Valoración binomial de opciones financieras

Luis Berggrun P.

No. 32

Diciembre de 2011

APUNTES DE ECONOMÍA - LECTURES NOTES IN BUSINESS AND ECONOMICS

ISSN 1794-029X

No. 32, Diciembre de 2011

Editor

Julio César Alonso C.

jcalonso@icesi.edu.co

Andrés Mauricio Arcila

Asistentes de Edición

Gestión Editorial

Faculta de Ciencias Administrativas y Económicas - Universidad Icesi

Apuntes de Economía - Lectures notes in Business and Economics es una publicación de la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta de los autores.

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 8224. Fax: 5551441

Calle 18 # 122-135 Cali, Valle del Cauca, Colombia

Valoración binomial de opciones financieras

Luis Berggrun P.[1]

Diciembre de 2011

Resumen

En estos apuntes de clase se discute la valoración de opciones financieras europeas como americanas. La valoración se efectúa asumiendo que el precio de subyacente sigue una distribución binomial. Se valoran inicialmente las opciones partiendo del concepto de no-arbitraje en tiempo discreto para luego generalizar la valoración en tiempo continuo.

Palabras Clave: Opciones financieras, distribución binomial, arbitraje

Abstract

This teaching note discusses the valuation of European and American financial options. Valuation is conducted assuming that the price of the underlying follows a binomial distribution. We initially value options based on the concept of no arbitrage in discrete time and then move to a continuous time framework.

Keywords: Options, binomial distribution, arbitrage

---

[1] Profesor del Departamento de Finanzas, lberggru@icesi.edu.co.

Al terminar de leer estos apuntes usted estará en capacidad de:

- Valorar una opción asumiendo que vence en un periodo o en varios periodos y que el precio del subyacente sigue una distribución binomial
- Valorar opciones financieras en tiempo continuo
- Comprender las diferencias en la valoración de opciones americanas y europeas

1. Introducción

El propósito de este escrito es discutir la valoración de opciones (tanto europeas como americanas) a través de una aproximación binomial.

Para ello asumiremos que el precio de una acción sigue un proceso binomial multiplicativo[2]. En otras palabras, el precio de una acción en el siguiente periodo tomará solo dos valores que dependen de dos factores multiplicadores. El primer factor multiplicador lo denotaremos por la letra "u" (por el inglés "up" y el cual será mayor a 1, $u > 1$) y que representará el evento en que el precio por acción se incremente en el siguiente periodo de análisis y el segundo factor lo representaremos como "d" (por el inglés "down" y el cual será menor a 1, $d < 1$) y que se corresponde con un escenario donde el precio por acción disminuye con respecto a su valor actual (S_0).

Así, si asumimos que el precio actual de la acción es de \$40 y que $u = 1.2$ y $d = 0.8$, la acción entonces tomará los valores de \$48 y \$32 respectivamente en el siguiente periodo.

Adicionalmente podemos asumir que existe una probabilidad p asociada a un incremento en el precio por acción e igual, en este caso, a 0.5 y una probabilidad $1-p$ asociada a una disminución en el precio por acción correspondiente a 0.5.[3]

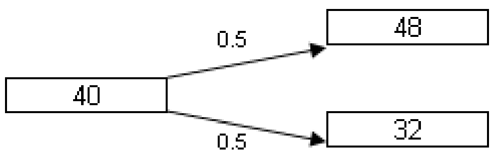
---

[2] En tiempo discreto.

[3] Hubiésemos podido escoger también $p = 0.7,\ 1-p = 0.3$ o $p = 0.6,\ 1-p = 0.4$, pero cómo se verá más adelante esta escogencia será irrelevante para valorar la opción.

Lo anterior se resume en la Gráfica 1, la cual se le suele conocer como un árbol binomial mostrando la evolución de los precios con sus respectivas probabilidades al final de un periodo.

Gráfica 1. Evolución binomial de los precios de una acción al cabo de un periodo



2. Valoración de una opción call con vencimiento en 1 periodo

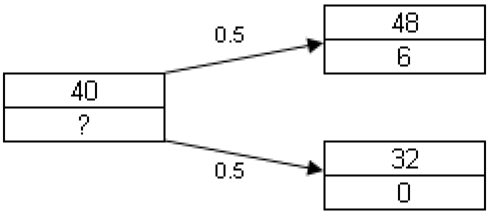
Supongamos que existe una opción europea de compra “call” sobre la acción que hemos venido analizando, la cual asumiremos que no paga dividendos a sus accionistas, con un precio de ejercicio, E , igual a \$42 y con vencimiento a 1 periodo, o más específicamente a 1 año. Es decir, $T = 1$, donde T vendrá medido en años al vencimiento como comúnmente se acostumbra.

El pago de la opción call en cada uno de los nodos del precio terminal de la acción viene dado por el máximo (max) entre la diferencia del precio final, S_T y el precio de ejercicio E, y cero, que correspondería al caso de no ejercer la opción de compra. Más concretamente el pago de la opción call a su vencimiento vendría dado por:

$$\begin{aligned} C_u &= \max(S_0 u - E, 0) \\ C_d &= \max(S_0 d - E, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde C_u y C_d corresponden al valor (pago) de la opción call al vencimiento dado un incremento o disminución en el precio por acción respectivamente. En concreto, el pago de la opción será de \$6 y \$0 respectivamente como se ilustra en la Gráfica 2. En esta, la primera casilla representa el precio y la segunda casilla (inferior) representa el pago de la opción.

Gráfica 2.Estimación de los pagos de una opción call al vencimiento



Para valorar la opción tendremos que asumir un valor para la tasa libre de riesgo, r, que supondremos del 9.1% anual por lo que una inversión de $1 unidad monetaria crecerá a $1.091 unidades luego de un año. Denotaremos a este último monto como R. Donde, de manera más general:

$$R = 1 + r \tag{2}$$

Este valor R lo utilizaremos para tener en cuenta el efecto del valor del dinero en el tiempo en el proceso de valoración. Más específicamente para descontar y componer flujos de caja a un periodo.

Con esta información concentrémonos en la valoración de la opción de compra.

Inicialmente podría pensarse que el precio de la opción hoy (C_0) debería ser igual al valor presente de los pagos esperados que la opción genera. Es decir:

$$C_0 = \frac{6 * 0.5 + 0.0 * 0.5}{1.091} = \$2.75 \tag{3}$$

Sin embargo, este precio de la opción ($2.75) no puede regir en un mercado eficiente dado que daría la oportunidad de arbitrar, es decir de obtener un beneficio sin riesgo ni inversión inicial de recursos propios.

Para sustentar lo anterior, supongamos que compramos esta opción desembolsando

$2.75 que conseguimos mediante la venta en corto[4] de 0.375 acciones (al precio actual de $40) lo que nos reporta un flujo de caja de $15. El excedente entre los recursos que se obtienen de la venta en corto y el pago de la opción ($15-$2.75= $12.25) lo invertimos al 9.1% anual. Como se observa la inversión inicial de recursos propios es nula.

Al vencimiento, nuestra inversión libre de riesgo crecerá a

$$\$12.25 * 1.091 = \$13.365$$

Analicemos ahora los flujos de caja al vencimiento de la opción. Si el precio alcanza un nivel de $48, el valor de nuestro portafolio (largo en una opción call, corto en un número de acciones dado y con un excedente invertido a la tasa libre de riesgo) será de:

$$\$6 - (\$48 * 0.375) + 13.365 = \$1.365$$

Donde $6 corresponde al pago de la opción al vencimiento, $-\$48 * 0.375 = -\$18$ corresponde al monto de nuestra posición corta en la acción[5] y $13.365 a la inversión libre de riesgo.

Si por el contrario, el precio alcanza un nivel de $32, el valor final del portafolio será:

$$\$0 - (\$32 * 0.375) + \$13.365 = \$1.365$$

Como se observa, un precio de $2.75 por opción call permite obtener (sin inversión inicial alguna) utilidades de arbitraje de $1.365 independientemente del precio final que tome la acción.

---

[4] En una venta en corto el inversionista inicialmente pide prestado una acción, la vende de inmediato para conseguir efectivo y luego la compra a precios de mercado (preferiblemente a un precio menor al que la vendió inicialmente) para cancelar el préstamo original. Durante el término del préstamo, el vendedor en corto tiene que hacerse cargo de los flujos de caja que genere la acción en el periodo (i.e. dividendos).

[5] Nótese el signo negativo de la posición corta.

Por cuanto no podemos suponer que estas oportunidades de arbitraje persistan en mercados competitivos, podemos proponer un método para valorar opciones sin que esto dé lugar a arbitraje. Para ello, podemos crear un portafolio con Δ unidades de la acción y B unidades monetarias en bonos libres de riesgo con una tasa (de préstamo o inversión que se asumen iguales al 9.1% anual). El desembolso inicial para constituir este portafolio (asumiendo que vendimos una opción call a precio C_0) será igual a $-\Delta S_0 + B + C_0$

Entonces, nuestro portafolio está corto en una opción call[6] (cuyo valor desconocemos), largo en 0.375 acciones por las cuales se desembolsó \$15 y para cubrir ese desembolso se pidió prestado \$11 en bonos libres de riesgo ($B = -\$11$)[7]. Al vencimiento, si el precio por acción termina en \$48, el valor del portafolio será de:

$$-\$6 + (\$48 * 0.375) - (\$11 * 1.091) = \$0.0$$

Si el precio termina en \$32, el valor del portafolio será igual a:

$$\$0 + (\$32 * 0.375) - (\$11 * 1.091) = \$0.0$$

Luego, no es difícil asumir que la inversión inicial de un portafolio que genere flujos de caja nulos independientemente del valor final de la acción tiene que ser igual a \$0. Esto corresponde a:

$$\begin{aligned} &(-0.375 * \$40) + 11 + C_0 = 0 \\ &C_0 = \$4.0 \end{aligned}$$

[6] En otras palabras que vendimos una opción call a un inversionista y queremos averiguar un precio de mercado para la misma, C_0. Una lógica similar se puede aplicar cuando el problema es determinar el precio de una opción call que hayamos comprado.

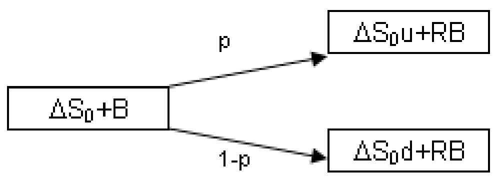
[7] Un valor negativo de B significa que se piden prestados recursos al inicio mientras que un valor positivo de B representa una inversión inicial de recursos a la tasa libre de riesgo.

En resumen, el precio de la opción call hoy debería ser igual a \$4.0 (y no a \$2.75) para evitar el arbitraje.

De manera más general, podemos constituir un portafolio de Δ acciones y B (\$) en bonos que repliquen (imiten) los pagos de la opción call. La idea general para valorar una opción call es tratar de hallar una combinación de acciones y bonos que repliquen los pagos finales de una opción call. Dado que esa combinación de activos genera los mismos pagos de una opción call, dicha opción debería tener el mismo valor (precio) hoy que la combinación de acciones y bonos. De lo contrario, se presentarían actividades de arbitraje.

Inicialmente este portafolio (de no arbitraje o replicante) costará $\Delta S_0 + B$ y al final de un periodo tomará los siguientes valores con las probabilidades p y $1-p$ respectivamente:

Gráfica 3. Evolución del valor del portafolio de no arbitraje



Una forma de escoger Δ y B sería tal que replicarán los pagos de la opción en los estados u y d:

$$\Delta S_0 u + RB = C_u$$
$$\Delta S_0 d + RB = C_d$$

Como se observa el sistema de ecuaciones anteriores es de sencilla resolución ya que tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas.

De manera matricial podemos expresar el problema como:

$$\begin{bmatrix} S_0 u & \mathrm{R} \\ S_0 d & \mathrm{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_u \\ C_d \end{bmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer podemos hallar Δ como:

$$\Delta = \frac{C_u R - RC_d}{S_0 uR - S_0 dR} = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d} \qquad (4)$$

En este caso B será igual a:

$$B = \frac{S_0 uC_d - S_0 dC_u}{S_0 uR - S_0 dR} = \frac{uC_d - dC_u}{R(u-d)} \qquad (5)$$

Recuadro 1-1. La regla de Cramer

La regla de Cramer afirma que usted puede hallar el valor de las incógnitas x_1 y x_2 de un sistema de ecuaciones a través de operaciones matriciales sencillas. Asumamos que tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ a_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Que de manera más general se puede expresar como:

$$Ax = c$$

Donde denotamos la matriz que contiene una serie de coeficientes ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, \ldots$) como la matriz A, de la cual podemos estimar su determinante como:

$$Det_A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El vector columna lo denotamos como x, el cual contiene las incógnitas y el vector columna c el cual contiene los resultados (escalares) de cada una de las dos ecuaciones. Según esta regla, podemos hallar el valor de x_1 como:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{c_1 a_{22} - a_{12} c_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Y de manera análoga el valor de x_2 será igual a:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_{11} c_2 - c_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Como se observa cada incógnita se halla encontrando el determinante de la matriz A modificada donde se intercambia la columna respectiva[8] por el vector columna de escalares, y se divide este valor por el determinante de la matriz A original.

Entonces, como se anotó anteriormente $C_0 = \Delta S_0 + B$. Esto es:

$$C_0 = \Delta S_0 + B = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d} S_0 + \frac{u C_d - d C_u}{R(u-d)}$$

Luego de algo de álgebra se llega a:

$$C_0 = \frac{\left[\left(\frac{R-d}{u-d} \right) C_u + \left(\frac{u-R}{u-d} \right) C_d \right]}{R}$$

Para simplificar esta última ecuación podemos hacer que q y $1-q$ sean iguales a:

[8] Por ejemplo, la columna 1 se modifica si queremos hallar la incógnita 1, x_1.

$q = \frac{R-d}{u-d}$ y $1-q = \frac{u-R}{u-d}$. Con lo que llegamos a la expresión general que nos servirá para valorar opciones call europeas:

$$C_0 = \frac{\left[qC_u + (1-q)C_d\right]}{R} \qquad (6)$$

En el caso de la valoración de opciones de venta europeas put, P_0, la ecuación (6) se modificaría a:

$$P_0 = \frac{\left[qP_u + (1-q)P_d\right]}{R} \qquad (7)$$

Donde P_u y P_d representan los pagos de la opción put luego de un incremento o una disminución en el precio por acción respectivamente.

Nótese que en las dos ecuaciones anteriores, que q y $1-q$ pueden tener la connotación de probabilidades (o pseudo probabilidades) dado que:

$$\frac{R-d}{u-d} + \frac{u-R}{u-d} = 1$$

Estas probabilidades se suelen conocer como probabilidades neutrales al riesgo. En un mundo neutral al riesgo, el retorno esperado de una acción es igual a la tasa libre de riesgo. Es decir:

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0R$$

A partir de la ecuación anterior fácilmente podemos derivar la probabilidad que concuerda con la probabilidad q que anteriormente derivamos:

$$p = \frac{R-d}{u-d} = q$$

Obsérvese además que las probabilidades originales de un incremento o disminución del precio por acción (p y $1-p$) no aparecen en la ecuación (6) ni (7) y por tanto son irrelevantes al valorar una opción. En otras palabras, a pesar de que los inversionistas en el mercado discrepen sobre las probabilidades de incremento o disminución en el precio por acción, dichas discrepancias no tienen efecto alguno en el valor de mercado de una opción.

Haciendo uso de la opción call que hemos venido analizando podemos calcular:

$$\Delta = \frac{6-0}{48-32} = 0.375$$
$$B = \frac{1.2*0-0.8*6}{1.091*(1.2-0.8)} = -\$11.0$$

El número de acciones y el valor del bono en préstamo coinciden con la información que hemos venido analizando del portafolio de no arbitraje (o replicante).

En este caso q y $1-q$ serán iguales a

$$q = \frac{1.091-0.8}{1.2-0.8} = 0.7275$$
$$1-q = 1-0.7275 = 0.2725$$

Luego, el valor de la opción call será igual a:

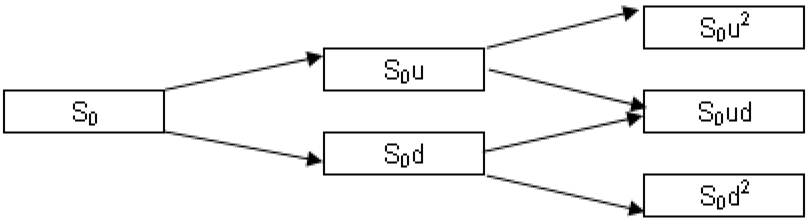
$$C_0 = \frac{0.7275*\$6+0.2725*\$0}{1.091} = \$4.0$$

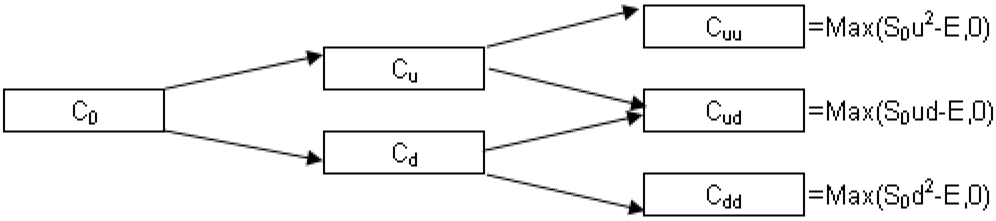
Dicho valor coincide con el que habíamos calculado anteriormente.

3. Generalización. Valor de una opción call con vencimiento en T periodos

Este procedimiento para valorar opciones se puede generalizar para el caso en la que la opción venza en un periodo mayor a 1 ($T > 1$). En el caso concreto donde T =2 años y se valore la opción en 2 pasos o periodos (n=2, donde para este caso en particular cada periodo es igual a 1 año) con la información que hemos venido utilizando, el proceso que seguirán la acción y la opción se ilustra a continuación.

Gráfica 4. Evolución del valor de la acción y la opción call (T = 2, n = 2)





Para valorar la opción haremos uso del concepto conocido como “backward induction”. Es decir, comenzaremos a valorar la opción desde el final o vencimiento hasta llegar al periodo inicial y encontrar C_0. En el último periodo, el valor de la opción será igual al pago que esta ofrezca, es decir, el máximo (max) entre la diferencia entre el precio final S_T y E ($42) y cero. Es así, si el precio termina en $57.6, $38.4 o $25.6, el pago de la opción será de $15.6, $0 y $0 respectivamente.

Faltando 1 periodo y suponiendo que el primer movimiento de precios fue hacia arriba ($48), podremos valorar la opción (C_u) como una opción con vencimiento a 1 año, tal como lo hicimos en la sección anterior.

Así obtendremos:

$$C_u = \frac{qC_{uu} + (1-q)C_{ud}}{R}$$

Para valorar C_d aplicamos una fórmula similar:

$$C_d = \frac{qC_{ud} + (1-q)C_{dd}}{R}$$

En concreto, tendríamos que

$$C_u = \frac{0.7275 * \$15.6 + (1-0.7275) * \$0}{1.091} = \$10.40$$

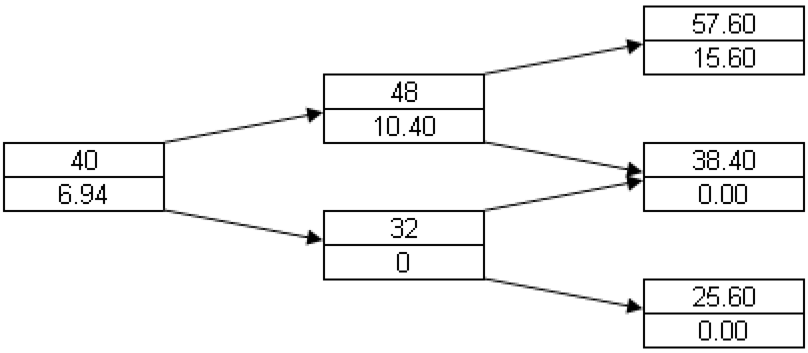
Es decir, el valor teórico de la opción, con un periodo al vencimiento, luego que en el primer año la acción haya subido de precio es igual a $10.40. De manera análoga podemos hallar que el valor de C_d es nulo dada la evolución de precios terminal la cual determinará que la opción no será ejercida al vencimiento.

Para valorar C_0 podemos utilizar la información sobre C_u y C_d por lo que tendríamos que:

$$C_0 = \frac{qC_u + (1-q)C_d}{R} = \frac{0.7275 * \$10.4 + 0.2725 * \$0}{1.091} = \$6.94$$

Toda esta información se resume en la Gráfica 5 que se muestra a continuación.

Gráfica 5. Ejemplo. Evolución del valor de la acción y la opción call (T = 2, n = 2)

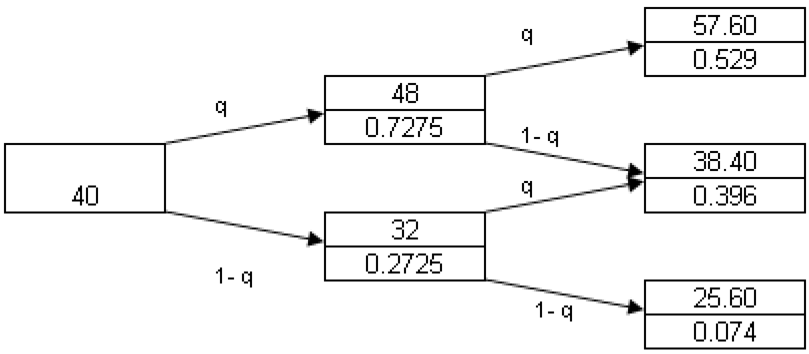


Otra manera de valorar la opción call es estimar la probabilidad que existe que a partir de un precio inicial dado (S_0) se lleguen a los precios en el último periodo (o nodo).

Es decir, estimar la probabilidad que a partir de un precio de $40 se llegue a uno de $57.6, o $38.4 o finalmente, en el peor de los casos a $25.6.

Asumiendo eventos independientes, es decir que el hecho que en el primer periodo la acción haya subido (u) no influencia el movimiento ascendente o descendente que se pueda presentar en el precio en el segundo periodo, podemos estimar la probabilidad de obtener un precio final de $57.6 ($S_0u^2$) como $q*q = q^2$. Esta probabilidad sería igual a $0.7275^2 = 0.529$. La probabilidad de presentarse un precio final de $25.6 es de $(1-q)^2 = 0.074$ y la presentarse un precio intermedio de $38.4 ($S_0ud$) es de $2q(1-q) = 0.396$. La evolución de los precios y sus probabilidades de ocurrencia se ilustran en la Gráfica 6.

Gráfica 6. Valor por acción y probabilidad de ocurrencia (T = 2, n = 2)



Luego de identificar las probabilidades (hasta el vencimiento) podemos valorar la opción como el valor presente de los pagos esperados (dadas sus respectivas probabilidades de ocurrencia) al vencimiento del derivado. Esto quiere decir que:

$$C_0 = \frac{q^2 Max(S_0u^2 - E, 0) + 2q(1-q)Max(S_0ud - E, 0) + (1-q)^2 Max(S_0d^2 - E, 0)}{R^2}$$

Así podremos obtener el valor de $C_0 = \$6.94$ con la opción call que hemos venido analizando como:

$$C_0 = \frac{0.529 * \$15.6 + 0.396 * \$0 + 0.074 * \$0}{1.091^2} = \$6.94$$

De manera más general podemos estimar la probabilidad de alcanzar un precio dado luego de n periodos o pasos con la siguiente fórmula:

$$\left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) q^i (1-q)^{n-i} \qquad (8)$$

Donde i representa el número de pasos o periodos hasta el vencimiento de la opción donde se presenten movimiento ascendentes de precio. Por ejemplo, la probabilidad que hallamos del 39.6% de finalizar con un precio de $38.4 es igual a:

$$\left(\frac{2!}{1!(2-1)!} \right) 0.7275^1 0.2725^1 = 2q(1-q) = 0.396$$

En Excel, podemos calcular el término entre paréntesis de la ecuación (8) con la función "***COMBINAT(número,tamaño)***". Donde número equivaldría al número total de pasos o periodos al vencimiento (siguiendo con el ejemplo, 2) y tamaño al número de periodos o pasos donde el precio por acción se incrementa (en otras palabras, i, que en el ejemplo es igual a 1). Empero, este término lo tenemos que multiplicar luego por $q^i (1-q)^{n-i}$.

Con lo anterior podremos expresar de manera más general el valor de una opción call la cual queremos valorar con n pasos o periodos al vencimiento[9] como la sumatoria (en valor presente) de los pagos al vencimiento ponderados por sus respectivas probabilidades de ocurrencia así.

---

[9] Nótese que en este caso asumimos para aplicar la fórmula que $n = T$. Sin embargo, en ocasiones utilizaremos valores de n diferentes (mayores) a los de T.

$$C_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)q^i(1-q)^{n-i}\,\mathrm{Max}\left(S_0u^id^{n-i}-E,0\right)}{R^n} \tag{9}$$

Antes de derivar valores más "realistas" de R, u y d (y por consiguiente de q y 1-q)[10] podemos revisar si la valoración de la opción call anterior con un vencimiento en 2 periodos da lugar a arbitraje a través de la constitución de un portafolio que contenga acciones y bonos en una cantidad dada.

Como se demostró anteriormente, un portafolio de no arbitraje debería implicar un costo de financiación inicial de cero y pagos finales de cero independientes del precio final de la acción.

Cuando valoramos la acción en más de un periodo o paso ($n > 1$) es conveniente agregar la condición que cualquier cambio que se produzca en la composición del portafolio debe ser autofinanciada. Es decir, cualquier compra de acciones se debe financiar con mayor deuda o cualquier pago de la deuda se debe financiar con la venta de acciones.

Inicialmente, nuestro portafolio estará constituido por $\frac{10.4-0}{48-32} = 0.65$ acciones con costo de $26. Dicho valor se conseguirá vendiendo una opción call por $6.94 y pidiendo el resto ($19.06) en préstamo a la tasa libre de riesgo. Si el precio luego de un periodo sube a $48, (indicándonos que muy probablemente la opción terminará en el dinero) tendremos que ajustar el número de acciones en el portafolio a 0.813, lo que implica una compra de 0.163 acciones nuevas por un total de $7.82. Estos $7.82 se conseguirían a través de un nuevo préstamo por lo que el endeudamiento total ascendería luego de un periodo a:

$$\$19.06 * 1.091 + \$7.82 = \$28.6$$

[10] El lector se habrá dado cuenta que hasta aquí hemos supuesto valores arbitrarios de estos parámetros en el contexto de un mundo discreto.

Si en el segundo periodo, el precio por acción termina en $57.6, la opción será ejercida. Como solo se poseen 0.813 acciones es necesaria la compra de 0.187 nuevas acciones por valor de $10.77 que se conseguirían con nueva deuda por valor de $10.77. La deuda (B) al final de los dos periodos sería de:

$$\$28.60 * 1.091 + 10.77 = \$42$$

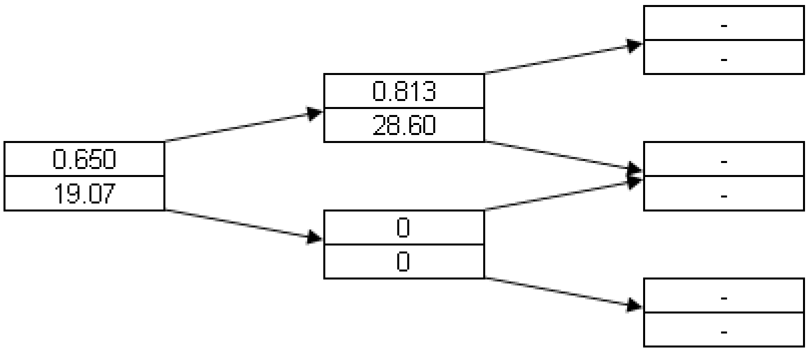
Esta deuda podrá ser cancelada en su totalidad con el recibo del precio de ejercicio de la opción ($42).

Si por el contrario, el precio final llega a ser $38.4, la opción no será ejercida y el préstamo de $31.2 ($28.6*1.091) será cancelado con la venta del portafolio de acciones (0.813*$38.4 = $31.2).

Como se observa independiente del precio final, el flujo de caja del portafolio de no arbitraje será igual a cero.

La Gráfica 7 muestra la evolución de los deltas y del préstamo (B) periodo por periodo de acuerdo con el camino que haya tomado el precio por acción. Al final se asume que el portafolio se liquida completamente.

Gráfica 7. Composición en el tiempo del portafolio de no arbitraje ($\triangle$ y B)



Si por algún motivo el precio de la opción call fuese distinto a $6.94, por ejemplo, su precio de mercado fuese de $7.03, esto daría paso a una estrategia de arbitraje.

Inicialmente se vendería la opción por \$7.03 y se constituiría un portafolio con 0.65 acciones (por \$26) y \$19.06 en préstamo lo que conllevaría a un excedente de \$0.09, el cual se invertiría a la tasa libre de riesgo hasta el vencimiento de la opción. Dependiendo de cómo cambie el precio por acción en el futuro, el Δ y B se ajustarían como se explicó anteriormente (ver Gráfica 7). En definitiva, esta estrategia reportaría una utilidad de arbitraje equivalente al excedente inicial más los intereses que este generó, por un valor total de \$0.107, al cabo de dos años.

4. Determinación de R, u y d

En esta sección abandonaremos el supuesto de una valoración en tiempo discreto (ciertamente el precio por acción puede cambiar cada segundo) y nos concentraremos en una valoración en tiempo continuo, es decir cuando n tiende a infinito ($n \to \infty$). Así, podemos denominar la duración de cada paso en nuestra valoración como δt (medida en años). Donde:

$$\delta t = \frac{T}{n}$$

Se observa que conforme n tiende a infinito la duración de cada paso tiende a cero y nos encontramos en una valoración en tiempo continuo. Por ejemplo, si el vencimiento de una opción es igual a 1 mes ($T = \frac{1}{12}$) y asumimos que n=10, nuestro δt sería igual a 0.00833 años.

Por cuanto es necesario efectuar equivalencias del valor del dinero en el tiempo inicialmente podemos observar que dado un capital inicial, P, este crecerá hasta $Pe^{\hat{r}}$ (y no hasta $PR = P(1+r)$ como en un mundo discreto), donde $\hat{r}$ representa la tasa libre de riesgo compuesta de manera continua. Por cuanto los bancos y la prensa suelen citar la tasa discreta r, podemos hallar $\hat{r}$ a través de la siguiente operación de equivalencia:

$$e^{\hat{r}} = 1 + r = R$$
$$\hat{r} = \ln(1+r) = \ln(R)$$

Es decir, si la tasa libre de riesgo es del 5% anual, esta será equivalente al 4.88% compuesto continuo y con esta última tasa procederemos a valorar una opción.

En un mundo neutral al riesgo, la tasa esperada de retorno de una acción en un periodo "pequeño", δt, es igual a $\hat{r}\delta t$. Así, luego de un periodo δt, el valor esperado o más probable del precio de una acción será igual a $S_0 e^{\hat{r}\delta t}$.

Es razonable entonces, y con aras de hallar valores de u y d igualar este valor esperado con el valor esperado, en un mundo neutral al riesgo[11], del precio por acción luego de un periodo muy corto de tiempo así:

$$S_0 e^{\hat{r}\delta t} = qS_0 u + (1-q)S_0 d \qquad (10)$$

De la ecuación (10) podemos hallar que el factor de crecimiento (luego de un periodo δt) es igual a:

$$e^{\hat{r}\delta t} = qu + (1-q)d \qquad (11)$$

Entonces si queremos hallar valores realistas de u y d, una estrategia razonable sería igualar la media y la varianza de $e^{\hat{r}\delta t}$ con la media y la varianza de una distribución que describa el proceso de generación de precios, los cuales se asumen se distribuyen de manera lognormal.

Con este supuesto distribucional de los precios accionarios no es difícil demostrar que la tasa esperada de retorno (logarítmica) vendrá dada por $\mu\delta t$ y su varianza por $\sigma^2\delta t$. Utilizando el hecho que la varianza de una variable aleatoria X es igual a

[11] Concepto que se discutió anteriormente para la determinación de la probabilidad q.

$\text{var}(X^2)-(\text{var}(X))^2 = E(X^2)-(E(X))^2$, podemos plantear la siguiente igualdad a partir de la ecuación (11):

$$\sigma^2\delta t = qu^2 + (1-q)d^2 - [qu+(1-q)d]^2$$

Utilizando la información de q en (11) y luego de algo de algebra se llega a:

$\sigma^2\delta t = -(e^{\hat{r}\delta t}-d)((e^{\hat{r}\delta t}-u)$. Expresión que es equivalente a:

$$\sigma^2\delta t = e^{\hat{r}\delta t}(u+d) - ud - e^{2\hat{r}\delta t} \qquad (12)$$

Al igual que Hull (2006) podemos proponer la siguiente solución para u y d:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \qquad (13)$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \qquad (14)$$

Para comprobar que esta solución en realidad satisface la ecuación (12) podemos efectuar las siguientes expansiones (aproximaciones) de Taylor donde se omiten (asumen cero) términos superiores a δt.

Entonces,

$$\begin{aligned} e^{\hat{r}\delta t} &\approx 1+\hat{r}\delta t \\ e^{2\hat{r}\delta t} &\approx 1+2\hat{r}\delta t \\ u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} &\approx 1+\sigma\sqrt{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\delta t \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} &\approx 1-\sigma\sqrt{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\delta t \end{aligned}$$

Recuadro 1-1. Expansión de Taylor

De manera general una expansión de Taylor permite aproximar el valor de una

función de una sola variable[12] con el valor de la misma función evaluada en otro punto (o valor de la variable independiente) cercano e información de las derivadas de la función evaluadas en ese punto o valor cercano.

En concreto, la expansión de Taylor se puede expresar como:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

El lector notará que la expresión anterior es una aproximación y que se hizo caso omiso de las derivadas de orden superior a 2.

Como ejemplo, podemos aproximar el valor de la función e^x, asumiendo que $a = 0$. La aproximación será igual a:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Asumamos que $x = 0.4$, luego $f(x) = e^{0.4} = 1.4918$, valor que podemos aproximar como:

$$e^{0.4} \approx 1 + 0.4 + \frac{0.4^2}{2} = 1.48$$

Usando las anteriores expresiones en (12) obtenemos:

[12] O una función de varias variables. En este caso nos concentraremos en el caso de una sola variable.

$$\sigma^2\delta t = (1+\hat{r}\delta t)\left(1+\sigma\sqrt{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\delta t+1-\sigma\sqrt{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\right)-\left(1+\sigma\sqrt{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\right)\left(1-\sigma\sqrt{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\right)$$
$$-(1+2\hat{r}\delta t)$$

$$\sigma^2\delta t = (1+\hat{r}\delta t)(2+\sigma^2\delta t)-1+\frac{1}{4}\sigma^4\delta t^2-1-2\hat{r}\delta t$$

$$\sigma^2\delta t = \sigma^2\delta t+\sigma^2\hat{r}\delta t^2+\frac{1}{4}\sigma^4\delta t^2$$

Si en la última ecuación asumimos que los términos de orden superior a δt se pueden omitir llegamos a la respuesta buscada.

Conociendo u, d y R podemos calcular la probabilidad q de un movimiento ascendente en el precio por acción como:

$$q=\frac{e^{\hat{r}\delta t}-d}{u-d}=\frac{e^{\hat{r}\delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}} \qquad (15)$$

5. Valoración de una opción call europea en tiempo continuo

A manera de ejemplo podemos la valorar una opción call europea con las siguientes características:

Vencimiento: 24 días
Precio actual de la acción: $12
Precio de ejercicio: $13
Tasa libre de riesgo: 4% anual
Volatilidad de los retornos de la acción (σ): 36% anual

Asumiendo un año de 252 días y efectuando una valoración en 5 pasos ($n=5$)[13], hallamos inicialmente que $T=\frac{24}{252}=0.095238$ años, $\delta t=\frac{0.095238}{5}=0.019048$ y

[13] Conforme aumentemos el número de pasos, nuestra aproximación (binomial) se acercará cada vez más al precio de mercado de la opción.

$\hat{r} = \ln(1+0.04) = 3.922\%$.

Podemos estimar u y d como:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{0.36\sqrt{0.019048}} = 1.05094$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{-0.36\sqrt{0.019048}} = 0.951529$$

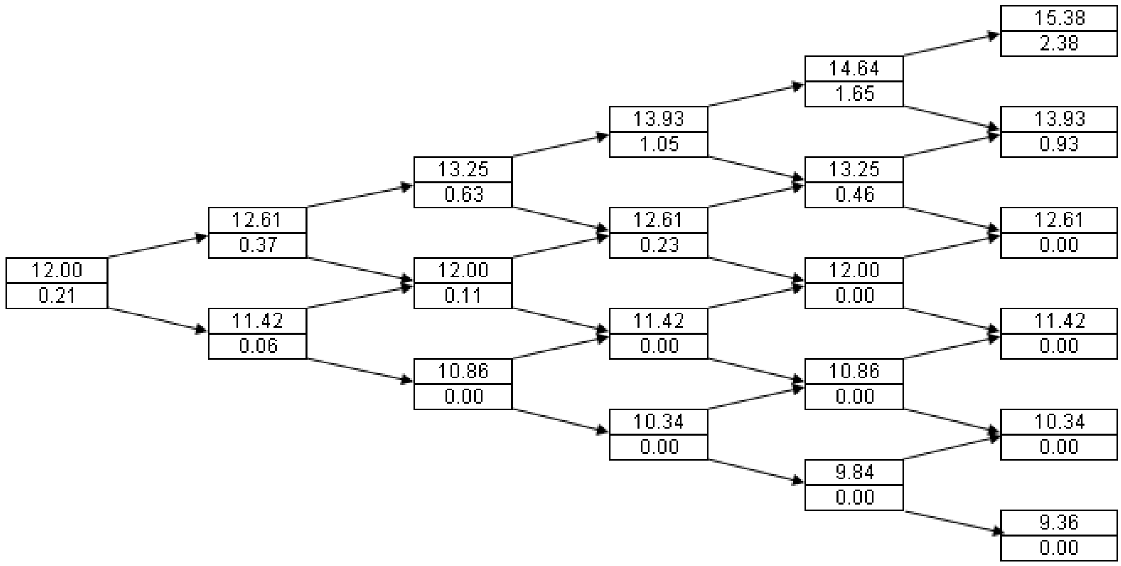
Entonces q y $1-q$ serían iguales a:

$$q = \frac{e^{\hat{r}\delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{0.03922*0.019048} - 0.951529}{1.05094 - 0.951529} = 0.4951$$
$$1-q = 1-0.4951 = 0.5049$$

Con esta información podemos construir un árbol binomial que muestre la evolución del precio por acción y de la opción call[14]. En particular, aplicando las probabilidades anteriormente halladas y los valores de u, d y R, hallamos que el precio de la opción call (C_0) es de $0.21 como se muestra en la Gráfica 8.

Gráfica 8. Valoración de una opción call en tiempo continúo

[14] Para valorar una opción put europea se sigue un procedimiento similar. Por ejemplo, en el nodo terminal la función de pago sería $\max(E - S_T, 0)$



6. Valoración de opciones americanas

Las opciones americanas, a diferencia de las opciones europeas, pueden ser ejercidas antes de su vencimiento. Esta característica de las opciones americanas es fácilmente incorporable a nuestro árbol binomial para valorar opciones.

En este caso tendremos que hacer ligeros ajustes a nuestra metodología de valoración basada en "backward induction", es decir valorar la opción a su vencimiento e ir retrocediendo en el tiempo para valorarla luego faltando un $1, 2, ...T$ al vencimiento.

En este caso, a cada paso (anterior al vencimiento) se tiene que comparar el valor de esperar (hasta el vencimiento o hasta un periodo posterior) y el valor de ejercer la opción inmediatamente. El mayor de estos dos valores se convertirá entonces en el valor de la opción en ese periodo (t).

Para clarificar estos conceptos vamos a valorar una opción call americana de la compañía General Motors, en el día 27 de febrero de 2008 y que vence 23 días después (el 21 de marzo de 2008). La información de la opción se resume a continuación:

Vencimiento: 23 días

Precio actual de la acción: \$24.82

Precio de ejercicio: \$22.5

Tasa libre de riesgo: 3.13% anual

Volatilidad de los retornos de la acción (σ): 35.85% anual

Asumiendo un año de 252 días y efectuando una valoración en 5 pasos ($n=5$), hallamos inicialmente que $T=\frac{23}{252}=0.09127$ años, $\delta t=\frac{0.09127}{5}=0.018254$ y $\hat{r}=\ln(1+0.0313)=3.08\%$.

Además podemos hallar que:

$$
\begin{aligned}
u &= 1.04963 \\
d &= 0.95272 \\
q &= 0.4937 \\
1-q &= 0.5063
\end{aligned}
$$

Al vencimiento, $t=5$, si el precio termina en \$28.7, la opción será ejercida reportando un pago de \$6.20. Un periodo antes del vencimiento ($t=4$) se tiene que comparar el valor de esperar y el valor de ejercer la opción de manera inmediata. Si el precio en ese momento es de \$27.34, el valor de la opción saldrá de comparar el máximo valor entre ejercer la opción inmediatamente ($Max(S_t-E,0)=Max(\$27.34-\$22.5,0)=\$4.84$ y el valor esperado de la opción (a 1 periodo) o valor de "esperar", es decir:

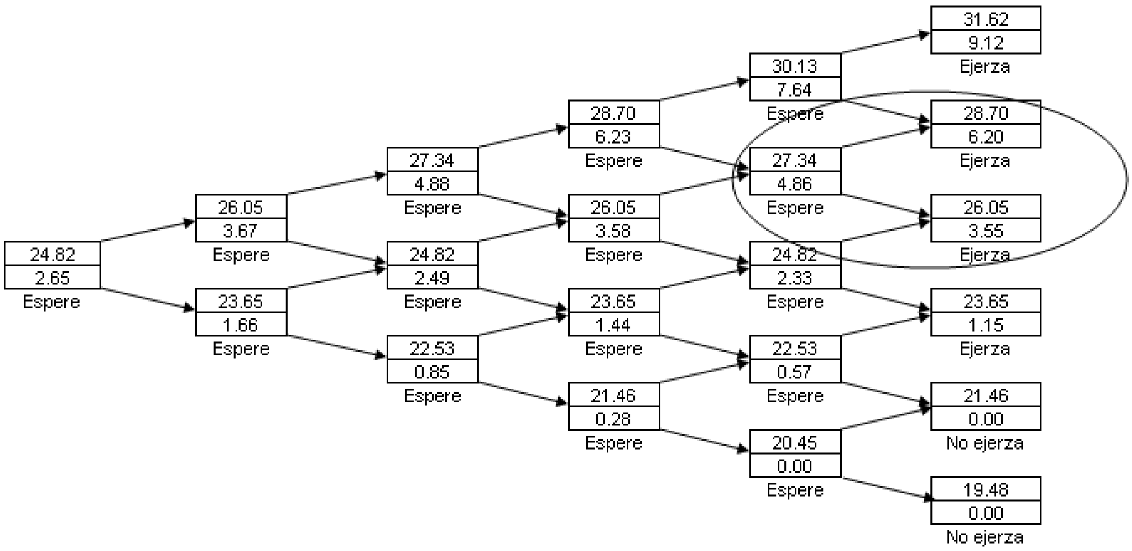
$$C_t=e^{-\hat{r}\delta t}\left(qC_u+(1-q)C_d\right)=e^{-0.0308*0.01825}\left(0.4937*\$6.2+0.5063*\$3.55\right)=\$4.86$$

En ese caso es conveniente esperar. Es claro que si el precio hubiese sido de \$28 (y no \$27.34) en ese momento hubiese sido más conveniente ejercer la opción.

Este procedimiento se repite para cada uno de los posibles precios y periodos ($t=4,3,2,1,0$) obteniendo así el valor de la opción call.

En la Gráfica 9 se observa la valoración de la opción. En el cuadro superior se muestra el precio y en el inferior el valor de la opción en cada momento así como la decisión racional que se debe tomar en cada periodo: ejercer, no ejercer o esperar.

Gráfica 9. Valoración de una opción call americana (General Motors)



El valor de esta opción es de $2.85. En el óvalo se observa el momento particular que analizamos.

Empero, el procedimiento de comparar el valor de ejercer la opción inmediatamente y el valor de esperar se debe emplear para todos los posibles valores que tome la acción en $t = 0,1,2,3$ y 4.

7. Referencias.

Cox, John C, Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein. 1979. "Option pricing: A simplified approach." Journal of Financial Economics, 7:3, pp. 229-63.

Hull, John. 2006. Options, futures, and other derivatives. Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall.