EL MAXIMO VALOR ESPERADO, COMO CRITERIO DECISORIO

ALFONSO BUSTAMANTE A.

Matemático Universidad del Valle. Magister en Ingeniería Industrial y de Sistemas. Universidad del Valle. Profesor Universidad del Valle - ICESI.

INTRODUCCION

La toma gerencial de decisiones cuenta hoy con el respaldo de una extensa bibliografía de Investigación de Operaciones y específicamente en Teoría y Toma de Decisiones. El criterio recomendado por los autores, para la elección de alternativa en condiciones de riesgo, se conoce con el nombre de MAXIMO VALOR ESPERADO DE LAS ALTERNATIVAS (MVE).

El criterio del máximo valor esperado establece que si el ente decisorio es "neutral" ante el riesgo, si su "función de utilidad" es lineal con respecto al dinero, entonces debe seleccionar la alternativa que presenta el máximo valor esperado.

Este artículo tiene una doble finalidad: presentar una sencilla demostración de la validez del criterio, y mostrar que el decidirse por una combinación de alternativas (caso típico de los portafolios de inversión) es consecuencia de una actitud "no neutral", ante el riesgo.

1 EL CRITERIO DEL MAXIMO VALOR ESPERADO

Considere un problema de decisión con alternativas $a_1, a_2, \ldots, a_m$, eventos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ y probabilidad de ocurrencia de éstos $p(\theta_1), p(\theta_2), \ldots, p(\theta_n)$. Si b_{ij} es el beneficio o pago por haber seleccionado la alternativa a_i habiéndose dado el evento θ_j, se define el valor esperado de la alternativa a_i, $VE(a_i)$, de la siguiente forma:

$$(1)\quad VE(a_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ p(\theta_j);\quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Entonces, se selecciona aquella alternativa que presente el máximo de los valores calculados. El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del criterio:

El Tesorero de una Compañía, ante un exceso de liquidez de 40 millones, analiza la posibilidad de invertir en acciones o en bonos, pero sabe que el VFFF[1] de su dinero depende del desenvolvimiento de la economía. La probabilidad de mejora de la economía es el 60%, de estabilidad el 20% y de desmejora es el 20%. La matriz de pago siguiente presenta los VFFF bajo cada esquema.

Estados / Estrategias	Mejora p= 0.6	Estable p= 0.2	Desmejora p = 0.2
Acciones (a_1)	48 M.	48.8 M	33.6 M.
Bonos (a_2)	44 M.	42.4 M	40.4 M.

De acuerdo con la ecuación 1 los valores esperados serán:
$VE(a_1) = 48(0.6) + 40.8(0.2) + 33.6(0.2) = 43.68$ M.
$VE(a_2) = 44(0.6) + 42.4\ (0.2) + 40.4(0.2) = 42.96$ M.

y por lo tanto debe seleccionar la alternativa de invertir en acciones, pues presenta el mayor valor esperado.

Con respecto a la afirmación anterior, caben los siguientes interrogantes:

1. No es posible que una combinación de las alternativas, consistente en invertir xM en acciones y (40-x)M en bonos conduzca a un mayor valor esperado?
2. En general, la utilización de un criterio que analiza individualmente el valor esperado de pago para cada alternativa y selecciona la de mayor valor esperado, ¿se fundamenta en el hecho cierto de que ninguna combinación de alternativas presentará un valor esperado mejor que el óptimo de las alternativas "individuales"?
3. Si la respuesta a las preguntas anteriores, es afirmativa por qué el portafolio de inversiones?

En la segunda sección de este artículo se ofrece una respuesta a cada pregunta. Por el carácter mismo de la tercera, la respuesta no es exhaustiva.

2. VALIDEZ DEL MVE COMO CRITERIO DECISORIO

Para el problema particular del ejemplo, y para el caso general, se demuestra enseguida que no hay una combinación de alternativas capaz de producir un valor esperado mayor que la seleccionada por el MVE.

2.1 Se sabe que, en condiciones idénticas de inversión, el VFFF de dos inversiones con montos p_0 y p_1 satisface la igualdad.

$$\frac{VFFF(p_1)}{p_1} = \frac{VFFF(p_0)}{p_0} \quad \text{y entonces,}$$

$$VFFF(p_1) = \frac{VFFF(p_0)}{P_0}\, p_1$$

1 Valor futuro de los flujos de fondos.

Supongamos que se invierten xM, $0 \leqslant x \leqslant 40$ M, en acciones y (40-x)M en bonos, en condiciones idénticas a las que prevalecen en la situación original. Haciendo $p_0 = 40M$ y $p_1 = xM$ y (40-x)M alternativamente, la matriz de pagos se transforma en la siguiente:

Estados / Estrategias	Mejora p= 0.6	Estable p= 0.2	Desmejora p= 0.2
a_1: x M en acciones	$\frac{48x}{40}$	$\frac{40.8x}{40}$	$\frac{33.6x}{40}$
a_2: (40x)M en bonos	$\frac{44(40-x)}{40}$	$\frac{42.4(40-x)}{40}$	$\frac{40.4(40-x)}{40}$

Por la aditividad del valor esperado tenemos entonces que,

$$VE(a_1 \cup a_2) = \frac{48x}{40}(0.6) + \frac{40.8x}{40}(0.2) + \frac{33.6x}{40}(0.2) +$$

$$\frac{44(40-x)}{40}(0.6) + \frac{42.4(40-x)}{40}(0.2) + \frac{40.4(40-x)}{40}(0.2), \text{ o sea}$$

$$VE(a_1 \cup a_2) = \frac{0.72x + 1718.4}{40}, \ 0 \leqslant x \leqslant 40.$$

Es fácil apreciar que como la función anterior no tiene puntos críticos en el intervalo considerado, pero es continua, el máximo se alcanza en un extremo del intervalo que es justamente x = 40M. Esto significa invertir todo el excedente en acciones, tal como lo indicaba el criterio del óptimo retorno esperado. Para este valor de x,

$$VE(a_1 \cup a_2) = \frac{0.72(40\ M) + 1718.4\ M}{40} = 43.68\ M$$

En cuanto al caso general, empecemos puntualizando que la aplicación de este criterio conduce a resultados correctos sólo si el ente decisorio no está animado de un objetivo distinto al de la optimización del pago monetario esperado. Esto significa, en términos de teoría de la utilidad, que para tal persona un incremento constante de, por ejemplo, un millón de pesos, tiene asociado un incremento constante en utilidad. Como tendremos oportunidad de apreciarlo posteriormente, es posible que al reflexionar sobre las consecuencias de seleccionar la alternativa fijada por este criterio, el ente decisorio la rechace atemorizado ante la idea de que prevalezca un estado de la naturaleza que convertiría a la alternativa más atractiva, según este criterio, en la más inconveniente para sus propósitos. Esto sólo significa que hasta un pequeño riesgo involucrado con tal alternativa puede ser de vital importancia para el ejecutivo. En tal caso, su "función de utilidad" no presenta la característica lineal mencionada arriba y el ejecutivo debe analizar su problema desde una óptica diferente.

2.2. DEMOSTRACION DEL CASO GENERAL

Supongamos que, para una inversión de monto p_0, las condiciones mencionadas están satisfechas y que el análisis individual de las alternativas conduce a

(1) $VE(a_t) \geqslant VE(a_j)$, $j = 1,2, \ldots, m$, ésto es,

el criterio selecciona como óptima la t-ésima alternativa. Para demostrar que ninguna combinación de alternativas presenta un mejor valor esperado que el de a_t, supongamos también una inversión de monto α_i para cada alternativa $i=1,2, \ldots, m$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = p_0$$

Denotado por p'_{ij}, el pago de la i-ésima alternativa dado el j-ésimo evento y siendo α_i la inversión comprometida, se tiene la relación:

$$p'_{ij} = \frac{p_{ij}\,\alpha_i}{p_0}$$

La combinación $\bigcup_{i=1}^{m} a_i$ de las alternativas tiene el siguiente valor esperado:

$$VE\left(\bigcup_{i=1}^{m} a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} VE(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} p'_{ij} \quad p\,\theta_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij} \quad \alpha_i}{p_0} \quad p(\theta_j) \right)$$

$$= \frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \; p(\theta_j)$$

$$= \frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \quad VE(a_i)$$

Puesto que la alternativa a_t satisface (1), se tiene que

$$\frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \; VE(a_i) \leqslant \frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \; VE(a_t)$$

$$= \frac{1}{p_0} VE(a_t) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

$$VE\left(\bigcup_{i=1}^{m} a_i\right) \leqslant VE(a_t)$$

2.3 En cuanto al tercer interrogante planteado, la respuesta se encuentra en la actitud del inversionista típico: si bien es cierto que procura obtener el máximo retorno esperado posible de su inversión, también es cierto que no está dispuesto, en general, a ignorar un posible *gran riesgo de no lograr* su objetivo de valor esperado.

Considérense por ejemplo estas distribuciones de porcentaje esperado de retorno sobre la inversión:

I

Retorno (%)	Probabilidad
18	0.2
20	0.6
22	0.2

II

Retorno (%)	Probabilidad
-10	0.1
0	0.1
10	0.25
20	0.35
60	0.20

La tasa esperada de retorno es en cada caso:

VE(% I) = 20%
VE(%II) = 20.5%

Sin embargo, una apreciable proporción de inversionistas se inclinaría por la alternativa I, en virtud del mayor riesgo involucrado en la alternativa II. (Suponiendo la tasa mínima de retorno en 20%, es prudente considerar una probabilidad de 0.45 de estar por debajo de dicha tasa, por ejemplo). Una elección como ésta deja de lado el MVE como criterio decisorio, suponiendo claro está que la matriz de pagos es la adecuada.

CONCLUSIONES

El criterio de MVE garantiza que la elección adelantada es la mejor desde el punto de vista del beneficio esperado, siempre que la medida de tal beneficio esté reflejada con precisión en la matriz de pagos. Cuando la alternativa seleccionada no coincide con la que estipula el criterio MVE, se puede asegurar que en la decisión se involucró un elemento adicional (interés personal en favorecer una alternativa, actitud personal ante el riesgo, etc) que hace que la función de utilidad no sea lineal con el dinero. La teoría de la utilidad proporciona técnicas para determinar la nueva función, con la cual la matriz de pagos se transforma en una nueva matriz que refleja adecuadamente la función de utilidad. En tal caso, el MVE selecciona la alternativa que involucra el elemento adicional mencionado antes.