brousseau.com

Castro, E. y Castro, E. (1997). *Capítulo IV: Representaciones y modelización*. Publicado en L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Colegio Bennett. (Junio de 2011). *Plan de Área Matemáticas*. Cali, Valle del Cauca, Colombia.

De Zubiría, J., & De Zubiría, J. (2013). *Evaluación por Competencias*. Obtenido de http://www.todosaaprender/pedagogiadialogante

García, E. (1994). *Investigación etnográfica. Problemas y métodos de investigación en educación*. Madrid. Rialp.

Gómez, Pedro (2014). *Informe Compartir “Tras la Excelencia Docente. Cómo Mejorar la Calidad de la Educación para Todos los Colombianos”*. www.todosaaprender/pedagogiadialogante. Obtenido de ww.mineducacion.gov.co.

Grupo L.A.C.E. HUM 109. (1999). *Laboratorio para el Análisis del Cambio Educativo.* Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Cádiz. Obtenido de: *www2.uca.es/lace/documentos/EC.pdf*

León, O.; Montero, I. (2003). *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* (3 Ed.). Madrid: Mc Graw Hill. Interamericana de España, S.A.U.

Lincoln, Y.; Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage publications.

Mason, J. H., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Rutas hacia el álgebra. Raíces del algebra*. (C. Aguelo, Trad.) Tunja, Colombia: UPTC.

MEN. (1995). *Ley General de Educación*. Santafé de Bogotá. Empresa Editorial Universidad Nacional.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2009). *Documento de las MEC*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2009). *Fundamentaciones y orientaciones para el implemento del Decreto 1290 de 2009*. *Evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes en los niveles de educación básica y media.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Múnera, J. J. (2001). *Las Situaciones Problema como fuente de sistematización*. En Cuadernos Pedagógicos N° 16 Agosto. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación.

Obando, G. y Múnera, J. J. (2003). *Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática*. En: Revista educación y pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35.

Obando, G., Vanegas, M. D., & Vásquez, N. L. (2006). *Módulo 1: Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Obando, G., Vanegas, M. D., & Vásquez, N. L. (2006). *Módulo 6: Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Obando, G. (2008). *Resumen recursos pedagógicos. Borrador de trabajo preparado como documento de trabajo para el área de matemáticas del Colegio Bennett*. Cali.

Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, L. (2014). *Enseñanza y Aprendizaje de la Razón, la Proporción y la Proporcionalidad: un estado del arte*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17 (1): 59-81.

Panizza, M. (2003). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en didáctica de las matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Rivera, E., & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos*. Cali, Valle del *Cauca.*

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E*. (1996). Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Ediciones Aljibe.

Sanabria, F. & Cortés J. (2012). *Concepciones y Creencias de Profesores de Matemáticas sobre la Resolución de Problemas, un Estudio de Casos 2012.* Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos (2 ed.).* Madrid: Morata S.L.

Vergnaud, G. (1991). *El Niño, las Matemáticas y la Realidad: Problemas de la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria.* Ciudad de México: Editorial Trillas.

ANEXO A
(Informativo)

ENCUESTA DIAGNÓSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ACTUALIZACIÓN Y CAPACITACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BÁSICA PRIMARIA
2013-2014

Con la presente encuesta diagnostica se quiere tener en cuenta los conocimientos que poseen nuestros profesores acerca de los temas a tratar en la primera actualización, que tendremos este año lectivo.

Esta información es importante para centrar nuestras reflexiones en los conocimientos base que poseen los maestros y así poder aprovechar el tiempo de esta primera sesión. De igual manera para fortalecer nuestro plan de trabajo anual en el área de matemáticas. No se harán juicios ni se tomará algún puntaje de calificación.

De las siguientes afirmaciones seleccione la opción más acorde al enunciado principal

EDP1 Las situaciones problema principalmente deben tener en cuenta:

A. Los conocimientos previos.
B. Contextos definidos.
C. Un problema de la vida cotidiana.
D. Los conocimientos del año siguiente

EDP2 Cuál de las siguientes opciones se considera un patrón:

A. 21, 24, 27, 30, 35
B. 65, 77, 90, 104, 119
C. 71, 79, 87, 95, 103
D. Todas las anteriores

EDP3 Las situaciones problema poseen las siguientes fases de trabajo:

A. Análisis previo, exploración, aplicación, mejoramiento.
B. Exploración, análisis previo, mejoramiento, aplicación.
C. Diseño, aplicación, exploración, validación.
D. Indagación, diseño, validación, aplicación.

EDP4 La proporcionalidad puedo aplicarla en el siguiente contexto:

A. Contexto numérico
B. Contexto social (banco, negocio)
C. Contexto métrico
D. Todas las anteriores

EDP5 Una situación problema se aplica en qué periodo de tiempo generalmente:

A. Una semana
B. Dependiendo de la complejidad de la situación problema
C. Un mes
D. Un periodo

EDP6 Los patrones son definidos por:

A. Valores constantes de cambio.
B. Un valor de cambio constante.
C. Valores que se establecen en un mismo conjunto de características.
D. Ninguna de las anteriores

EDP7 Frente al diseño de una situación problema, el responsable de ella es:

A. El estudiante
B. El maestro
C. El rector
D. El jefe de área

EDP8 En la fase de experimentación de una situación problema, el maestro debe:

A. Participar activamente con los estudiantes en la solución
B. Generar conflicto cognitivo frente a las preguntas de los estudiantes.
C. Mantenerse distante de la fase en todo momento.
D. Plantear desde un principio los conocimientos a los cuales el estudiante debe aplicar.

EDP9 En la fase de validación, el maestro debe:

A. Tomar como respuesta acertada, aquella que un estudiante en particular presenta
B. No tomar ninguna respuesta de los estudiantes como acertada
C. Toma en cuenta todas las respuestas de los estudiantes y junto a ellos escoge la más acertada.
D. Solo toma como respuesta acertada aquella que él da al final de la sesión.

EDP10 Qué es una situación problema:

A. Una situación de la vida cotidiana planteada en el aula de clases, que dan cuenta de un currículo.
B. Un concepto definido por el Ministerio de Educación aplicado en un contexto especifico.
C. Un problema planteado por el docente que puede ser aplicado a un concepto especifico del currículo en el aula de clases.
D. Una relación entre los saberes descritos en un currículo y las prácticas reflexivas del maestro experimentado.

ANEXO B
(Informativo)

SITUACIONES PROBLEMA INSTITUCIONALIZADAS EN EL D.M.C.B.

GRADO	*SITUACIONES PROBLEMA*	*ANALISIS PREVIOS*	DISEÑOS	EXPER.	LEVANTAMIENTO DE MEMORIAS	*PLAN DE ACTIVIDAD SISTEMATIZACIÓN*
INICIACIÓN	3	✓	✓	✓	×	LA CONQUISTA DEL ESPACIO I
PÁRVULOS	3	✓	✓	✓	×	LA RECETA
PREJARDÍN	3	✓	✓	✓	×	✓ DISEÑO DE COLLARES
TRANCISIÓN MATH	4	✓	✓	✓	×	✓ JUGUEMOS CON LOS TANGRAMS
TRANCISIÓN MATS	4	✓	✓	✓	×	✓ JUEGOS TRADICIONALES
NURSERY MATH	4	✓	✓	✓	×	×
NURSERY MATS	4	✓	✓	✓	×	✓ LA CONQUISTA DEL ESPACIO II
PREPARATORIO	8	✓	✓	✓	✓	✓JUEGOS DE COMPOSICIÓN
PRIMERO	8	✓	✓	✓	✓	✓ JUEGOS DE COMPARACIÓN
SEGUNDO MATH	4	✓	✓	✓	✓	✓ LA CANASTA ADITIVA
SEGUNDO MATCS	4	✓	✓	✓	✓	✓ ASTUCIA NAVAL
TERCERO MATH	4	✓	✓	✓	✓	✓ LA CANASTA MULTIPLICATIVA
TERCERO MATCAS	4	✓	✓	✓	✓	✓ TECNICAS EGIPCIAS DE MULTIPLICAR
CUARTO MATH	4	✓	✓	✓	✓	✓LA TIRA DE PAPEL
CUARTO MATCAS	4	✓	✓	✓	✓	✓ JUEGO DE LAS EQUIVALENCIAS
QUINTO MATH	4	✓	✓	✓	✓	✓EL MUNDO DE LAS MEDIDAS
QUINTO MATCAS	4	✓	✓	✓	✓	✓CONSTRUCCIONES CON DECIMALES
SEXTO	4	✓	×	×	×	×
SÉPTIMO	4	✓	×	×	×	×
OCTAVO	4	✓	×	×	×	×
NOVENO	4	✓	×	×	×	×
DÉCIMO	4	✓	×	×	×	×
ONCE	4	✓	×	×	×	×

ANEXO C
(Informativo)

PLANEACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA EN EL D.M.C.B.

PLAN DE AULA DE MATEMÁTICAS EN INGLÉS | ANÁLISIS A-PRIORI | 4° GRADO | 2013-2014

PERIODOS ESCOLARES	P R I M E R O	S E G U N D O	T E R C E R O	C U A R T O
NOMBRE DE LA SITUACIÓN PROBLEMA	**REPRESENTACION DEL NUMERO**	**BOLOS – PALITOS CHINOS**	**LA TIRA DE PAPEL**	**MODELANDO PROBLEMAS MATEMATICOS**
DESARROLLO DEL PENSAMIENTO	Numérico	Numérico – Espacial	Numérico	Numérico - Espacial
PROPÓSITO Identificada la red conceptual propuesta desde el currículo, elaborar un objetivo verificable	Significar y usar los polinomios aritméticos en diferentes representaciones.	Usar los algoritmos multiplicativos para la resolución de problemas.	Significación de múltiplos y factores (el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor).	Resolver problemas multiplicativos usando el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.
CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO **CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS** **PRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN** Una breve descripción de la ACCIÓN que deberá realizar el estudiante, donde el uso de sus conocimientos previos o espontáneos le permita acercarse a respuestas del problema y a nuevos conocimientos **No. SEMANAS EN SECUENCIACIÓN CONTENIDOS**	En este periodo, se retoman todas las representaciones numéricas trabajadas y adicionalmente se construyen los polinomios y sus representaciones, mediante material concreto (Ábaco y amarrados). Como conocimientos previos, se utilizan las estructuras aditivas, y las estructuras multiplicativas. En estas últimas, se presentan varios métodos para dividir (División formal,	Para el juego de bolos, se tienen 10 pinos de diferentes colores y puntajes. Los estudiantes juegan por parejas y compiten con los demás compañeros. Cada jugador tiene 3 turnos y gana el que derribe más pinos. Los puntajes de acuerdo a los colores, serán registrados en una tabla, donde se hallara el total. Como parte de la situación, cada estudiante deberá justificar la operación que realizó para encontrar el total (multiplicación). Como variante de esta situación se plantean problemas particulares, en los que debe completar tablas de registro, según los parámetros dados.	En esta situación los estudiantes deben organizarse por grupos, cada uno cuenta con una tira de papel que contiene los números del 1 al 200 separados a una misma distancia, un dado y lápices de colores específicos. Si en el dado cae el número dos, se colorea de amarillo los números que pueden ser divididos por dos, si cae tres, los que pueden ser divididos por tres, y así sucesivamente, con colores diferentes hasta el siete. La intención es que la combinación de colores, permita que el estudiante pueda visualizar las características de los múltiplos y divisores, y que además identifique que existen	En este periodo se significa el uso del Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor, mediante el planteamiento de diversos problemas que requieren de la modelación, a través de representaciones gráficas, lo que promueve representar la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible, en la medida que permite volver cercano y concreto el concepto para su apropiación y manejo. La idea es que los estudiantes identifiquen como resolver problemas que involucran Mínimo Común Múltiplo, y cómo se da la respuesta en lengua natural.

	división americana, división croata, división Británica).	En la situación de los palitos chinos, el trabajo es similar a la anterior. Los palitos son de distintos colores y cada color tiene un puntaje determinado. De igual forma se llena una tabla de registro de acuerdo a unos datos proporcionados. Para finalizar, se recolectan tanto sus datos, como los de otros compañeros, con el fin de representar gráficamente, a través de un diagrama de barras, los resultados.	números que solo son divisibles por ellos mismos y por la unidad: Los números primos. Todo este trabajo se concreta con la formulación de las reglas de divisibilidad. Finalmente se explican los dos métodos para hallar el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor (dos para cada uno).	Por otro lado, se empiezan a dar las nociones de algunos elementos básicos en estadística, tal como lo son las variables, la media y la moda. Con el propósito de incrementar el desarrollo del pensamiento aleatorio.
GESTIÓN DE LAS ACTIVIDADES **SEGUMIENTO A LA SITUACIÓN** Identificación de las estrategias usadas por los estudiantes para comunicar a sus interlocutores, hipótesis, validez de procedimientos, implicando altos niveles de autonomía. **No. SEMANAS EN SECUENCIACIÓN CONTENIDOS**	Para el desarrollo de las actividades de este periodo se pueden presentar estrategias como: • Utiliza material concreto. • Relaciona lingüísticamente la acción de amarrar unidades con el exponencial de S.N.D. • Relaciona el valor posicional en un ábaco, con el exponencial del S.N.D	En ambas situaciones, el estudiante puede presentar estrategias tales como: • Identifica significativamente el cálculo adecuado para resolver una situación de proporcionalidad directa simple. Todo, a través de los registros de los distintos juegos. • Utiliza las diferentes técnicas multiplicativas (Rusa, egipcia, entre otras). • Usa las tablas de multiplicar. • Utiliza algoritmos formales.	Las estrategias que pueden ser utilizadas durante la situación problema son: • Uso de algoritmos aditivos y multiplicativos. • Identifica los múltiplos, divisores y primos, a través del coloreado de la tira de papel, de la tira de Eratóstenes y de arreglos de puntos. • Elaboración de tablas para múltiplos y divisores acudiendo a las técnicas multiplicativas.	Para el desarrollo de las actividades de este periodo se pueden presentar estrategias como: • Uso de algoritmos de las estructuras aditivas y multiplicativas. • Descomposición numérica. • En el caso de las magnitudes discretas se utilizan representaciones graficas de arreglos de puntos. • Para las magnitudes continuas, se usan representaciones graficas lineales
INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER A través de la socialización, el estudiante toma conciencia de los aspectos conceptuales que la actividad le permite generalizar	Utiliza Polinomios en diferentes representaciones.	Usa los algoritmos multiplicativos.	Utiliza el Mínimo Común Múltiplo, el Máximo Común Divisor, e identifica los números primos.	Resuelve problemas utilizando el Mínimo Común Múltiplo, y el Máximo Común Divisor.

ANEXO D
(Informativo)

PREPARADOR DE CLASE EN EL D.M.C.B

DESCRIPCIÓN S.P.	**NOMBRE DE LA SITUACIÓN PROBLEMA**	**CIRCULOS MÁGICOS**
	NOMBRE DE LOS DOCENTES	Liceth Aguado
	DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO	Numérico – Geométrico - Variacional – Aleatorio
	PROPÓSITO Elaborar un objetivo verificable desde los Estándares de Competencias	Definir de forma intuitiva el concepto de patrón con un valor de cambio, mediante el trabajo con material concreto y la utilización de tablas, determinando los diferentes patrones que el arreglo de puntos determina en cada círculo mágico.
CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO	**CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS PRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN** Una breve descripción de la ACCIÓN que deberá realizar el estudiante, donde el uso de sus conocimientos previos o espontáneos le permita acercarse a respuestas del problema y a nuevos conocimientos	La situación problema se establece como herramienta para la construcción de múltiplos y divisores. El primer momento de motivación y exploración se determinará por la presentación de la construcción hecha en Geogebra donde se evidencia la forma geométrica como resultado de la variación que los múltiplos de 2, 3, 4, 6 y la forma que determinan estas secuenciaciones unas representaciones determinadas por patrones, tanto geométricos como numéricos. A partir de esta presentación, en un segundo momento se entrega a los estudiantes una hoja para que puedan explorar con diferentes múltiplos y observar los patrones que las conforman. Al finalizar la actividad se socializan las figuras obtenidas. Un tercer momento se organiza una tabla a partir de los resultados obtenidos de cada una de las construcciones en los círculos mágicos. Los registros son tablas de forma cuadrada. A continuación se realiza la valoración de los datos, revisando si se encuentran regularidades y de qué tipo. Se retoman las respuestas obtenidas durante el trabajo del primer momento, y se establece un pequeño foro donde se analizan que clase de patrones se pueden observar y que relación con la proporcionalidad se pueden evidenciar.
	SEGUIMIENTO A LA ACTIVIDAD Identificación de las estrategias usadas por los estudiantes para comunicar procedimientos, autónomos.	Para el desarrollo de los tres momentos de la situación, se pueden presentar estrategias como: • Uso de material concreto y virtual • Identificación de los patrones que se encuentran inmersos en la representación. • Identificación del valor de cambio que se emplea en cada patrón. • Variedad de técnicas de conteo • Cambio de sistemas de representación, en cuanto a la variedad de registros, como estrategia usada para validar procedimientos • Uso de TIC'S (Geogebra).
CIERRE	**INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER** Generalizaciones	Reconoce las nociones múltiplos a través de la proporcionalidad, usando patrones, valores de cambio, relaciones entre números.

ANEXO E
(Informativo)

FORMATO DE SEGUIMIENTO A LA PLANEACIÓN

DE LA SITUACIÓN PROBLEMA

FASE DE INICIO	**ACTIVIDADE DE APRENDIZAJE** Determinación de la situación problema	
	REACCIONES DE LOS ESTUDIANTES Posibles preguntas y respuestas de los estudiantes	
	ESTRATEGÍAS DE ENSEÑANZA Selección de estrategias institucionalizadas –praxis locales	
	TIEMPO	
	MATERIAL DIDÁCTICO Materiales de apoyo	
FASE DE BÚSQUEDA Y VERIFICACIÓN	**ACTIVIDADE DE APRENDIZAJE** Métodos que satisfacen los requerimientos de la situación: Revisión de resultados	
	REACCIONES DE LOS ESTUDIANTES Recolección de diferentes acciones usadas por los estudiantes en la situación	
	ESTRATEGÍAS DE ENSEÑANZA Señalar las estrategias exitosas y no exitosas en la solución de la situación	
	TIEMPO	
	MATERIAL DIDÁCTICO Material alterno para estudiantes con dificultades	
FASE DE CIERRE O INSTITUCIONALIZACIÓN	**ACTIVIDADE DE APRENDIZAJE** Reflexiones sobre lo aprendido y su posible uso	
	REACCIONES DE LOS ESTUDIANTES Resolución de otras situaciones con mayor nivel de dificultad	
	ESTRATEGÍAS DE ENSEÑANZA Puesta en conocimiento de métodos empleados para solucionar la situación	
	TIEMPO	
	MATERIAL DIDÁCTICO Problema reto o compleja	

ANEXO F
(Informativo

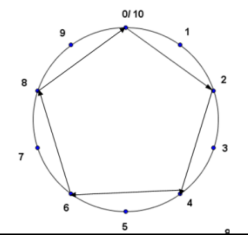
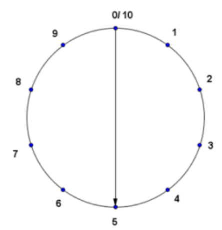
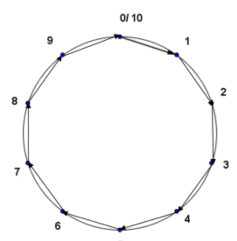
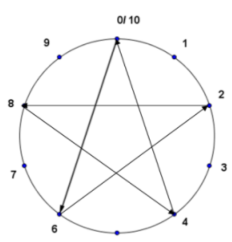
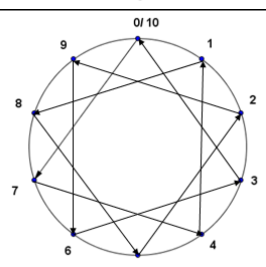
FORMATO DE OBSERVACIÓN DE CLASE

ASPECTOS A OBSERVAR	FORTALEZAS	OBSTÁCULOS	DIFICULTADES	SUGERENCIAS/OBSERVACIONES
Alcance de los objetivos				
Plan de clase propuesto				
Metodologías empleadas para el desarrollo de la clase				
Interacciones profesor-estudiantes				
Interacciones estudiantes-estudiantes				
Desarrollo de los aprendizajes en los estudiantes				
Materiales y recursos utilizados				
Proceso de evaluación				
Aspectos generales				

ANEXO G
(Informativo)

TALLER- TERCER MOMENTO DISEÑO DE LA DOCENTE

Magic Circle! Problem Situation

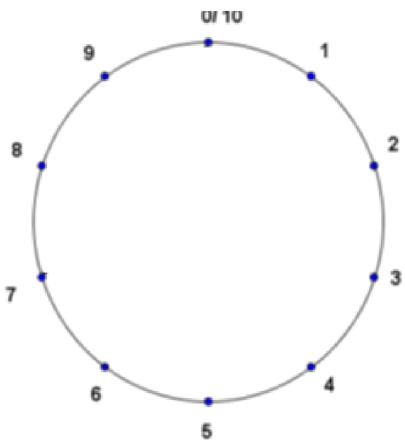
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>2</td><td>12</td><td>22</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>18</td><td>28</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>15</td><td>25</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>1</td><td>11</td><td>21</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>19</td><td>29</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>6</td><td>16</td><td>26</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>14</td><td>24</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>3</td><td>13</td><td>23</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>17</td><td>27</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

ANEXO H
(Informativo)

TALLER- EVAÑUACIÓN DISEÑO DE LA DOCENTE

Find the multiples of each number and discover the mystery shape, what else could you find?

1. Trace the multiples of 2 in the Magic Circle



2. Write the multiples of 2 in the following chart

3. What do you notice when tracing and writing the multiples of **2**:

I found that

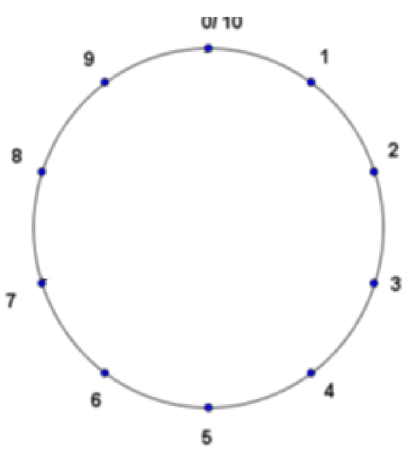
____

____

____

Continue working with multiples of 8, 9, 19, 3, 7, 5, 15, 4 and 6

1. Trace the multiples of 8 in the Magic Circle



2. Write the multiples of 8 in the following chart

3. What do you notice when tracing and writing the multiples of **8**:

I found that

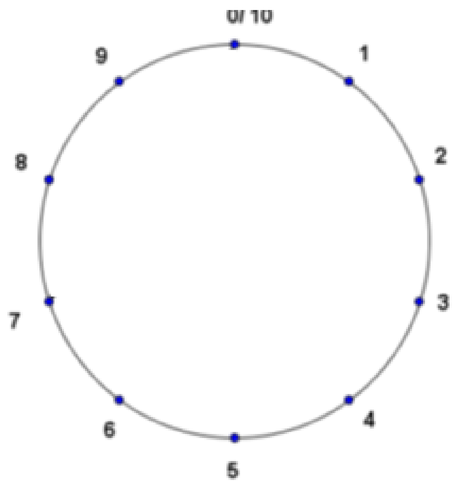
____

____

____

Problem Situation
Fourth Grade – Type III

Find the unknown multiple and the mystery shape in the magic circle



	12			
	42	**48**		
	72			

	12			
	42	**48**		
	72