Taller #3
Econometría 06216

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés.

Notas:

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller puede subirse en la plataforma Moodle hasta la 7:10 del 2 de febrero de 2009. ***Sólo se recibirán talleres en formato pdf.*** Cualquier otro formato no será calificado.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar ***únicamente*** el trabajo de la pareja.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con **todos** ellos.

Un microeconomista para su tesis doctoral desea estimar cierta función de utilidad de los consumidores de la región de Konoha. El modelo consta de dos variables observables, el dinero real M_i medido en miles de luanes a precios constantes de 1998 y el número de computadores que posee una familia C_i, y un índice que le permitió tener una proxy de la utilidad, U_i Para esto cuenta con la información de 20 familias consignadas en el archivo T3-01-09.xls. La forma funcional que usted necesita emplear, necesita contener tanto una sustitución parcial de los bienes, como una complementariedad parcial de los mismos.

1. De acuerdo con la información anterior conteste:
   a. Plantee la forma funcional que más se ajuste a lo requerido por el microeconomista. Explique cómo esta capta la sustitución y la complementariedad.
   b. Plantee el modelo estadístico que debe estimar e intérprete los coeficientes *a priori,* al igual que sus signos esperados.

2. De acuerdo con la información consignada en el archivo T3-01-09.xls. Conteste las siguientes preguntas:
   a. Escriba las matrices $X^T X$ y $X^T y$, explicando claramente a que pertenece cada componente.
   b. Estime los coeficientes:

El jefe del departamento de mercadeo de una cadena de almacenes espera que las ventas en millones de pesos, Y_t, sigan la siguiente relación:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_4 X_{3t} + \beta_5 X_{4t} + \varepsilon_t$$

Donde X_{1t} representa el logaritmo del tiempo de propaganda realizada en televisión durante el período t (medido en minutos), X_{2t} representa el número de ofertas realizadas en el período t, X_{3t} representa el número de devoluciones realizadas (medida en 100 devoluciones), y X_{4t} representa el porcentaje de descuento ofrecido. Se tiene la siguiente información:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 50 & 15 & 25 & 50 & 10 \\ 15 & 8 & 12 & 20 & 7 \\ 25 & 12 & 26 & 30 & 10 \\ 50 & 20 & 30 & 27 & 21 \\ 10 & 7 & 10 & 21 & 25 \end{bmatrix} \qquad X^T Y = \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \\ 32 \\ 16 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad Y^T Y = 109{,}53$$

El jefe del departamento argumenta que existe la siguiente relación:

$$\beta_2 + 2\beta_4 = 1 + \beta_5$$

3. A partir de la información proporcionada:
   a. Muestre como sería el nuevo modelo teniendo en cuenta la información proporcionada por el jefe del departamento.
   b. Estime los parámetros $\beta^T = (\beta_1 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5)$ del nuevo modelo por medio del método de MCO (muestre todo el procedimiento)

4. De acuerdo a sus resultados en el numeral anterior:
   a. Interprete el significado de los coeficientes del nuevo modelo
   b. Estime la σ^2

5. Considere un modelo de regresión cualquiera. Desarrolle analíticamente que cambios se introducen al modelo, el conocimiento de la media del error, cuando ésta es diferente de cero, pero constante. Además explique las consecuencias para la estimación de los coeficientes, en caso de asumir media cero en estas circunstancias.

Universidad Icesi Departamento de Economía

Econometría jcalonso@icesi.edu.co Sem01-2009

Taller #3

Respuestas Sugeridas

Econometría 06216

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés.

Notas:

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller puede subirse en la plataforma Moodle hasta la 7:10 del 2 de febrero de 2009. ***Sólo se recibirán talleres en formato pdf.*** Cualquier otro formato no será calificado.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar ***únicamente*** el trabajo de la pareja.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con **todos** ellos.

Un microeconomista para su tesis doctoral desea estimar cierta función de utilidad de los consumidores de la región de Konoha. El modelo consta de dos variables observables, el dinero real M_i medido en miles de luanes a precios constantes de 1998 y el número de computadores que posee una familia C_i, y un índice que le permitió tener una proxy de la utilidad, U_i Para esto cuenta con la información de 20 familias consignadas en el archivo T3-01-09.xls. La forma funcional que usted necesita emplear, necesita contener tanto una sustitución parcial de los bienes, como una complementariedad parcial de los mismos.

1. De acuerdo con la información anterior conteste:
   a. Plantee la forma funcional que más se ajuste a lo requerido por el microeconomista. Explique cómo esta capta la sustitución y la complementariedad.
   Respuesta sugerida:
   $$U_i = AM_i^{\alpha}C_i^{\beta}$$
   La función Cobb-Douglas capta tanto la sustitución, como la complementariedad de dos bienes. Esto se puede ver en su forma convexa asintótica a los dos ejes. Las asíntotas indican que sin importar la cantidad que posee de un bien, siempre necesitara del otro. Es decir que la sustitución es parcial pues aunque se puede mover a lo largo de la curva de utilidad sustituyendo un bien por otro, su canasta siempre estará compuesta por cantidades positivas de ambos bienes. Además, esta función muestra que el individuo prefiere canastas intermedias de bienes que los extremos, por las utilidades marginales decrecientes.

   b. Plantee el modelo estadístico que debe estimar e intérprete los coeficientes *a priori,* al igual que sus signos esperados.
   Respuesta sugerida:

Linealizando esta forma funcional, tenemos el siguiente modleo estadítico:

$$U_i = AM_i^{\alpha}C_i^{\beta}$$
$$\ln(U_i) = \ln(A) + \alpha\ln(M_i) + \beta\ln(C_i)$$

Reparametrizando el intercepto y añadiendo el término error, tenemos:

$$\ln(U_i) = \delta + \alpha\ln(M_i) + \beta\ln(C_i) + \varepsilon_i$$

Interpretación de los coeficientes:

$\hat{\delta}$ No tiene interpretación económica. No obstante $e^{\hat{\delta}}$ corresponde a una medida de sensibilidad de la utilidad ante cambios en los bienes. Se espera que sea positivo.

$\hat{\alpha}$ Ante un incremento del 1% en M_i la utilidad se incrementa en $\hat{\alpha}$ por ciento. Se espera que sea positivo. Es la elasticidad utilidad-dinero.

$\hat{\beta}$ Ante un incremento del 1% en C_i la utilidad se incrementa en $\hat{\beta}$ por ciento. Se espera que sea positivo. Es la elasticidad utilidad-computadora.

2. De acuerdo con la información consignada en el archivo T3-01-09.xls. Conteste las siguientes preguntas:

   a. Escriba las matrices $X^T X$ y $X^T y$, explicando claramente a que pertenece cada componente.
   Respuesta sugerida:
   Inicialmente es necesario construir la nueva matriz $X^T X$.

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum(\ln M_i) & \sum(\ln C_i) \\ - & \sum(\ln M_i)^2 & \sum(\ln M_i)\cdot(\ln C_i) \\ - & - & \sum(\ln M_i)^2 \end{bmatrix}$$

Todas las entradas de la matriz pueden ser calculadas de la siguiente forma:

$\sum(\ln M_i)$=218.77
$\sum(\ln C_i)$=187.62

$\sum(\ln M_i)^2$ =2422.76
$\sum(\ln M_i)\cdot(\ln C_i)$=2054.55
$\sum(\ln C_i)^2$ =1764.59

Entonces se tiene que $X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 218.77 & 187.62 \\ - & 2422.76 & 2054.55 \\ - & - & 1764.59 \end{bmatrix}$.

Ahora es necesario construir la matriz $X^T y = \begin{bmatrix} \sum(\ln U_i) \\ \sum(\ln U_i)\cdot(\ln M_i) \\ \sum(\ln U_i)\cdot(\ln C_i) \end{bmatrix}$, cada una de las entradas viene dada por las siguientes sumatorias:

$\sum(\ln U_i) = 218.82$

$\sum(\ln U_i)\cdot(\ln M_i) = 2734.38$

$\sum(\ln U_i)\cdot(\ln C_i) = 2337.16$

Por lo tanto $X^T y = \begin{bmatrix} 248.82 \\ 2734.38 \\ 2337.16 \end{bmatrix}$.

b. Estime los coeficientes:

Respuesta sugerida:

Ahora ya se puede calcular los coeficientes utilizando la siguiente fórmula:

$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$, donde

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 20.46 & -0.22 & -1.92 \\ - & 0.04 & -0.02 \\ - & - & 0.23 \end{bmatrix}$$

Remplazando en la fórmula se tiene que:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} 20.46 & -0.22 & -1.92 \\ - & 0.04 & -0.02 \\ - & - & 0.23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 248.82 \\ 2734.38 \\ 2337.16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.91 \\ 0.39 \\ 0.46 \end{bmatrix}$$

El jefe del departamento de mercadeo de una cadena de almacenes espera que las ventas en millones de pesos, Y_t, sigan la siguiente relación:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_4 X_{3t} + \beta_5 X_{4t} + \varepsilon_t$$

Donde X_{1t} representa el logaritmo del tiempo de propaganda realizada en televisión durante el período t (medido en minutos), X_{2t} representa el número de ofertas realizadas en el período t, X_{3t} representa el número de devoluciones realizadas (medida en 100 devoluciones), y X_{4t} representa el porcentaje de descuento ofrecido. Se tiene la siguiente información:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 50 & 15 & 25 & 50 & 10 \\ 15 & 8 & 12 & 20 & 7 \\ 25 & 12 & 26 & 30 & 10 \\ 50 & 20 & 30 & 27 & 21 \\ 10 & 7 & 10 & 21 & 25 \end{bmatrix} \quad X^T Y = \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \\ 32 \\ 16 \\ 17 \end{bmatrix} \quad Y^T Y = 109{,}53$$

El jefe del departamento argumenta que existe la siguiente relación:

$$\beta_2 + 2\beta_4 = 1 + \beta_5$$

3. A partir de la información proporcionada:
   a. Muestre como sería el nuevo modelo teniendo en cuenta la información proporcionada por el jefe del departamento.

Una de las opciones es despejar β_2, y remplazarlo en el modelo inicial.

$\beta_2 = 1 + \beta_5 - 2\beta_4$

$$Y_t = \beta_1 + (1 + \beta_5 - 2\beta_4) X_{1t} + \beta_3 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_4 X_{3t} + \beta_5 X_{4t} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - X_{1t} = \beta_1 + \beta_3 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_4 (X_{3t} - 2X_{1t}) + \beta_5 (X_{1t} + X_{4t}) + \varepsilon_t$$

Renombrando las variables se obtiene:

$$W_t = \beta_1 + \beta_3 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_4 Q_t + \beta_5 Z_t + \varepsilon_t$$

Donde $W_t = Y_t - X_{1t}$, $Q_t = X_{3t} - 2X_{1t}$, y $Z_t = X_{1t} + X_{4t}$.

   b. Estime los parámetros $\beta^T = (\beta_1 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5)$ del nuevo modelo por medio del método de MCO (muestre todo el procedimiento)

Inicialmente, es necesario construir la nueva matriz $X^T X$.

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum 1/X_{2t} & \sum Q_t & \sum Z_t \\ & \sum (1/X_{2t})^2 & \sum (Q_t / X_{2t}) & \sum (Z_t / X_{2t}) \\ & & \sum (Q_t)^2 & \sum Q_t Z_t \\ & & & \sum (Z_t)^2 \end{bmatrix}$$

Todas las entradas de la matriz pueden ser calculadas de la siguiente forma:

$\sum Q_t = \sum(X_{3t} - 2X_{1t}) = \sum X_{3t} - 2\sum X_{1t} = 50 - 2(15) = 20$

$\sum(Q_t / X_{2t}) = \sum\{(X_{3t} - 2X_{1t})/X_{2t}\} = \sum(X_{3t}/X_{2t}) - 2\sum(X_{1t}/X_{2t}) = 30 - 2(12) = 6$

$\sum(Z_t / X_{2t}) = \sum\{(X_{1t} + X_{4t})/X_{2t}\} = \sum(X_{1t}/X_{2t}) + \sum(X_{4t}/X_{2t}) = 12 + 10 = 22$

$\sum(Q_t)^2 = \sum(X_{3t} - 2X_{1t})^2 = \sum(X_{3t})^2 - 4\sum X_{3t}X_{1t} + 4\sum(X_{1t})^2 = 27 - 4(20) + 4(8) = -21$

$$\sum Q_t Z_t = \sum \{(X_{3t} - 2X_{1t})(X_{1t} + X_{4t})\} = \sum X_{3t}X_{1t} + \sum X_{3t}X_{4t} - 2\sum (X_{1t})^2 - \sum X_{1t}X_{4t}$$
$$= 20 + 21 - 2(8) - 2(7) = 11$$

$$\sum (Z_t)^2 = \sum (X_{1t} + X_{4t})^2 = \sum (X_{1t})^2 + 2\sum X_{1t}X_{4t} + \sum (X_{4t})^2 = 8 + 2(7) + 25 = 47$$

Entonces se tiene que $X^T X = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 20 & 25 \\ 25 & 26 & 6 & 22 \\ 20 & 6 & -21 & 11 \\ 25 & 22 & 11 & 47 \end{bmatrix}$.

Ahora, es necesario construir la matriz $X^T w = \begin{bmatrix} \sum W_t \\ \sum (W_t / X_{2t}) \\ \sum W_t Q_t \\ \sum W_t Z_t \end{bmatrix}$, cada una de las entradas viene dada por las siguientes sumatorias:

$$\sum W_t = \sum (Y_t - X_{1t}) = \sum Y_t - \sum X_{1t} = 12 - 15 = -3$$
$$\sum (W_t / X_{2t}) = \sum \{(Y_t - X_{1t}) / X_{2t}\} = \sum (Y_t / X_{2t}) - \sum (X_{1t} / X_{2t}) = 32 - 12 = 20$$
$$\sum W_t Q_t = \sum \{(Y_t - X_{1t})(X_{3t} - 2X_{1t})\} = \sum Y_t X_{3t} - 2\sum Y_t X_{1t} - \sum X_{1t}X_{3t} + 2\sum (X_{1t})^2 = -38$$
$$\sum W_t Z_t = \sum \{(Y_t - X_{1t})(X_{1t} + X_{4t})\} = \sum Y_t X_{1t} + \sum Y_t X_{4t} - \sum (X_{1t})^2 - \sum X_{1t}X_{4t} = 27$$

Por lo tanto $X^T w = \begin{bmatrix} -3 \\ 20 \\ -38 \\ 27 \end{bmatrix}$.

Ahora ya se puede calcular los coeficientes utilizando la siguiente fórmula:
$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$, donde

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0302 & -0.0265 & 0.0172 & -0.0077 \\ -0.0265 & 0.0869 & -0.0128 & -0.0235 \\ 0.0172 & -0.0128 & -0.0326 & 0.0045 \\ -0.0077 & -0.0235 & 0.0045 & 0.0353 \end{bmatrix}$$

Remplazando en la fórmula se tiene que:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T w$$
$$= \begin{bmatrix} 0.0302 & -0.0265 & 0.0172 & -0.0077 \\ -0.0265 & 0.0869 & -0.0128 & -0.0235 \\ 0.0172 & -0.0128 & -0.0326 & 0.0045 \\ -0.0077 & -0.0235 & 0.0045 & 0.0353 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ 20 \\ -38 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4821 \\ 1.6670 \\ 1.0506 \\ 0.3366 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1405/948 \\ 1537/922 \\ 2967/2824 \\ 275/817 \end{bmatrix}$$

4. De acuerdo a sus resultados en el numeral anterior:
   a. Interprete el significado de los coeficientes del nuevo modelo

$\hat{\beta}_1 = -1.4821$ Este coeficiente no tiene interpretación económica

$\hat{\beta}_3 = 16670$ cuando las ofertas aumentan en 1% las ventas disminuirán en 16670/ X_{2t} pesos. (Asegúrese que usted entiende de donde sale este resultado, para esto efectúe la respectiva derivada)

$\hat{\beta}_4 = 1.0506$ Por cada 100 devoluciones realizadas durante el período t las ventas aumentan en 1.050.600 pesos.

$\hat{\beta}_5 = 0.3366$ Cuando los descuentos ofrecidos en el período t aumentan en un punto porcentual las ventas se incrementarán en 336.600 pesos.

   b. Estime la σ^2

$$S^2 = \frac{Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y}{n - k}$$

Para el modelo estimado, se tiene que:

$$Z^T W = \begin{bmatrix} -3 \\ 20 \\ -38 \\ 27 \end{bmatrix} \qquad Y^T Y = 109,53 \qquad \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \\ \hat{\beta}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,48206747 \\ 1,667028011 \\ 1,050637412 \\ 0,336596999 \end{bmatrix}$$

Al transponer el vector de los parámetros y multiplicarlo por $Z^T W$ se obtiene

$$\hat{\beta}^T Z^T W = 6,95065996$$

Por otro lado,

$$W^T W = \sum_{t=1}^{n} W_i^2 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - X_{1t})^2$$
$$= \sum_{t=1}^{n} (Y_t^2 - 2Y_t X_{1t} + X_{1t}^2)$$
$$= \sum_{t=1}^{n} Y_t^2$$
$$- 2\sum_{t=1}^{n} Y_t X_{1t} + \sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 = 109.53 - 2 * 25 + 8 = 67.53$$

Reemplazando valores se tiene que:

$$S^2 = \frac{67{,}53 - 6{,}95065996}{50 - 4}$$

Por lo tanto, la varianza estimada es

$$S^2 = 1.316942175$$

5. Considere un modelo de regresión cualquiera. Desarrolle analíticamente que cambios se introducen al modelo, el conocimiento de la media del error, cuando ésta es diferente de cero, pero constante. Además explique las consecuencias para la estimación de los coeficientes, en caso de asumir media cero en estas circunstancias.

Respuesta sugerida

Considere

$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$

Por tanto, su valor esperado será:

$E[Y_i] = \alpha + \beta X_i + \gamma$

$E[Y_i] = \alpha + \gamma + \beta X_i$

$E[Y_i] = \alpha^* + \beta X_i$

$\alpha^* = \alpha + \gamma$

Es así, que nuestro modelo queda:

$Y_i = \alpha^* + \beta X_i + \varepsilon_i^*$

En donde: $\alpha^* = \alpha + \gamma$ y $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i - \gamma$

Y al hallar el valor esperado del nuevo error:

$E(\varepsilon_i^*) = E(\varepsilon_i - \gamma) = \gamma - \gamma = 0$

El no incorporar esta información, se obtiene un problema de sesgo que se puede mostrar de la siguiente manera:

Dado que:

$E[\varepsilon_i^*] = 0$

$Var[\varepsilon_i^*] = \sigma^2$

$E[\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*] = 0$

Podemos concluir que:

$\hat{\alpha}^*$ es un estimador MELI de α^*

$\hat{\beta}^*$ también es un estimador MELI de β^*

$E[\hat{\alpha}^*] = \alpha^* = \alpha + \gamma \neq \alpha$

Es decir que la constante γ introduce un sesgo en la estimación del parámetro α