UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN UNA VARIABLE. **18 de noviembre de 2010**

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ______________

PROFESOR: ______________________________ GRUPO: ______________

NOTA. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS DE UN TOTAL DE **106**

PRIMERA PARTE

1. (15 puntos)

   (a) Dada la función: $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2(x^2+4)}$ calcule $f'(0)$.

   (b) Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto (0,1) a la curva $xe^y + ye^x = 1$.

2. (15 puntos) Calcule las siguientes integrales

$$\text{i)} \int_0^1 \ln x \, dx \qquad \text{ii)} \int x \arctan(x^2)\, dx$$

3. (12 puntos) En la tabla adjunta complete la descripción en la última columna y haga un bosquejo de una posible gráfica para la función f, Tenga en cuenta la siguiente información adicional sobre la función:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \ \text{ y } \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Caracrterística de la gráfica
$(-\infty, -1)$		+	+	Crece cóncava hacia ...
$x = -1$	no existe	no existe	no existe	
$(-1, 0)$		+	−	
$x = 0$	-1	0	−	
$(0, 1)$		−	−	
$x = 1$	no existe	no existe	no existe	
$(1, \infty)$		−	+	

4. Dibuje en el plano cartesiano la región **R** acotada por las gráficas de: $4y + x = 26$; $4y - 3x = 2$; $x = 2$.

   (a) (10 puntos) Escriba integrales con respecto a x y con respecto a y, que representen el área de la región **R**. (No evalúe las integrales).

   (b) (10 puntos) Formule la integral que representa el volumen del sólido que se obtiene cuando la región **R** se hace girar alrededor de la recta $x = -1$. (No evalúe la integral).

5. (12 puntos) Escoja y resuelva uno (sólamente uno) de los siguientes problemas:

   (a) Determine las dimensiones del rectángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio 4.

   (b) Un globo asciende a 3 metros por segundo desde un punto del suelo a 30 metros de un observador. Calcule el ritmo de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a 30 metros de altura.

SEGUNDA PARTE

Cada ítem tiene un valor de 8 puntos.

1. Determine si la función h es derivable en $x = 0$:

$$h(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

2. Suponga que los máximos relativos de una función f son $f(1) = 4$ y $f(3) = 10$. ¿Puede concluirse que f tiene al menos un mínimo relativo para algún valor de x en el intervalo $(1, 3)$? Justifique claramente su respuesta.

3. Muestre que la ecuación $x^3 + x - 11 = 0$ tiene exactamente una solución real.

4. Muestre que la siguiente función es constante en el intervalo $(0, \infty)$:

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$