Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DE UNA VARIABLE. 14 de mayo de 2009

NOMBRE:__________________________ CÓDIGO:____________

PROFESOR:__________________________ GRUPO:____________

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **120** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. (24 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es cierto o falso. Justifique claramente su respuesta.
   a) La ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene exactamente una solución real.
   b) Si $f'(x) > 0$ para $x \in (2,8)$, entonces $f(3) > f(5)$.
   c) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = 2$
   d) Si $y(x) = \int_1^{\arctan x} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^2 dt$ entonces $y'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\arctan x)}{\arctan x} \right)^2$

2. (18 puntos) Determine los valores de a, b y c tales que la función f sea continua en $[0,3]$ y derivable en $(0,3)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

3. (18 puntos) En cada uno de los siguientes casos calcule la derivada que se pide:
   a) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{1/2}$, $f'(x) = ?$
   b) $y^2(x^2 + y^2) = 2x^2$, $\frac{dy}{dx}(1,1) = ?$
   c) $y = (\ln x)^{\operatorname{sen} x}$, $y'(x) = ?$

4. (12 puntos) Encuentre la distancia mínima del punto $P(0,2)$ a la curva $y = 4 - x^2$

5. (18 puntos) Considere la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, y $y = 4x - x^2$
   a) Dibuje la región R
   b) Escriba una expresión integral que represente el área de la región R (No evalúe la integral).
   c) Escriba una expresión integral que represente el volumen del sólido que resulta al girar la región R alrededor de la recta $x = 4$ (No evalúe la integral).

6. (30 puntos) Calcule las siguientes integrales:

i) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ ii) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} \, dx$ iii) $\int \frac{5x^2 - x + 2}{x^3 + x} \, dx$ iv) $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} \, dx$