

**SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN A
ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

PATRICIA MARGOT PISSO MAZABUEL

**UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI**

2017

**SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN A
ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

PATRICIA MARGOT PISSO MAZABUEL

**Proyecto de investigación presentado como requisito para optar el título de
Magister en Educación**

Director de Tesis:

PHD. YILTON TIASCOS FORERO

**UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI**

2017

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Yilton Riascos Forero, por su conocimiento compartido, especialmente por estar atento a resolver mis inquietudes en el momento justo, además por ser un amigo que siempre me brinda su apoyo de manera incondicional en la consecución de proyectos y metas.

A los estudiantes y comunidad educativa de la Institución Educativa Técnica Comercial Las Américas de la ciudad de Cali, Valle del Cauca, por permitir la realización de esta investigación brindando su tiempo y espacios.

A los profesores de la Maestría en Educación de la Universidad ICESI por sus enseñanzas, sugerencias y conocimientos compartidos.

A mi padre, hermanas y sobrinos por su apoyo y acompañamiento en todos y cada uno de mis logros y caminos recorridos.

A Natalia mi hija, quien es parte fundamental en los caminos que decido recorrer y por quererme siempre...

A todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron al desarrollo del trabajo.

Contenido

	Pág.
Resumen.....	12
Abstract.....	13
Introducción	14
Capítulo 1. Un Problema y un método.....	16
1.1 Contextualización y planteamiento del problema de investigación.....	16
1.2 Justificación y antecedentes	20
1.3 Objetivos.....	26
1.3.1 Objetivo general.....	26
1.3.2 Objetivos específicos	26
Capítulo 2. Marco teórico	27
2.1 Factorización de polinomios.....	28
2.2 La geometría como recurso didáctico del álgebra	30
2.3 Sistemas de representación	33
2.4 Pensamiento matemático	35
2.5 Representar y modelar en matemáticas.....	38
2.6 Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional	39
2.7 Campo didáctico	41
2.7.1 Modelo teórico a priori	41
2.7.2 Tareas matemáticas	43
2.7.3 Materiales manipulativos en matemáticas	46
2.7.4 Secuencia didáctica.....	49

2.7.5 Estado del arte sobre secuencias didácticas	50
2.7.6 Evaluación del aprendizaje	51
Capítulo 3. Marco metodológico	53
3.1 Tipo de investigación.....	53
3.2 El contexto	53
3.3 Fases de la investigación.....	56
3.4 Instrumentos.....	57
3.4.1 Prueba diagnóstica	57
3.4.2 Secuencia didáctica.....	59
3.4.3 Rejilla.....	62
Capítulo 4. Diseño de la secuencia didáctica “construyendo rectángulos algebraicos”	63
4.1 Descripción general de las tareas matemáticas	66
4.1.1 Descripción de la primera tarea	66
4.1.2 Descripción de la segunda tarea.....	67
4.1.3 Descripción de la tercera tarea	69
4.1.4 Descripción de la cuarta tarea	70
4.2 Elaboración y uso de material manipulable	71
Capítulo 5. Resultados y análisis	72
5.1 Dificultades de los estudiantes relacionadas con el pensamiento variacional	72
5.2 Implementación de la secuencia didáctica.....	77
5.3 Análisis de los resultados de la implementación de la secuencia didáctica.....	80
5.3.1 Análisis tarea 1	80
5.3.2 Análisis tarea 2.....	87

5.3.3 Análisis tarea 3.....	91
5.3.4 Análisis tarea 4.....	99
5.4 Rejilla de observación.....	105
6. Conclusiones.....	109
Bibliografía	114
Anexos	120

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1. Dificultades en Matemáticas Grados 3°, 5° Y 9° Institución Educativa Técnica Comercial las Américas 2015	24
Tabla 2. Dificultades de los estudiantes de la ITCLA de grado 5° y 9°	54
Tabla 3. Caracterización según sexo y edad de los estudiantes participantes	55
Tabla 4. Organización pensamientos matemáticos en la secuencia didáctica "Construyendo rectángulos algebraicos"	61
Tabla 5. Organización de los subprocesos según Estándares Básicos de 7° a 9° sobre pensamiento variacional.....	65
Tabla 6. Estructura de la primera tarea	67
Tabla 7. Estructura de la segunda tarea	68
Tabla 8. Estructura de la tercera tarea.....	69
Tabla 9. Estructura de la cuarta tarea.....	70
Tabla 10. Tipos de representaciones algebraicas del perímetro y área de figuras del punto 1 de la prueba diagnostico.....	75
Tabla 11. Cronograma de fases del diseño implementación de la secuencia didáctica” Construyendo rectángulos algebraicos”.....	78
Tabla 12. Asignación de los grupos a cada espacio del apartamento de la pregunta dos.....	84
Tabla 13. Rejilla de observación.....	106
Tabla 14. Rejilla de observación.....	¡Error! Marcador no definido.

Lista figuras

	Pág.
Figura 1. Pruebas Saber 11: lectura crítica, matemáticas e inglés Institución Educativa Técnica Comercial las Américas, sede central jornada mañana	22
Figura 2. Competencias Matemáticas, Institución Educativa Técnica Comercial las Américas	23
Figura 3. Representación gráfica de la proposición 1	31
Figura 4. Representación gráfica de la proposición 4.....	32
Figura 5. Organización del Modelo Teórico a Priori.....	43
Figura 6. Esquemas de las tareas	45
Figura 7. Pregunta uno, prueba diagnóstica.....	58
Figura 8. Representación gráfica de la región rectangular	68
Figura 9. Primera Actividad de la tercera tarea	69
Figura 10. Material manipulable: figuras geométricas	71
Figura 11. Distribución por categorías, de las dificultades en las figuras del primer ítem de la prueba diagnóstica.....	73
Figura 12. Distribución de las formas de relacionar operaciones de números con la construcción de modelos algebraicos del perímetro y el área de regiones poligonales por estudiantes de grado 8°	76
Figura 13. Forma de respuesta general de los estudiantes de la categoría R1.	76
Figura 14. Disposición de los estudiantes durante la implementación de la secuencia didáctica en el aula.....	79
Figura 15. Apartamento modelo; secuencia didáctica	82

Figura 16. Diseño de planos de los estudiantes de grado 8-3	82
Figura 17. Respuesta del Grupo G1 en relación a referenciar los espacios del apartamento que ocupan mayor y menor área	85
Figura 18. Respuesta del Grupo G3 en relación a referenciar los espacios del apartamento que ocupan mayor y menor área	85
Figura 19. Solución a la tarea 3 Categoría C21	88
Figura 20. Solución a la tarea 3 Categoría C22	89
Figura 21. Solución a la tarea 3 Categoría C23	90
Figura 22. Otros diseños de regiones equivalentes al presentado en la tarea 2	91
Figura 23. Estudiantes de octavo realizando la tarea 3	92
Figura 24. Diseño de áreas rectangulares cerradas con la herramienta de trabajo	93
Figura 25. Desarrollo de la tarea 3 por un estudiante	93
Figura 26. Gráfica estadística Categoría C31	94
Figura 27. Gráfica estadística de promedios de registros categoría C31	95
Figura 28. Gráfica estadística Categoría C32	96
Figura 29. Gráfica de estadística de Promedio de registros categoría C32	96
Figura 30. Registros erróneos de las representaciones algebraicas del largo y el ancho	97
Figura 31. Errores frecuentes en la representación de lados de las regiones rectangulares	97
Figura 32. Gráfica de la Categoría C33, tarea 3	98
Figura 33. Desarrollo de la tarea 4, estudiantes grado octavo	100
Figura 34. Desarrollo tarea 4, categoría C41	101
Figura 35. Desarrollo tarea 4, cambio de variables	102

Figura 36. Ejemplo de solución tarea 4	103
Figura 37. Ejemplo Categoría C43	104

Lista de anexos

	Pág.
Anexo A. Prueba diagnóstica.....	120
Anexo B. Secuencia didáctica “Construyendo rectángulos algebraicos”	121
Anexo C. Consentimiento informado	131
Anexo D. Rejilla de observación	132

Resumen

En este trabajo se desarrolla material manipulativo e integra diferentes sistemas de representación de área de regiones rectangulares cerradas, con el propósito de fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional enfatizando en la construcción del concepto de factorización de polinomios por parte de estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Técnica Comercial las Américas de la ciudad de Cali. Para ello se diseña, aplica y evalúa la implementación de una secuencia didáctica denominada “construyendo rectángulos algebraicos”.

El diseño incorpora el Modelo Teórico A Priori (MTAP) en cuatro tareas matemáticas organizadas de forma intencional (García, y otros, 2013), procurando la movilización de diferentes registros de áreas de regiones rectangulares visualizados con material manipulable (Salazar, Jiménez, & Mora, 2013).

El análisis de los resultados que permite establecer la pertinencia de los sistemas de representación de regiones rectangulares como medio para la construcción del concepto de factorización de polinomios (Duval, 1999) (Fernández, 1999).

Esta forma de aproximar el concepto, permite identificar aprendizajes que comprometen procesos matemáticos como modelar y representar de forma dinámica; además, se evidencian cambios positivos en la actitud de los estudiantes en relación a las matemáticas.

Las limitaciones de esta estrategia están por el orden de las restricciones del grado y los coeficientes de los polinomios para ser factorizados.

Palabras clave: Tareas matemáticas, sistemas de representación; material manipulativo, pensamiento variacional y factorización de polinomios

Abstract

In this work, manipulative material is developed and different representation systems of closed rectangular regions are implemented, with the purpose of strengthening the development of variational thinking, emphasizing the construction of the polynomial factorization concept by eighth grade students of the Institution. Educative Technical Commercial Las Americas of the city of Cali. For this, a didactic sequence called "constructing algebraic rectangles" is designed, implemented and evaluated.

The design incorporates the A Priori Theoretical Model (MTAP) in four intentionally organized mathematical tasks (García, and others, 2013), seeking the mobilization of different records of areas of rectangular regions visualized with manipulable material (Salazar, Jimenez, & Mora, 2013).

The analysis of the results that allows to establish the relevance of the systems of representation of rectangular regions as a means for the construction of the concept of factorization of polynomials, (Duval, 1999) (Fernández, 1999).

This way of approaching the concept, allows identifying learning that involves mathematical processes such as modeling and representing dynamically; In addition, there are positive changes in the attitude of students in relation to mathematics.

The limitations of this strategy are in the order of the degree restrictions and the coefficients of the polynomials to be factored.

Keywords: Mathematical tasks, representation systems; manipulative material, variational thinking and factoring of polynomials

Introducción

Esta investigación es el resultado del esfuerzo por dar respuestas a una serie de interrogantes que la autora se ha hecho sobre la incidencia de la actitud y la disposición del estudiante para enfrentar las actividades y fines que se plantean para el desarrollo de saberes y competencias matemáticas en el Sistema Escolar Colombiano.

Para ello, centra la atención en los procesos de enseñanza del álgebra escolar, específicamente en los relacionados con el pensamiento variacional, que involucra el manejo del lenguaje algebraico para la modelación y representación de situaciones de contexto real y matemático (ideal).

Teniendo en cuenta que algunas dificultades son producto de la forma de plantear este proceso en el aula de clase con estrategias poco centradas en el estudiante, se diseñó una secuencia didáctica que incorpora los sistemas de representación del área de regiones rectangulares a partir de material manipulativo elaborado por los propios estudiantes.

El propósito de esta estrategia es favorecer el pensamiento variacional fortaleciendo la construcción del concepto de factorización de polinomio de grado dos, haciendo partícipe al estudiante de su propio aprendizaje a través de actividades que le permitan transitar entre registros, movilizándolo sus conocimientos, habilidades y competencias.

Para determinar la efectividad de este diseño didáctico, se evalúa la implementación con el fin de establecer aspectos a mejorar y destacar aquellos que fueron pertinentes a los aprendizajes de los estudiantes.

La descripción de esta investigación se presenta en seis capítulos:

En el capítulo uno se hace una presentación general del problema y su pertinencia desde la educación matemática, justificada a partir de resultados y análisis de pruebas e informes Nacionales sobre los estudiantes en relación con las competencias matemáticas.

El capítulo dos desarrolla el eje conceptual y teórico bajo el cual se sustenta la investigación, abordando los cinco elementos macros que se tienen en cuenta en el diseño de la secuencia didáctica: el modelo teórico del pensamiento variacional, las competencias matemáticas, comunicar y modelar, factorización de polinomios de grado dos y material manipulativo tangible.

En el capítulo tres, se presenta y describe la población de interés, así como los instrumentos y mecanismos para recolectar la información, posteriormente, en el capítulo cuatro, se describe de manera detallada el diseño de la secuencia didáctica y las tareas matemáticas.

En el capítulo cinco, se presenta un análisis detallado de la implementación de la secuencia didáctica, de forma cualitativa a través de análisis de categorías y continúa con el desarrollo de actividades puntuales, comparando las condiciones de antes y después de la implementación. Finalmente, en el capítulo seis aparecen las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

Capítulo 1. Un Problema y un método

1.1 Contextualización y planteamiento del problema de investigación

El álgebra es una disciplina cuyo desarrollo histórico culmina con el “álgebra moderna”; su organización permite la tipificación y aplicación de una estructura global de los problemas de su campo, la tematización de las estrategias utilizadas para resolverlos, la unificación y reducción de los elementos matemáticos requeridos, al igual que la posibilidad de construirlos a partir de métodos diferentes al de la generalización.

En la escuela su estudio aborda sutilmente la caracterización y operatividad de las expresiones algebraicas, para posteriormente enfocarse en la aplicación, planteamiento y solución de ecuaciones lineales (Valoyes & Malagón, 2006). Al incorporar esta disciplina en el grado octavo del sistema Básico de Educación Escolar Colombiano, recibe el nombre de álgebra elemental. Su objeto de estudio se centra en la “caracterización y operatividad del lenguaje algebraico, el desarrollo del cálculo de ecuaciones, y la resolución de problemas verbales” (Valoyes & Malagón, 2006, p 36); y su propósito fundamental consiste en enseñar al estudiante la utilización del lenguaje algebraico, de tal manera que le permita acercarse significativamente a la comprensión, tanto del uso como del procedimiento, de las funciones y los sistemas analíticos.

Consecuentemente, el aprendizaje del algebra está relacionado con el lenguaje matemático, lo que implica la construcción de niveles abstractos a partir de niveles más concretos del lenguaje (Herscovics, 1980), generando conflictos al transitar de un nivel a otro; por ejemplo, investigadores como Chevallard (1989), Bolea (2001), Gascón (2007) citados por Valoyes y Malagón (2006), plantean que estas dificultades se dan al presentar el álgebra como una aritmética

generalizada, dado que frecuentemente las expresiones algebraicas se derivan de los procedimientos aritméticos en la resolución de problemas de tipo verbal y luego se hace extensivo por medio del lenguaje algebraico.

Esta manera de llevar el álgebra al sistema escolar, da continuidad a obstáculos didácticos y epistemológicos en los estudiantes; además, desconoce el significado, sentido y necesidad del algebra, así mismo, omite la contraposición que existe entre actividades de tipo aritmético y tipo algebraico, estrictamente las relacionadas con el planteamiento y solución de problemas; específicamente aquellas que involucran la interpretación de los resultados obtenidos y el significado de símbolos propios del lenguaje matemático.

En particular, un concepto del algebra que se enseña en la escuela y satisface en gran medida las afirmaciones antes expuestas es la factorización de polinomios, vista por los mismos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas como la capacidad que el estudiante tiene para construir “expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada” (Ministerio de Educación Nacional -MEN, 2003, p 87), que induce a transitar de un registro algebraico a otro, careciendo de sentido y uso para el estudiante.

Las razones concretas y más relevantes que impiden la comprensión de la factorización de polinomios están dadas en términos de la estructura de las expresiones algebraicas, la variedad de métodos existentes, así mismo, la ausencia de sentido; la generalización incorrecta de propiedades aritméticas y la inapropiada aplicación de procedimientos (Socas, 1998). Este tipo de situaciones limita el concepto y reduce a llevar un polinomio a su representación factorizada a través de actividades que casi siempre consisten en aplicar reglas y algoritmos particulares a polinomios con características similares.

Otro aspecto a tener en cuenta lo plantean Castellanos y Obando (2009), al señalar que el aprendizaje de nuevos procesos matemáticos como la factorización de polinomios demandan claridad cognitiva de conocimientos previos, por tanto las dificultades que se presentan en dicho proceso son en su mayoría heredadas.

Tampoco se deben descartar las dificultades que se desprenden de las estrategias didácticas que el profesor plantea para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto matemático, la manera como organiza los ejes temáticos, los materiales y los recursos. En este sentido, existen diversos proyectos e investigaciones que proponen otras formas de lograr su comprensión en el aula de clase, minimizando las dificultades planteadas e identificando otras.

En esa línea, investigadores en educación matemáticas además de involucrar los aspectos antes mencionados, plantean estrategias con el objetivo de analizar, conjeturar, potencializar o desarrollar procesos mentales en torno a las estructuras algebraicas y el pensamiento variacional, desde una perspectiva pragmática, mostrando el conocimiento matemático como un constructo sociocultural, donde el sujeto y las relaciones que establece con los otros y su entorno son parte esencial en su concepción y desarrollo (Sfard, 2008).

Esta teoría de Sfard (2008) lleva implícito la enseñanza de una educación centrada en el aprendizaje, que tiene por protagonistas el sujeto que aprende y el significado de un objeto matemático que emerge de un sistema de praxis al manipular situaciones reales que se descomponen en diferentes registros orales, gestuales o escritos.

Usar estas diversas representaciones semióticas de los objetos matemáticos, se convierte en una capacidad mental y le permite al sujeto identificarlas, tratarlas y convertirlas en otro registro,

formando nuevos aprendizajes de tipo conceptual, estratégico, algorítmico y comunicativo (Duval, 1999).

Toda esta panorámica justifica la necesidad de buscar perspectivas didácticas que permitan al estudiante que enfrenta la comprensión de la factorización de polinomios, construir significado y sentido del proceso, aplicando métodos distintos. Lo anterior, como una forma de registrar o representar los modelos mentales que ofrece el pensamiento variacional, identificando y manipulando estructuras globales de campos de problemas de tipo contextual, científico o fenomenológico; tratando casos generales y estudiando condiciones de existencia en cuanto a posibles soluciones.

Todo lo expuesto confluye metodológicamente en la acción que define el MTAP en términos de contribuir a planificar el desarrollo coherente y progresivo del proceso de movilización de conceptos matemáticos cuando el estudiante resuelve tareas (García, y otros, 2013).

En ese orden de ideas, la presente investigación pretende diseñar, implementar y evaluar la implementación de una secuencia didáctica que movilice y de cuenta de los procesos cognitivos vinculados al pensamiento variacional a través de la construcción del proceso de factorización de polinomios de grado dos, involucrando material manipulativo y los sistemas de representación del área de una región rectangular; dirigida a estudiantes de grado octavo.

En concordancia con lo expuesto, la pregunta de investigación que moviliza este trabajo se plantea de la siguiente forma: ¿De qué manera una secuencia didáctica que involucra material manipulativo favorece el pensamiento variacional y permite acercarse a la construcción del concepto de factorización de polinomios de grado dos?

1.2 Justificación y antecedentes

Los Estándares Básicos y los Lineamientos Curriculares de Calidad del área de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN, 1998), referentes teóricos y pilares del Sistema Educativo Básico Colombiano, afirman que la enseñanza de las matemáticas propicia y fortalece el pensamiento lógico de los niños, al igual que colabora con el desarrollo de la ciencia y la tecnología; pero fundamentalmente, ayuda a solventar “la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos” (Ministerio de Educación Nacional -MEN, 2003, p. 46)

Para desarrollar estas habilidades mentales, todo estudiante debe pasar por niveles de complejidad asociados a procesos cognitivos relacionados con el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, ya sea en el campo numérico, espacial, métrico, aleatorio o variacional.

Adicionalmente, sugiere a los docentes que trabajan en esta disciplina, conocer y capacitarse sobre los nuevos paradigmas y supuestos que implican ver la matemática como “una actividad humana inserta en, y condicionada por, la cultura y la historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos” (Ministerio de Educación Nacional de Colombia - MEN, 1998, p. 7).

Así mismo, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, OCDE, citado en Rico (2006) contempla indicadores educativos que permiten medir el crecimiento sostenible en economía, empleo y nivel de vida de una sociedad. Para tal fin, crea el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos – PISA, que identifica los conocimientos, habilidades, destrezas, competencias y rasgos individuales que son relevantes para el bienestar

personal, social y económico de un sujeto de Estado; adicionalmente, los aspectos que conforman los indicadores de capital en educación (Rico, 2006). Para tal fin, analiza los resultados que se obtienen de una prueba estandarizada trianual aplicada a estudiantes de 15 años de edad de cada miembro y de países invitados, en componentes: lectura comprensiva, competencia matemática y científica.

El informe de estas pruebas externas aplicadas a estudiantes colombianos durante los últimos cuatro períodos muestra un avance significativo pero que aún son mínimos para estos componentes. En matemáticas por ejemplo, aunque los estudiantes están en la capacidad de interpretar situaciones que requieren inferencia directa, utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales y efectuar razonamientos directos e interpretación literal de resultados, “no pueden calcular el precio aproximado de un producto en una moneda distinta o comparar la distancia entre dos rutas alternas” (Programme for International Student Assessment - PISA, 2015, p. 1).

Consecuentemente las pruebas internas, Saber 11 de 2015, que realiza el Ministerio de Educación Nacional a los estudiantes que culminan la Educación Media, indican que inglés y matemática son las áreas con los niveles más bajos. En esta última el 70% de los estudiantes que las presentan se encuentran en un nivel insuficiente; también, las competencia que mayor dificultad manifiestan son la de modelación matemática y resolución de problemas (ICFES, 2016).

En la ciudad de Cali, el desempeño en las competencias matemáticas está por debajo de la media nacional, ocupando los últimos lugares. En particular, los resultados de estas pruebas en la Institución Educativa Técnica Comercial las Américas de esta localidad (figura 1), tienen un

comportamiento similar; los resultados más bajos se encuentran en matemáticas, inglés y lectura crítica, como se muestra en la siguiente gráfica (ICFES, 2016):

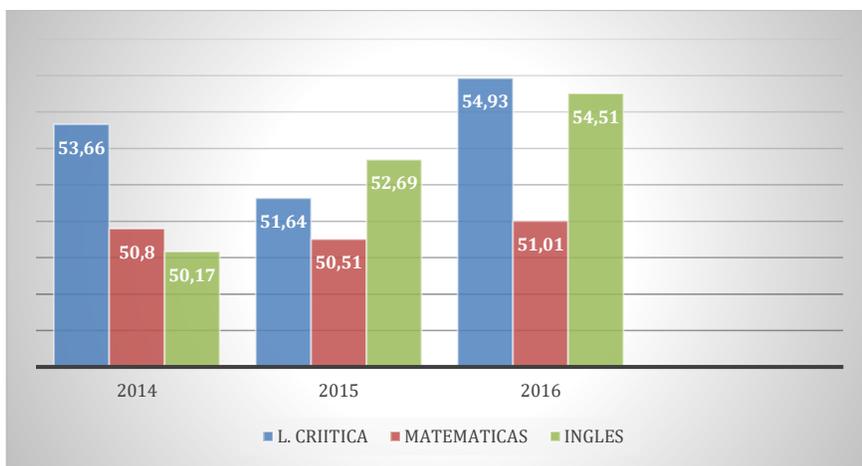


Figura 1. Pruebas Saber 11: lectura crítica, matemáticas e inglés Institución Educativa Técnica Comercial las Américas, sede central jornada mañana

Fuente: (ICFES, 2016)

Otro documento que permite identificar las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar es el Índice Sintético de Calidad Educativa ISCE, el cual pretende “crear alternativas de mejoramiento en cada institución por medio del trabajo en equipo de toda la comunidad educativa para que los niños y niñas aprendan más y mejor” (Ministerio de Educación Nacional - MEN, 2017, p. 1).

El ISCE evalúa a todas las instituciones educativas públicas y privadas de Colombia en una escala de uno a diez; midiendo el progreso, la eficiencia, el desempeño y ambiente escolar (ICFES, 2015).

En relación al área de matemáticas, el ISCE de la Institución en 2014 muestra que el 75% de los estudiantes de grado noveno está por debajo del nivel satisfactorio y el 25% en un nivel

mínimo e insuficiente; así mismo, las competencias matemáticas que mayor índice de insuficiencia poseen son la modelación y resolución de problemas.

Para el año 2015 los resultados de los niveles de insuficiencia de las competencias matemáticas en los grados 3°, 5° y 9° que este informe muestra son los siguientes:

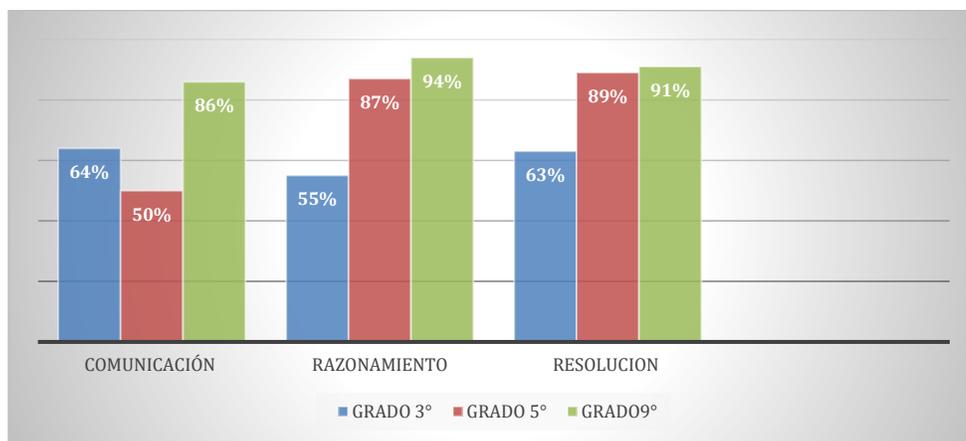


Figura 2. Competencias Matemáticas, Institución Educativa Técnica Comercial las Américas

Fuente: (ICFES, 2015)

La figura 2 permite afirmar que los estudiantes incrementan las dificultades de las tres competencias matemáticas a medida que avanza su nivel de escolaridad.

El ISCE también relaciona las debilidades más marcadas con respecto a procesos que involucran tanto los pensamientos matemáticos como las competencias matemáticas. La tabla 1 recoge las dificultades más marcadas en los grados 3°, 5° y 9° (ICFES, 2015).

La panorámica expuesta no está alejada de la realidad de la institución, en el aula de clase; la mayoría de los estudiantes muestran una actitud de desinterés, apatía, pereza, falta de compromiso e indisciplina cuando se trata de aprender matemáticas, además, entre más alto es el

nivel de escolaridad, es mayor la actitud displicente, al igual que las dificultades en la comprensión de un concepto matemático.

Tabla 1.

Dificultades en Matemáticas Grados 3°, 5° Y 9° Institución Educativa Técnica Comercial las Américas 2015

P\C Pensamiento variacional	Comunicación matemática	Razonamiento matemático	Resolución de problemas
Grado 3°	No reconocen equivalencias entre diferentes tipos de representaciones relacionadas con los números. Ni identifican atributos de objetos susceptibles de ser medidos	No ordenan objetos bidimensionales ni tridimensionales de acuerdo con atributos medibles.	No resuelve y formula problemas sencillos de proporcionalidad directa.
Grado 5°	No describe ni interpreta propiedades y relaciones de los números y sus operaciones	No describe ni argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas. No analiza relaciones de dependencia en diferentes situaciones	No usa representaciones geométricas y establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.
Grado 9°	No usa y relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. No reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos	No interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación. No interpreta y usa expresiones algebraicas equivalentes	No resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos

Las causas principales que generan esta situación son:

- El sistema de evaluación institucional SIELA, que promueve el año escolar cursado por los estudiantes con a lo más un área en desempeño bajo, que generalmente es matemática. Es así como cerca del 50% de la población estudiantil inicia su año sin alcanzar los desempeños académicos básicos en matemática.

- El área con el índice más alto de desaprobación durante los cuatro períodos del año escolar es matemáticas.

- Las prácticas docentes son poco atractivas y sin sentido para los estudiantes, dado que no sienten la necesidad de comprenderla y mucho menos encuentran razones para realizar las actividades planteadas por sus docentes (Comite de Calidad Institucion Educativa Técnica Comercial las Américas, 2016).

Esta realidad institucional, visualizada desde los resultados de las pruebas Saber, las estadísticas y planes de mejoramiento que muestran y trabajan en las semanas institucionales sugieren revisar las políticas institucionales de evaluación, pero también obliga a los docentes a proponer estrategias didácticas que involucren ambientes de aprendizaje que contengan situaciones “significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas” (Ministerio de Educación Nacional -MEN, 2003, p. 78).

En ese sentido y teniendo en cuenta que la sede central de la Institución Técnica Comercial las Américas tiene los niveles 8°, 9°, 10° y 11° de escolaridad en la sede central mañana, se plantea diseñar una secuencia didáctica que por un lado propicie el fortalecimiento del pensamiento variacional y procure la comprensión del concepto de factorización de polinomios, a través de la implementación de material tangible. Pero fundamentalmente tenga sentido y cambie la actitud

de los estudiantes de octavo frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula de clase.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Evaluar una secuencia didáctica que promueva el pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar dificultades que presentan estudiantes de grado octavo relacionados con el pensamiento variacional.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que movilice los procesos ligados al pensamiento variacional enfatizando en la construcción del concepto de factorización de polinomios.
- Evaluar la efectividad de la secuencia didáctica a través de resultados de los estudiantes de grado octavo en su aprendizaje de la matemática.

Capítulo 2. Marco teórico

La enseñanza del álgebra escolar responde a un carácter institucional (Gascón, 1993), dado que se presenta habitualmente como una disciplina que emerge de las generalizaciones de las operaciones aritméticas y su lenguaje consiste en la manipulación de reglas con mayor grado de abstracción (Valoyes & Malagón, 2006).

Esta apreciación se evidencia en la mayoría de textos escolares que se utilizan en el grado octavo; exclusivamente al realizar una revisión de la definición del concepto de factorización de polinomios se encuentran las siguientes:

- Es el proceso que consiste en hallar los factores primos en que se puede descomponer una expresión algebraica (Bedoya & Londoño, 1985)

- Es convertir la expresión algebraica al producto de otras expresiones algebraicas (Camargo, y otros, 2002).

Adicionalmente al buscar este concepto en internet, se encuentra:

- Factorizar un polinomio significa expresar el polinomio en forma de multiplicación (Rivera, 2017).

- Supongamos que $P(x)$ es un polinomio de grado n . Factorizar a $P(x)$ es expresarlo como producto de binomios de la forma $x - r$, es decir, escribirlo así:

$$P(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

Donde a es el coeficiente principal de $P(x)$, y los números x_1, x_2, \dots, x_n son n números que en general pueden ser reales o complejos, no necesariamente distintos entre sí y los cuales se deben encontrar (Rubio, 2016).

Las cuatro consultas realizadas a textos y páginas web, reducen la factorización a un producto de factores lineales, sin dar posibilidad a otro tipo de correspondencias. Una definición es la planteada por Rubio (2016) en la involucra factores irreducibles, extendiéndola al anillo de los números complejos; que generalmente se presentan de manera aislada e independiente.

Después de introducir el concepto, la mayoría de libros explican los diferentes métodos para factorizar polinomios con actividades de contexto matemático; empleando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de números reales.

2.1 Factorización de polinomios

El proceso de factorización aparece inicialmente con los árabes como construcción de áreas para dar solución a las ecuaciones canónicas x^2+bx+c ; siendo Al Khwarizmi el más representativo, seguido por Thabit, quien resuelve en forma general este tipo de ecuaciones (Jiménez, Salazar, & Mora, 2013).

Posteriormente en el siglo XVI, surge el lenguaje simbólico algebraico eliminando las representaciones geométricas para dar solución a ecuaciones, creando una ruptura entre las magnitudes geométricas y las expresiones algebraicas (Jiménez, Salazar, & Mora, 2013).

En el renacimiento, la solución de ecuaciones tiene gran auge, ejemplo de esta situación son los trabajos de Cardano, Descartes y Leibnitz; ya en el siglo XVII, aparece por primera vez el

concepto de factorización en la obra de Thomas Harriot “*Artis analyticae praxis*”; considerada la época dorada del álgebra ya que trasciende para dar solución a estructuras matemáticas como grupos, anillos y campos, sobresaliendo los trabajos de Lagrange, Gauss, Abel Galois; quienes muestran la supremacía de esta disciplina (Jiménez, Salazar, & Mora, 2013).

En 1770, inicia una corriente que promueve la rigurosidad, necesidad de abstracción, renacimiento del método axiomático y una visión de las matemáticas como actividad humana. Este panorama hace que esta disciplina sufra una transición del álgebra clásica de ecuaciones polinómicas al álgebra moderna de sistemas axiomáticos (Jiménez, Salazar, & Mora, 2013).

En el siglo XIX, aparece la teoría de anillos, finalizando el siglo, surgen dos ramas de esta teoría: los anillos conmutativos y los no conmutativos; siendo la primera, una consecuencia del estudio de la teoría de números algebraicos, la geometría algebraica y la teoría de invariantes (Jiménez, Salazar, & Mora, 2013).

Sin profundizar en la importancia y los usos de factorización en niveles más complejos del campo matemático, este concepto permite encontrar las raíces de un polinomio de grado n , más exactamente, el Teorema Fundamental del Álgebra demuestra que “*cualquier polinomio de grado n se puede descomponer en a lo más n factores primos*” (Herstein, 2006, p. 141).

En consecuencia, el concepto de factorización de polinomios, surge por la necesidad de encontrar soluciones de problemas relacionados con ecuaciones de segundo grado y luego se va disipando a través de diferentes estudios y trabajos matemáticos, hasta formular una teoría abstracta donde el concepto se incluye (Jiménez, Salazar, & Mora, 2013).

En términos de Sfard (2008), se puede afirmar que la factorización de polinomios, surge como la mayoría de los conceptos matemáticos, en su noción operacional y se va dirigiendo hacia una noción estructural; aterrizado en el sistema escolar como un proceso utilizado para simplificar expresiones algebraicas, encontrar la solución de ecuaciones e inecuaciones, que dan soluciones de contextos reales, o especiales para representar magnitudes escalares, tales como áreas, volúmenes, entre otras.

2.2 La geometría como recurso didáctico del álgebra

A lo largo de la historia de la matemática, la geometría ha posibilitado formas de representar e interpretar diferentes conceptos matemáticos. Los griegos del siglo VI antes de Cristo, utilizaron la geometría para representar operaciones de números reales por medio de la manipulación y construcción de segmentos de recta (Valoyes & Malagón, 2006).

Por ejemplo, sumar o restar los números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro o truncar un segmento la longitud del segundo. El producto de dos números representa el área de un rectángulo cuyos lados son los segmentos de recta que tienen por longitudes dichos números, análogamente, multiplicar los tres segmentos genera el volumen de un prisma. Así mismo, la división se representa por la razón entre los segmentos que los representan (Kline, 1992).

Otra aplicación de la geometría se presenta en el desarrollo del concepto de factorización por medio de la construcción de áreas de regiones rectangulares. En el segundo libro de *Elementos* de Euclides se demuestran varias proposiciones y teoremas “consistentes en hallar una figura con

la misma área de otra dada” (Sánchez, 2012, p. 78). A continuación se presentan dos de ellas, las cuales evidencian una representación geométrica de la factorización de polinomios.

Proposición 1: Si hay dos rectas a y l , y una de ellas l se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos (Euclides, 1991).

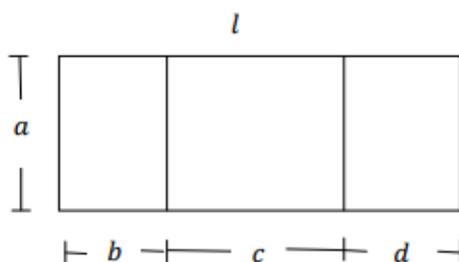


Figura 3. Representación gráfica de la proposición 1

Esta forma de expresar el área de la región rectangular, en la actualidad es vista como un caso de factorización llamado factor común, donde la altura del rectángulo total es la misma medida de la altura de todos los rectángulos que la integran; mientras su ancho corresponde a la suma de las longitudes de los segmentos que lo conforman.

La representación algebraica correspondiente al área de la región total al igual que su respectiva factorización está dada por la igualdad:

$$ab + ac + ad = a(a + b + d)$$

Proposición 4: Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos (Euclides, 1991).

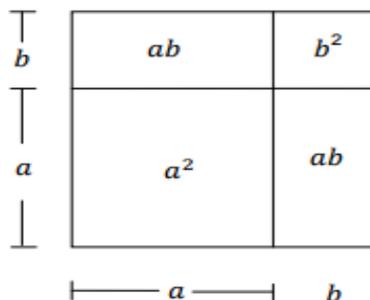


Figura 4. Representación gráfica de la proposición 4

Como se ve en la figura, y con argumentos similares, el área total de la región rectangular, se representa en lenguaje algebraico por:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Estos aportes de la geometría, se han convertido en un recurso didáctico en el ámbito escolar muy utilizados para la enseñanza del álgebra, específicamente en la resolución de ecuaciones de segundo grado y en sistemas de representación de la factorización de polinomios de segundo grado, con coeficientes positivos.

Ahondar en que situaciones concretas son evidentes y en cuáles no, permite entender el progreso del álgebra. Una aproximación de la construcción del proceso de factorización consiste en enseñar los casos viables, los factorizables y visibles. Una construcción con los estudiantes sobre este asunto, "...les permitiría ver por qué factorizar no es un proceso algorítmico, que requiere de entrenamiento y hay casos no factorizables. La pregunta sobre cómo se construye un cuadrado busca ilustrar este tipo de reflexión" (Sánchez, 2012, p. 90).

2.3 Sistemas de representación

Teniendo en cuenta el papel que juegan las representaciones del conocimiento matemático en el proceso de aprendizaje de la factorización de polinomios en los estudiantes, esta sección aborda algunas consideraciones que se tendrán en cuenta en esta investigación.

En primera estancia, la comprensión de un objeto matemático esta mediada por las conexiones que el estudiante hace entre las representaciones externas e internas que tiene de éste. Las representaciones externas o semióticas se presentan cuando el estudiante por medio de lenguaje común, algebraico, gráficas o figuras, manifiesta de forma asequible las imágenes mentales al respecto de una idea o un juicio (Duval, 1999).

Las representaciones internas o mentales son aquellas que se interiorizan y son observables por los comportamientos, actuaciones y lo que es expresado verbalmente a través de las representaciones externas, en otras palabras, las primeras hacen referencia a ideas físicas, configuraciones simbólicas coherentes, mientras que las segundas se refieren a configuraciones mentales (Duval, 1999).

La interpretación de las representaciones semióticas no es absoluta, dado que depende de las representaciones internas del sujeto y en términos de sistemas de representaciones estructurados, es decir, como conjunto de símbolos, ideas, o procedimientos matemáticos, con reglas o convenios establecidos para expresar propiedades o características de un concepto (Duval, 1999).

Duval (1999) considera que las representaciones mentales acerca de una representación semiótica fortalecen las capacidades cognitivas en el sujeto, más aún, la comprensión de un objeto

matemático se presenta cuando se dan como mínimo dos representaciones semióticas, además, al tener varias representaciones semióticas, Rico (2000) infiere que cada una solo involucra algunas de sus propiedades que a la vez posibilita o afecta la comprensión de otras. Fernández (1999) por su parte, define un sistema de representación como “un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto” (p.); en ese orden de ideas y para el caso concreto de esta investigación, se tienen en cuenta los siguientes sistemas de representación:

Sistema verbal: el lenguaje natural hace parte de la comunicación necesaria para el desarrollo de cualquier tipo de actividad humana, dentro del quehacer matemático como en cualquier campo específico de estudio tiende a caracterizarse por un matiz especializado. Para la elaboración de las actividades, el lenguaje natural es mediador y permite expresar los comportamientos y variaciones observados y representar situaciones del mundo real y de las matemáticas, modeladas por otros sistemas de representación (Gómez & Carulla, 1999).

El sistema de representación de ensayo – error: aplica la sustitución sistemática de valores numéricos para la incógnita, validando estos valores (Fernández, 1999). En este sistema se usan registros numéricos y aritméticos, fijando relaciones entre valores conocidos y desconocidos del en relación a los valores numéricos que toman las expresiones (Duval, 1999).

El sistema de representación gráfico: emplea un sistema de representación visual: físico, icónico, geométrico o diagramático que pueda representar relaciones entre expresiones algebraicas. En este caso exclusivamente, hacen parte las representaciones que se dan en el plano cartesiano o a escala, incluyendo su lenguaje y reglas sintácticas (Duval, 1999).

El sistema de representación simbólico: se caracteriza por la utilización de lenguaje exclusivamente abstracto, usualmente alfabético, hay ausencia del uso de objetos concretos como dibujos o gráficos. Aquí se utiliza el lenguaje propio del álgebra, las reglas que conforman la estructura algebraica; enfatizando en la estándar o desarrollada; la factorizada y la canónica, en las que se tienen en cuenta sus equivalencias y el significado de cada uno de sus parámetros, por tanto, el lenguaje algebraico permite conocer el significado de los símbolos y operaciones que se utilizan (Duval, 1999).

El sistema de representación gráfico-simbólico: es un híbrido que usa las relaciones del lenguaje simbólico, apoyado por un gráfico o un dibujo identificando los elementos que intervienen en las relaciones y a veces las propias relaciones. En la enseñanza del álgebra las expresiones factorizadas se relacionan con áreas de figuras geométricas o volúmenes de sólidos.

Dado que estas magnitudes escalares son ejemplos de dependencia entre diferentes elementos (lados, ángulos), a partir de la modelación de situaciones relacionadas con áreas se obtienen expresiones polinómicas cuadráticas, cuya representación en el lenguaje algebraico corresponde dos tipos de registro: suma de expresiones algebraicas y producto de factores lineales (Gómez & Carulla, 1999).

2.4 Pensamiento matemático

Los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos plantean el enfoque de sistemas en el diseño curricular de la matemática, de tal manera que su lenguaje, objetos operaciones y relaciones se tomen como “totalidades estructurales”; además, muestra las particularidades que

caracterizan a los sistemas simbólicos (registros escritos, orales y pictóricos) y los sistemas conceptuales (registros mentales). Desde este enfoque la enseñanza y aprendizaje de la matemática debe involucrar procesos generales, conocimientos básicos y un contexto.

Los conocimientos básicos, están en función de procesos específicos que desarrollan el pensamiento lógico matemático y sus propios sistemas de representación. Para esta investigación, se tienen en cuenta los pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico y variacional.

En palabras de Macintosh (1992) citado en los Lineamientos Curriculares, “el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones” (Ministerio de Educación Nacional -MEN, 2003). El pensamiento métrico hace referencia a las nociones y procedimientos vinculados a la medición y la cantidad; así mismo, conversiones de magnitudes, selección de unidades de medida, selección de patrones, estimaciones, instrumentos y procesos empleados para medir. Aquí, los sistemas métricos o patrones de medida representan este tipo de actividades.

La geometría es el campo de acción del pensamiento espacial, por tanto, involucra lo relacionado con el accionar del estudiante con el espacio, sus correspondencias, transformaciones, traducciones o representaciones materiales de objetos reales teniendo en cuenta sus movimientos, propiedades y características. Establecer concordancia entre los objetos físicos y los objetos geométricos requiere del sistema de representación geométrico.

El pensamiento variacional es la base de la formación matemática del estudiante (Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN, 1998); dado el énfasis en el estudio de la variación en relación a la percepción y caracterización en diferentes contextos; sus exploraciones tanto cualitativas como cuantitativas y todos los procesos mentales que subyacen en él.

Esta precisión, lo moviliza de manera progresiva de 4° a 11° grado de educación básica y media. En este pensamiento “involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas” (Ministerio de Educación Nacional -MEN, 2003, p. 53).

Para tener claridad, el pensamiento variacional en palabras de Vasco (2000): “puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante” (p.1), esto es pensar dinámicamente sobre una situación en contexto que necesita ser solucionada, y quien afronta el reto, crea y formula modelos mentales.

Para lograr este propósito, se debe pasar por varias fases: inicialmente el sujeto debe captar lo que cambia, lo que permanece constante y lo que se repite; luego crea sistemas o modelos mentales con las variables identificadas; seguidamente pone en funcionamiento el modelo; posteriormente compara resultados; después revisa o reformula y finalmente hace una formulación simbólica del modelo.

Para el diseño, ejecución y formulación del modelo, el sujeto debe establecer relaciones específicas con los demás pensamientos lógico-matemáticos; así, los pensamientos métrico y numérico le permiten establecer la variación numérica, establecer magnitudes, mediciones o proporcionalidades; mientras que el pensamiento espacial le permite hacer movimientos, transformaciones o cambios a variables espaciales.

2.5 Representar y modelar en matemáticas

Estos procesos matemáticos están relacionados estrechamente con la capacidad que el sujeto tiene para expresar sus ideas empleando lenguaje matemático, el cual puede ser escrito, oral, gráfico, algebraico, tabular o pictórico, convirtiéndose en una herramienta utilizada para interpretar, representar y dar a conocer juicios con el lenguaje propio de las matemáticas en relación a los tipos de soluciones que se presentan en un problema planteado.

Las diferentes formas de representar un objeto matemático para Abrantes (2001), Duval (1999), Niss y Hojgaard (2011) citados por Rico (2006), implica la capacidad para "... interpretar, y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas; las interacciones que existen entre las diversas representaciones..." (p.131)

De igual forma asocia la noción de representación a las señales externas que pueden ser esquemas o imágenes mentales que muestran un objeto matemático: "Todas aquellas herramientas- signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento matemático" (Rodford, 1998, citado en García, Coronado y Giraldo, 2015, 63.).

Así mismo, crear modelos, hace referencia a las diferentes representaciones figurativas mentales que el sujeto hace para esquematizar la realidad, haciéndola más comprensible, en términos de los Estándares Básicos: "es una construcción o artefacto material o mental, una estructura que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo" (Ministerio de Educación Nacional -MEN, 2003, p.53).

El modelo matemático se convierte en un camino eficaz y seguro, dado que su lenguaje admite expresar las ideas de forma clara y sin ambigüedades, a la vez genera un gran número de resultados en forma computacional o manual para finalmente ser puestos en la realidad del problema y darles significado y sentido.

2.6 Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional

Todas estas definiciones involucran procesos mentales que son afines con la transformación de la información, actividad que puede afectar la apropiación correcta del conocimiento matemático debido a varias razones, que según Duval (1999) son:

- Los diversos sistemas de representación por los que pasa, dados en términos del objeto representado, el contenido de la representación y la forma de representación.
- Las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático son irreducibles entre sí, es decir, no todas las representaciones proviene de un solo registro.
- El lenguaje de la matemática está estrechamente relacionado con su desarrollo histórico.
- El objeto matemático y sus representaciones dependen de la situación que los produce.
- Cada sujeto tiene sus propios sistemas de representaciones.
- El sujeto tiene poca apropiación del lenguaje matemático o mal fundamentada.

Igualmente, Socas (1998) identifica que la falta de sentido hacia los tipos de representaciones estructurales de objetos matemáticos; junto con la poca actitud afectiva y emocional por falta de concentración; inciden en los errores que los estudiantes comenten en el

proceso de aprendizaje del álgebra. Al respecto, las investigaciones de Caputo y Macías (2006), citados en García, Segovia y Lupiáñez (2011) clasifican estos errores en cinco categorías:

- Secuencias incoherentes, que no evidencian o están mal justificadas
- Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico; relacionados con el uso de letras en distintos contextos, su significado y los problemas de traducción al lenguaje común y viceversa.
- Errores algebraicos elementales, producidos por el mal uso de conceptos previos
- Conocimiento o uso inadecuado de conceptos.
- No lograr la demostración.

Consecuentemente, el manejo de sistemas de representaciones en los estudiantes presenta varias dificultades, en investigaciones realizadas por Jupri & Drijvers (2016), Palarea & Socas (1994), Clement (1982) citados en Cerdán (2010) se evidencian las relacionadas con las operaciones entre los términos de una expresión algebraica, que involucran el uso de las propiedades distributiva, conmutativa y el orden jerárquico de las operaciones. Además, el uso arbitrario de operaciones.

Otra dificultad consiste en identificar una letra en una expresión, como un número generalizado, como una variable o como una indeterminada, también, el rechazo a la falta de clausura en una expresión, al pretender obtener un número como resultado de una expresión algebraica y no poder aceptar que una expresión algebraica no pueda ser simplificada.

2.7 Campo didáctico

Este ítem profundiza sobre los elementos de tipo didáctico que permiten diseñar las actividades que promueven el pensamiento variacional y se aproximen a la construcción del concepto de factorización en los estudiantes de octavo.

2.7.1 Modelo teórico a priori

Este modelo surge por la necesidad de describir, analizar y explicar todos los aspectos que se involucran en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, por tanto, debe incluir objetos matemáticos específicos, un grupo de estudiantes determinado, el papel del docente y todas las relaciones que se presentan en este triángulo didáctico; con un gran auge en el componente comunicativo, dándole sentido a la construcción del conocimiento matemático a partir de situaciones de contexto vivencial y compartido.

Los antecedentes teóricos de este método se fundamentan en el Modelo Teórico Local planteado por Puig (2006) citado en García y otros (2013) para la alineación de una investigación y todos sus resultados de situaciones matemáticas desarrolladas a partir de cuatro componentes: competencia, enseñanza, actuación y comunicación.

El Modelo Teórico A Priori (MTP) es una estructura para organizar, describir y explicar los aspectos cognitivos que se movilizan cuando el estudiante resuelve tareas en la construcción y comprensión de un concepto matemático; su propuesta se concibe previo al proceso de caracterización en el trabajo de aula (García, y otros, 2013), planteando una visión pragmática de la matemática, perspectiva que muestra el conocimiento matemático como un constructo socio - cultural, donde el sujeto, las relaciones que establece con los otros y el entorno en el que se mueve,

es parte esencial en su concepción y desarrollo, dando lugar a una educación cuya base principal es la enseñanza centrada en el aprendizaje, por protagonistas principales: el sujeto que aprende y el significado de un objeto matemático que emerge de un sistema de praxis que manipulan situaciones reales; que a su vez se descomponen en diferentes registros orales, gestuales, pictóricos o escritos.

La manipulación de estos registros o sistemas de representación de un objeto matemático se hace posible con la incorporación del enfoque del aprendizaje comunicacional, cuya metáfora de participación como lo explica Sfard (2008), implica al aprendiz vincularse a una comunidad, con el propósito de participar de las actividades planteadas, al igual que querer comunicarse con el lenguaje propio de la comunidad y actuar de acuerdo a las normas establecidas, las cuales son negociadas por todos. Esta forma de aprender matemáticas involucra al estudiante activamente y al docente lo invita a cambiar de discurso matemático.

García, y otros (2013) ilustran y sintetizan los elementos del MTP en la figura 5 modificada por la autora para fines específicos de esta investigación.

Este modelo propone una caracterización del objeto matemático, acompañado de los procesos cognitivos, tales como: pensar, razonar, argumentar, calcular, demostrar, graficar, representar, matematizar, modelizar, entre otros; los cuales están inmersos en la construcción de un concepto matemático.

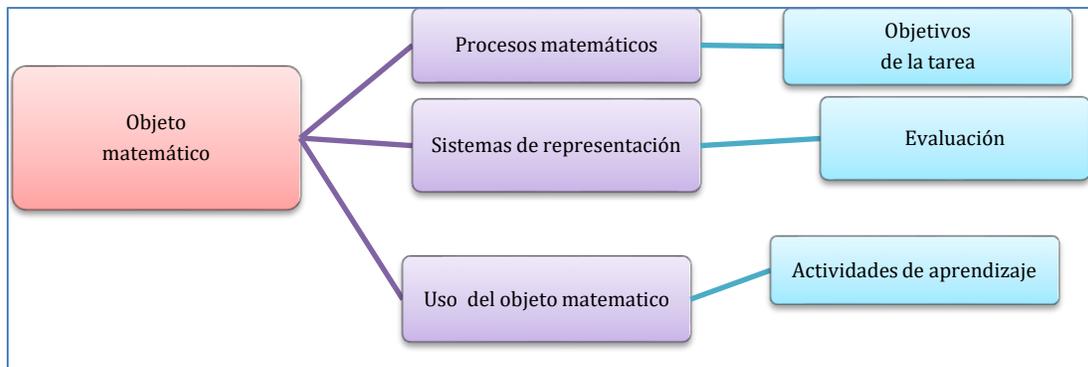


Figura 5. Organización del Modelo Teórico a Priori

El modelo teórico a priori hace que el estudiante despliegue y potencialice sus habilidades, capacidades, sentimientos, destrezas, fortalezas y voluntad, evidenciados en el uso social de sus sistemas de representación y en la aprehensión del objeto (García, y otros, 2013).

2.7.2 Tareas matemáticas

Dado que la palabra tarea es un concepto polisémico, en esta investigación se limita a las situaciones que estén estrechamente ligadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje escolarizado.

Según la Teoría de la Actividad planteada por Leontiev y el enfoque sociocultural de Vygotsky, el cual admite que la tarea es una actividad humana que implica un accionar psíquico (interno) y físico (externo) mediado por el sujeto por medio de un fin consiente; transformando el objeto según las necesidades cotidianas, sociales, científicas o culturales; así mismo, “el objeto actúa sobre el sujeto transformando su conciencia y sus marcos cognitivos” (García, y otros, 2013, p. 131).

Consecuentemente, la tarea como actividad humana en su desarrollo abarca tres fases interdependientes e interrelacionadas entre sí: el antes, el durante y el después de la actividad. La primera fase está relacionada con diseño y alineación de la actividad, donde el sujeto es concebido por su estructura psíquica y emocional; La fase intermedia, en la que el sujeto ejecuta o realiza la actividad y por último, el después hace referencia a la evaluación, el control del proceso y los resultados de la actividad.

Las tareas matemáticas, según los principios y estándares de la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas en Estados Unidos, NCTM, se fundamentan en actividades que involucran tanto los intereses como las experiencias cotidianas de los estudiantes en contextos reales, articulando saberes previos, utilidad social, inclinación cultural y con una comunicación que promueva el gusto y la argumentación con y para las matemáticas. Desde esta perspectiva, el NCTM considera que “las buenas tareas no hacen separaciones abstractas entre pensamiento matemático, conceptos, capacidades, procesos y habilidades. Se focalizan en estimular la curiosidad del estudiante, su sensibilidad al reto cognitivo para que persistan en el desarrollo y argumentación de sus propuestas de solución” (García, Coronado, & Giraldo, 2015)

Investigadores como Penalva y LLinares (2011), establecen que las tareas “son las propuestas de acción que los profesores plantean a sus estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas” (p.) y se convierten en una de las formas que propician el aprendizaje de tal manera que los objetivos, los procesos a desarrollar y la manera de vincularlas en la educación escolar deben propiciar en los educandos la posibilidad de:

- Pensar sobre las situaciones matemáticas más que recordar recetas que deberán seguir.
- Reflejar ideas importantes y no solo hechos y procedimientos

- Usar sus conocimientos en alguna medida.

Para lograr estos propósitos, las tareas se pueden definir desde los siguientes tipos de actividades:

- Búsqueda de estrategias de resolución y análisis de las mismas.
- Desarrollo de procesos de simbolización, uso de lenguaje algebraico y elaboración de gráficas para formulación de hipótesis o proposiciones.

En conclusión, el estudiante enfrenta las tareas y ejecuta los procesos con nivel creciente, además, moviliza actividades mentales desarrollando y fortaleciendo procesos de aprehensión y apropiación del conocimiento matemático usado en contextos socioculturales.

Para esta investigación el esquema planteado en las tareas presenta la siguiente estructura:

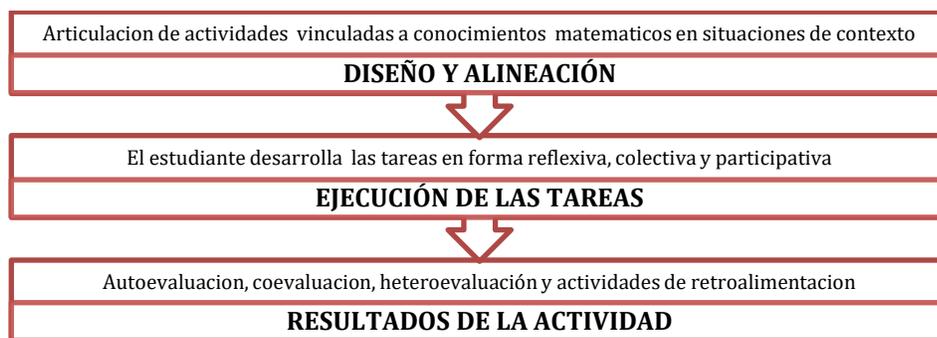


Figura 6. Esquemas de las tareas

Esta estructura general permite una interacción en la fase de desarrollo, la cual propicia una dinámica comunicativa en el aula de clase, en palabras de Bishop (2005) es “necesaria para construir el significado matemático compartido y para la negociación del desarrollo de estos significados compartidos entre profesor y estudiante” (p. 29).

2.7.3 Materiales manipulativos en matemáticas

Investigaciones en educación matemática muestran la necesidad y la eficiencia del uso de materiales tangibles de fácil manipulación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, las cuales han existido desde años atrás, en los años 60 las publicaciones de Dienes y Bruner citados en Salazar, Jiménez y Mora (2013) generaron varias investigaciones donde se involucran materiales de percepción táctil y temas matemáticos

Godino; Batanero y Font, citados en Salazar, Jiménez y Mora (2013), consideran que los materiales manipulativos, son ayudas que sirven para estudiar como los libros, mientras que las ayudas audiovisuales y materiales manipulativos están enfocadas en apoyar y potenciar el razonamiento matemático. Así mismo, permiten hacer una transición entre las estructuras del pensamiento concreto y el pensamiento abstracto.

Esta investigación apunta específicamente a los materiales de manipulación tangible que relacionan propiedades geométricas de tipo escalar (perímetro, área, volumen) y modelos algebraicos, a partir de procesos de tratamiento y conversión. En el primer proceso como lo explica Duval (1999); se hace “una transformación estrictamente interna a un registro” lo que facilita las reconfiguraciones con los registros de figuras geométricas y la paráfrasis o reformulaciones en lenguaje natural; mientras el segundo proceso, consiste en conservar la referencia al mismo objeto pero sin mantener la explicación de sus mismas propiedades.

En ese orden de ideas, el uso de materiales tangibles permite una libre movilización de los diferentes sistemas de representaciones de un objeto matemático generando una mayor apropiación y comprensión; así mismo, son imprescindibles en el desarrollo de procesos cognitivos.

El trabajo de investigación “El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado”, de Ballén (2014), plantea actividades de aprendizaje que involucra regiones rectangulares para construir el concepto de factorización de polinomios a un grupo de estudiantes de grado octavo; concluyendo que “... la parte visual que tiene este recurso genera una mayor motivación porque se logra manipular los conceptos algebraicos de una manera más atractiva sin dejar a un lado su fundamentación teórica” (Ballén, 2014, p. 122).

En esta investigación se toma como referente el trabajo con tabletas algebraicas¹; utilizando su tratamiento en figuras rectangulares elaboradas en cartulina de seis diferentes tamaños y formas; genéricas de los bloques multibase, con el propósito de apoyar la construcción del proceso de factorización de polinomios de grado dos, con coeficientes positivos a partir de algo perceptible y del uso de diferentes registros (Salazar, Jiménez, & Mora, 2013).

Su manejo implica una representación que admite la interiorización de un objeto que maneja varios registros de representación, codificando el área de cada rectángulo por una expresión algebraica que indica su magnitud escalar, relacionando una representación tangible de un polinomio, como la unión de varias figuras, su representación gráfica a escala, hasta deducir y escribir la representación del polinomio como producto de factores lineales.

¹ Este nombre representa un conjunto de fichas rectangulares de colores, fue dado por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (2011), Dayana Guantiva, Sandra Jiménez, Kevin Parra, Viviana Salazar y Duván Sánchez, idea inspirada en los trabajos de Euclides y los árabes, quienes relacionaban áreas y términos de una ecuación.

El proceso de transición consiste en identificar los lados de la nueva figura y hacer la representación de su área como producto del largo por el ancho, parte de una representación geométrica física, pasa por una gráfica a escala y concluye en una representación algebraica usando nociones de área; lo que implica el paso de una transición de tipo geométrico a una de tipo algebraico, y luego a la factorización. En este tipo de actividades los estudiantes tienen gran disposición, participan y se colaboran mutuamente en el diseño de estas regiones, además son participes de su propio aprendizaje.

El diseño de regiones rectangulares utilizando el material y las reglas hacen que se establezca una aprehensión conceptual del objeto, en la que Duval (1999) explica, se presenta de tres formas.

Aprehensión perceptiva, el estudiante relaciona situaciones de su contexto con las figuras geométricas.

Aprehensión discursiva asociando arreglos descritos con proposiciones matemáticas. Además provee el cambio en las dos direcciones, de lo visual a lo discursivo y por último pero no menos importante,

Una aprehensión operativa que consiste en modificar la configuración inicial.

En concordancia con lo expuesto, Salazar, Jiménez, & Mora (2013) afirman que implementar las fichas algebraicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios de grado dos permite:

- Crear un vínculo inmediato y físico entre expresiones algebraicas y la geometría, lo que permite establecer más de una representación de polinomios de grados dos.

- Permite manejar el concepto de factorización de polinomios de grado dos como el área de regiones rectangulares y como producto de factores lineales.

Con respecto a las representaciones, las fichas algebraicas se convierten en un medio que facilita la interiorización de la factorización de polinomios, en este sentido la representación física del polinomio con el material tangible; y la representación abstracta por medio de lenguaje algebraico, son registros que simbolizan el área de una región rectangular conformada por subregiones rectangulares.

2.7.4 Secuencia didáctica

La recolección y análisis de datos en esta investigación se enfoca la implementación de una secuencia didáctica que permite la articulación de las actividades de aprendizaje organizado. Investigadores como Tobón (2010) la mira como una herramienta flexible que posibilita el desarrollo de unidades didácticas que llevan a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para ello, la secuencia didáctica se vale de una planificación premeditada y ordenada de actividades secuenciales en espacios temporales y contextualizados que permiten el desarrollo práctico de los contenidos por parte de los estudiantes. Así mismo, tiende a inculcar valores, actitudes, aptitudes, destrezas y habilidades para que los estudiantes puedan enfrentar los retos impuestos por la vida en sus diferentes aspectos.

Desde este enfoque social de carácter formativo, es posible diseñar un instrumento didáctico particular para la construcción de un concepto y la movilización de una competencia articulando adecuadamente las actividades, tiempos y espacios; ajustándolos y adaptándolos en problemas significativos y desde contextos que le permitan a los educandos una participación

activa y reflexiva, como lo plantea Tobón (2010) en los descriptores y evidencias del instrumento de las secuencias didácticas.

2.7.5 Estado del arte sobre secuencias didácticas

Existen diferentes investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas que involucran secuencias didácticas o propuestas que plantean la enseñanza del álgebra y el concepto de factorización de polinomios desde enfoques diferentes a los habituales, las cuales se referencian a continuación.

El artículo de Villa y Ruiz (2010) plantea una estrategia didáctica que involucra el software geogebra y analiza sus alcances en la apropiación del pensamiento variacional de forma dinámica.

Por otro lado, Palomino (2011), plantea un conjunto de tareas que incorporan calculadoras graficadoras para establecer la complementariedad de esta herramienta con las técnicas habituales para factorizar y graficar la función cuadrática.

La propuesta de vincular la geometría en esta investigación son planteados también por Ballen (2014) en su trabajo “El álgebra geométrica como recurso didáctico en la factorización de polinomios de grado dos”, donde se toma esta disciplina como una opción didáctica que permite al estudiante pasar de un lenguaje natural a un lenguaje matemático y así hacer una aproximación al concepto de factorización.

La incorporación de material manipulativo en la secuencia didáctica de esta investigación, está relacionada estrechamente con el artículo “Las tabletas algebraicas” que Salazar, Jimenez y Mora (2013) diseñan para la enseñanza de la factorización de polinomios, vinculando sistemas de

representación y logrando se aprendizaje desde otra perspectiva. Sus fundamentos teóricos son tenidos en cuenta para el planteamiento de las actividades en el diseño de la secuencia didáctica.

2.7.6 Evaluación del aprendizaje

En la actualidad la evaluación ha permeado todos los campos del accionar humano, sus resultados en gran medida cuantitativos son vistos como indicadores de calidad, evidenciando avances o dificultades en sus diferentes fases. Una mirada distante de la planteada y desde el aula de clase, implica incorporar procesos que admitan actividades y herramientas didácticas que garanticen un seguimiento efectivo, coherente y pertinente en todo lo que moviliza la enseñanza y el aprendizaje de un saber (Tobón, 2006).

La evaluación es un aspecto que continuamente hace modificar las estrategias didácticas en el aula de clase, dado que en el momento de aplicarlas el contexto es otro, ya sea por el grupo de estudiantes, el saber que está en juego, o las condiciones del ambiente escolar. Cada grupo tiene características diferentes así se encuentren en el mismo nivel, estas generalmente tienen que ver con su convivencia en el aula y la receptividad que tienen frente al docente, el área o el momento.

Dichos componentes se deben tener en cuenta en el momento de diseñar propuestas curriculares encaminadas a desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje que no solo seleccionen contenidos aterrizados, también, promuevan capacidades y criterios morales acordes al medio.

En ese sentido, es importante tener en cuenta que aún persisten modelos pedagógicos tradicionales que enfatizan en la transmisión conductista del conocimiento y ven la evaluación como un cúmulo de pruebas que evidencian el logro de lo enseñado a través de un puntaje numérico,

clasificando y señalando al estudiante según su rendimiento académico; sin tener en cuenta factores externos que inciden en los resultados (Tobón, 2010).

Modificar estas prácticas, implica ver el aula de clase como un mini entorno social dinámico, el cual es afectado por la incorporación explícita o implícita de reglas, acuerdos, funciones específicas y códigos entre sus integrantes; sin olvidar que no todos tienen los mismos intereses, ni las mismas facultades, ni mucho menos las mismas condiciones sociales; además, los recursos, políticas educativas y ambientes escolares difieren de las necesidades del día a día.

Con esta realidad y teniendo pleno conocimiento de las características grupales, lo planteado por el docente no necesariamente es lo pertinente, generalmente las condiciones no son las ideales, consecuentemente se diseñan actividades de aprendizaje que logren captar la atención de los estudiantes, involucrando la construcción social del conocimiento y por ende la necesidad de conocer y comprender lo que ha de ser enseñado; enmarcados en un ambiente de trabajo en equipo, apoyado por monitores y guiados por el docente (Sfard, 2008).

Así, los mecanismos de evaluación para dichas tareas o entornos de aprendizaje se centran en gran medida a fortalecer la actitud del estudiante frente al área disciplinar, vista en términos de disposición, participación activa, manejo del tiempo y el desarrollo de actividades que den cuenta de lo asimilado; acompañados de actividades y preguntas contextualizadas y acordes con la caracterización del saber.

Esta forma posibilita identificar las dificultades generales que se presentan en la comprensión de un concepto; con el propósito de corregir los desaciertos de tipo cognitivo, cambiar de estrategia didáctica, retroalimentarse para renovar y reflexionar sobre lo aprendido, o diseñar actividades que fortalezcan la formación del ser, el saber y el hacer.

Capítulo 3. Marco metodológico

3.1 Tipo de investigación

Esta investigación se desarrolla mediante un enfoque cualitativo, por tanto los mecanismos que se emplearon para la recolección de información dan cuenta del alcance de la secuencia didáctica “Construyendo *rectángulos algebraicos*” en relación al fortalecimiento del pensamiento variacional y la aproximación en la construcción del concepto de factorización de polinomios de grado dos con coeficientes positivos.

Las rúbricas o escalas de valoración, el diario de campo, las entrevistas y las actividades planteadas antes, durante y después de la aplicación de la secuencia didáctica, son los instrumentos que permiten determinar los avances de este estudio.

3.2 El contexto

La Institución Educativa Técnica Comercial Las Américas, de sector oficial, ofrece educación preescolar, primaria, básica y media con modalidad comercial en convenio con el Sena. Surge en septiembre de 2002 a través de la resolución N° 2051, fusionando los centros educativos ITENALCO, Rafael Uribe, Gabriel Montaña, Nuestra Señora de Loreto de la ciudad de Cali, y en el año de 2006 se inicia labores en la sede Atanasio Girardot por la alta demanda; en la actualidad cuenta con cerca de 2100 estudiantes-

Todas las sedes se encuentran en la comuna 8 de Cali, ubicada entre el centro y el nororiente de la ciudad, conformada por 18 barrios, gran parte del sector se encuentra posicionado en el estrato 3. En cuanto al aspecto económico, se caracteriza por su vocación comercial, producción industrial

y mercadeo automotriz. Un buen porcentaje de sus habitantes son empleados y otros se dedican al comercio de comidas y productos varios. En cuanto a problemáticas sociales se visualiza levemente pandillas, drogadicción y familias disfuncionales.

La sede central mañana asisten los estudiantes de 8°, 9°, 10° y 11°, cuyas edades oscilan entre los 12 y 19 años, el 70% de ellos han realizado sus estudios en la misma Institución y el 30% restante viene de centros educativos cercanos o de otras regiones del departamento.

Según el informe Sintético de Calidad Educativa, ICSE (2015), los estudiantes presentan las siguientes dificultades en relación a los pensamientos variacional y espacial:

Tabla 2.

Dificultades de los estudiantes de la ITCLA de grado 5° y 9°

COMPETENCIA PEN- SAMIENTO	GRADO QUINTO	GRADO NOVENO
Pensamiento espacial	no compara y clasifica objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades no usa representaciones geométricas y establece relaciones entre ellas para solucionar problemas No utiliza sistemas de coordenadas para ubicar figuras planas u objetos y describir su localización.	No representa y describe propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas No identifica ni describe efectos de transformaciones aplicadas a figuras planas No establece y utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.
Pensamiento variacional	No resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones	No usa y relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación no interpreta y usa expresiones algebraicas equivalentes No reconoce el lenguaje algebraico como forma de representa procesos inductivos No identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.

Lo que muestra específicamente que antes de cursar grado octavo; los estudiantes presentan dificultades en utilizar diferentes procedimientos para calcular magnitudes escalares y no reconocen el lenguaje algebraico como una forma de representar y modelar situaciones del entorno.

Los participantes en la investigación son los 36 estudiantes que conforman el grupo 8-3, distribuidos por edad y sexo en la siguiente tabla:

Tabla 3.

Caracterización según sexo y edad de los estudiantes participantes

Sexo	Edad				
	12 años	13 años	14 años	15 años	16 años
Femenino	1	3	12	2	1
Masculino	0	4	10	2	1

Fuente: propia apoyada por la información de SIGA

La autora hace esta selección primordialmente porque el horario establecido para la asignatura de álgebra de este grupo, está en un horario (3 horas semanales: martes una hora y jueves dos horas) no tiene tantas interrupciones de tipos institucionales y/o festivos lo que permite aplicar la secuencia didáctica y hacer un buen seguimiento.

El grupo presenta problemas de concentración, frecuentemente se les llama la atención por la disciplina y el uso del celular.

En el área de matemáticas presentan dificultades en el uso y operatividad de los diferentes conjuntos numéricos, perímetro y área de regiones planas; en relación a las competencias matemáticas, muestran fortalezas en la solución de problemas de contexto, pero cometen errores en representaciones numéricas. Se destaca la responsabilidad en la presentación de actividades extra clase y el liderazgo de tres estudiantes que son monitores. El 25% de los estudiantes son nuevos en el curso.

3.3 Fases de la investigación

En este trabajo se aplica una secuencia didáctica que involucra representaciones rectangulares y material manipulativo, de tal forma que se pueda evidenciar el fortalecimiento del pensamiento variacional, a través de una aproximación en construcción del concepto de factorización de polinomios. Se presentan las fases por las que este estudio paso:

Primera fase: consiste en la elaboración y la aplicación de la prueba diagnóstica (ver anexo A), para identificar dificultades que los estudiantes de grado octavo presentan en el pensamiento variacional, concretamente aquellas relacionadas con la modelación y representación algebraica de magnitudes escalares de figuras geométricas; en términos del uso adecuado de las operaciones algebraicas y del manejo de patrones de medida para calcular el perímetro y área de regiones rectangulares.

Segunda fase: Diseño e implementación de la secuencia didáctica “construyendo rectángulos algebraicos” (anexo B). El diseño de este documento está apoyado conceptualmente por el modelo teórico a priori, las tareas matemáticas, los sistemas de representación del área de regiones rectangulares y material manipulativo. Su propósito consiste en la movilización del pensamiento variacional de los estudiantes de grado octavo en la construcción parcial o total del concepto de factorización de polinomios de grado dos.

Para su aplicación, se sigue el protocolo de consentimiento informado a todos los acudientes y estudiantes de grado 8-3 (ver anexo C) con el fin de salvaguardar su integridad. Firmado este documento, se aplica la secuencia didáctica y se hacen observaciones en función de aspectos relacionados con el ambiente de aprendizaje del grupo en una rejilla (ver anexo D) y la movilización de actitudes para el logro de las actividades planteadas atendiendo al MTAP.

Tercera fase: Análisis de resultados después de la implementación de la secuencia didáctica. Aplicada la secuencia didáctica se hace un análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes de grado octavo que permiten evidenciar los alcances en términos del tratamiento de los sistemas de representación del área de regiones rectangulares cerradas, los procesos de conversión y tránsito que plantea Duval (1999) y Fernández (1999) para la aprehensión de objeto matemático

3.4 Instrumentos

A continuación se presentan los instrumentos utilizados en esta investigación de corte cualitativo que permiten recolectar la información para analizarla y evaluar la consecución parcial o total de los objetivos.

3.4.1 Prueba diagnóstica

Para evidenciar las necesidades y dificultades que los estudiantes de grado 8-3 presentan en el aprendizaje del algebra y particularmente en relación al pensamiento variacional y los sistemas de representación, la autora diseña y aplica una evaluación diagnóstica que vincula contextos espaciales concernientes a la construcción de sistemas de representación algebraica que modelan el perímetro y área de figuras rectangulares; apoyada en los estudios de; NCTM (2000); Bressan (2009); Socas y otros (1998).

La prueba está conformada por dos puntos:

En el primer punto, el estudiante debe utilizar el lenguaje algebraico, sus relaciones y operaciones para plantear modelos que representen el perímetro y área de figuras rectangulares

realizando la conversión de un sistema de representaciones a otro. Para este fin, en la primera columna de la tabla se muestran representaciones graficas de figuras rectangulares con la información de tipo algebraica correspondientes al área de cada rectángulo que la conforma.

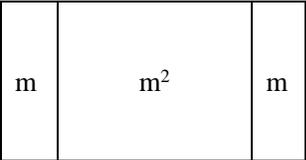
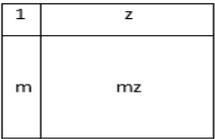
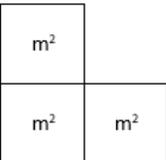
Región	Polinomio que expresa el perímetro	Polinomio que expresa el área
		
		
		

Figura 7. Pregunta uno, prueba diagnóstica

La segunda pregunta está orientada a indagar sobre qué tipo de relaciones encuentra entre los modelos algebraicos y las operaciones algebraicas; en ese sentido, la prueba pretende identificar si el estudiante identifica la suma y multiplicaciones de expresiones algebraicas en la representación y modelación del perímetro y el área de regiones rectangulares.

Cabe resaltar que los estudiantes del grado 8-3 antes de aplicar la prueba diagnóstica, habían desarrollado actividades concernientes al manejo del lenguaje algebraico, sus

características, operaciones y generalidades. Además, aplicaciones en diferentes contextos, en relación a la construcción de modelos algebraicos. Así mismo, al inicio del año escolar se fortalecieron las competencias matemáticas resolución de problemas y comunicación. Ver anexo A.

3.4.2 Secuencia didáctica

La secuencia didáctica “Construyendo rectángulos algebraicos” está organizada en cuatro tareas, cada una contiene: su descripción, objetivo de aprendizaje y las actividades a desarrollar. Es el instrumento fundamental de esta investigación dado que el registro escrito de sus actividades, hacen parte de la información que se ha de recolectar, describir, analizar, sistematizar e interpretar en función de la movilización del pensamiento variacional y la construcción del concepto de factorización de polinomios.

Para su diseño se hace uso de los objetos geométricos, los cuales permiten desarrollar la percepción espacial, la visualización, además, trabajar con diferentes sistemas de representación que justifican lo expuesto por Socas (1998), quien afirma que “un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir diversas representaciones” (p.22), planteando la necesidad de enseñar el álgebra en términos de la traducción y conversión de diferentes sistemas de representación: geométrico, algebraico, numérico y usual.

Adicionalmente, las nuevas tendencias del aprendizaje de la matemática proponen la complementariedad de sus pensamientos matemáticos, diseñando actividades que propicien reflexión y sentido de los objetos matemáticos en los estudiantes, esto es, que puede construir, predecir, examinar, comprobar, generalizar, poner en práctica sus propias estrategias e ideas, así

mismo, poner en actuación su rol de matemático (Sociedad Andaluza de Educación Matemática - NTCM, 2000).

Por tanto, en las actividades planteadas se implementa el material manipulativo conformado por figuras geométricas en cartulina para que el estudiante diseñe regiones rectangulares y pueda traducir estas construcciones a lenguaje algebraico.

El diseño de estas actividades se apoya en los trabajos de “tabletas algebraicas” (Salazar, Jiménez, & Mora, 2013), las proposiciones 1 y 4 del Segundo Libro de los Elementos de Euclides; que se encuentran en el capítulo dos de este trabajo.

La tabla 4 ilustra la organización de la secuencia didáctica en términos de las actividades que apuntan al fortalecimiento del pensamiento variacional y a la construcción del concepto de factorización de polinomios.

Tabla 4.

Organización pensamientos matemáticos en la secuencia didáctica "Construyendo rectángulos algebraicos"

	Pensamientos	Tareas	Actividades puntuales en las tareas
MODELO TEORICO A PRIORI	Pensamiento espacial Manejo de figuras bidimensionales, perímetro área de rectángulos; proporcionalidad de figuras	1	Elaboración de la herramienta de trabajo (HT) y diseño del plano.
		2	Diseños de regiones rectangulares con la HT.
		3	Diseño de polinomios con HT y dibujo a escala.
		4	Diseño de polinomios con HT y dibujo a escala.
	Pensamiento Métrico. Patrones de medida, proporcionalidad,	1	Recortar las figuras rectangulares con medidas; identificar patrones de medida para el perímetro y el área de regiones rectangulares.
		2	Proporciones y uso de escala de medidas.
		3	Proporciones y uso de escalas de patrones de medidas para el área.
		4	Proporciones y uso de escala de medidas de patrones de medidas para el área.
	Pensamiento numérico. Aproximaciones, manejo de espacios	1	Aproximación en medidas para elaboración de HD y áreas de espacios asignados al apartamento modelo.
		2	Aproximación en el cálculo de áreas de regiones rectangulares.
		3	Aproximación en el cálculo de áreas de regiones rectangulares.
		4	Aproximación en el cálculo de áreas de regiones rectangulares.
	Pensamiento variacional Expresiones algebraicas, polinomios, operaciones algebraicas, modelos algebraicos, factorización.	1	Representación algebraica del área de cada figura que conforma el HD. Representación algebraica del área de espacios asignados al apartamento modelo. Representación polinómica del área del terreno que conforma el apartamento modelo.
		2	Representación algebraica de largo, ancho de regiones rectangulares diseñadas con la HD.
		3	Representación algebraica del área de regiones rectangulares diseñadas con la HD como producto de factores lineales.
		4	Representación algebraica del área de regiones rectangulares diseñadas con la HD como factorización de polinomio de grado dos.

3.4.3 Rejilla

Identificar las dificultades generales que se manifiestan en la comprensión de un concepto, permite corregir los desaciertos de tipo cognitivo en los estudiantes, con una retroalimentación permanente y pertinente que admita renovar y reflexionar sobre lo aprendido y que fortalezcan la formación del ser, el saber y el hacer; es decir, propiciar una reflexión crítica del proceso de enseñanza aprendizaje.

En ese orden de ideas, tanto en la ejecución de la secuencia didáctica y en los espacios de retroalimentación se plantean variables a analizar y a consignar en una rejilla (ver anexo D):

La actitud del estudiante frente a la matemática, evidenciado a través de la disposición desde el inicio hasta el final de la clase, el intento por entender y realizar las actividades planeadas y el aprovechamiento del tiempo en su ejecución.

La apropiación del saber matemático a enseñar que muestra el educando a partir de sus conocimientos previos, heurísticas, avances y las diferentes representaciones que hace de este.

El comportamiento individual y colectivo, en términos de la aplicación de los valores institucionales, prevaleciendo el respeto, la responsabilidad y la honestidad.

Otro instrumento que se tiene en cuenta es el diario de campo, que Hernández (2010), lo describe como un diario personal donde la investigadora hace descripciones de aspectos que intervienen en la aplicación de la secuencia didáctica, tales como: cronología de sucesos circunstanciales o del ambiente, interpretaciones de eventos de acciones de los estudiantes, conjeturas, conclusiones y dificultades en acto.

Capítulo 4. Diseño de la secuencia didáctica “construyendo rectángulos algebraicos”

La secuencia didáctica consta de cuatro tareas encaminadas a reconocer, operar y factorizar expresiones algebraicas utilizando material tangible y sistemas de representación. Cabe anotar que en la solución de las tareas planteadas, los estudiantes se ven orientados a procesos comunicativos, compartiendo sus puntos de vista y generando ideas de forma individual o grupal, que comparten y validan.

Concretamente en esta secuencia didáctica se pretende movilizar el aprendizaje de modelación de expresiones algebraicas en los estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria utilizando material tangible elaborado por los propios estudiantes, focalizándose en los sistemas de representación del área de regiones rectangulares, con el propósito de darle sentido y propiciar la construcción del proceso de factorización de los polinomios algebraicos de grado dos y el afianzamiento de los procesos algebraicos y analíticos; de tal manera que el estudiante pueda:

- Usar el lenguaje algebraico y las propiedades geométricas de polígonos para formular, modelar, representar y poner a prueba conjeturas y solucionar situaciones en diferentes contextos.
- Usar adecuadamente el material manipulativo para lograr una aprehensión conceptual del objeto matemático.
- Representar y escribir la factorización de un polinomio de grado dos a partir de la modelación del área de regiones rectangulares.
- Ser partícipe activo y con sentido de su propio aprendizaje y el de sus compañeros.

Para tal fin, la secuencia didáctica (anexo B) consta de cuatro tareas, en las que se aplica el modelo teórico a priori, aterrizada en los siguientes campos de acción:

Cognitivo: está en función de la construcción del concepto de factorización de polinomios de grado dos, concerniente específicamente a los pensamientos matemáticos y sistemas de representación.

Afectivo: relacionado con el enfoque de aprendizaje socio cultural de las matemáticas, donde el estudiante es visto como un miembro de una comunidad, cuyo lenguaje común es el sistema algebraico y analítico y sus representaciones están planteadas en contextos geométricos tangibles.

Praxiológico: en términos de actividades que propicien movimiento, continuidad y sentido social del objeto matemático; de tal forma que la factorización de polinomios se pueda identificar como la representación del área de regiones rectangulares empleando recursos didácticos concretos.

La siguiente organización curricular sugerida por los Estándares Básicos (2003) de sexto a noveno, permite identificar los procesos cognitivos que dan cuenta del dominio matemático a tener presente para el diseño de las tareas.

Esta organización permite establecer conexiones entre los pensamientos métrico, numérico, espacial y variacional, así:

Métrico – variacional: Generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el perímetro y el área de regiones rectangulares planas.

Tabla 5.

Organización de los subprocesos según Estándares Básicos de 7° a 9° sobre pensamiento variacional

Pensamiento	6° a 7°	8° a 9°
Numérico	Generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales en diferentes contextos	Identifico números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos
Espacial		Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
Métrico	Establezco relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.	
Variacional	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas

Numérico- variacional: Usar las operaciones y propiedades de los números reales para hacer cálculos y relaciones entre ellos.

Espacial- variacional: Usar representaciones geométricas para resolver problemas de contexto o de otras ciencias.

El contexto en el que transitan los sistemas de representación son:

Contexto espacial y físico: el estudiante aplica modelos algebraicos a situaciones de área de regiones rectangulares diseñadas por el material manipulable

Contexto matemático: el estudiante plantea patrones algebraicos desde contextos matemáticos.

Contexto social: el estudiante usa modelos algebraicos y magnitudes escalares en diseño de planos y distribución de espacios.

4.1 Descripción general de las tareas matemáticas

Cada tarea que conforma la secuencia didáctica tiene una estructura que aborda actividades que involucran la construcción del concepto matemático, en su elaboración se consideran las características del medio sociocultural al cual pertenecen los estudiantes para predecir las posibles reacciones de los sujetos ante las actividades planteadas

Para una mejor organización, la autora concatena todo los aspectos a tener en cuenta en cada tarea en un cuadro que indica y codifica los procesos específicos a desarrollar en la implementación del modelo teórico a priori.

4.1.1 Descripción de la primera tarea

Esta tarea plantea dos actividades: la primera actividad se enfoca en los sistemas de medidas, área de figuras geométricas, suma y multiplicación de expresiones algebraicas; durante la cual se elabora el material manipulable que consiste en 20 figuras rectangulares de diferente dimensión, las cuales deben ser codificadas con una expresión algebraica correspondiente a su área y se coloca en acción sin ningún tipo de regla en relación a la forma de uso. En la segunda actividad cada grupo diseña un plano con el material manipulativo que representa el apartamento habitable, contesta las preguntas en relación al modelo diseñado y luego lo expone a todo el grupo.

Para el desarrollo de estas actividades los estudiantes se clasifican en grupos conformados por cuatro integrantes cada uno, la elección se hace según sus propios intereses, afinidades y empatía.

Tabla 6.

Estructura de la primera tarea

Descripción de los procesos Asociados a los pensamientos		
Pensamiento	Procesos	Caracterización de los procesos
Espacial Variacional	Identificar las operaciones que intervienen en las expresiones polinómicas en situaciones geométricas	Reconoce las características de regiones bidimensionales y el lenguaje algebraico como forma de representarlas
Númérico Espacial	Expresar en forma oral y escrita ideas de regularidades geométricas en situaciones reales	Describe y representa situaciones de variación relacionando diferentes representaciones algebraicas
Espacial Métrico	Relacionar y hacer conjeturas sobre la información de situaciones de tipo espacial	Identifica relaciones entre distintas características espaciales bidimensionales relacionándolas con el área para su interpretación y diseño.
Objetivo de aprendizaje Comunicar y modelar matemáticamente una situación en contexto que involucra el área de regiones rectangulares		

4.1.2 Descripción de la segunda tarea

Esta tarea está conformada por dos actividades; en la primera dada la representación gráfica de una región rectangular que muestra explícitamente la forma de construirla con el material manipulativo, el estudiante debe armarla en físico con sus fichas, deducir información en términos de expresiones algebraicas, el polinomio que representa y las operaciones algebraicas que utiliza para indicar su área. La heurística y el ensayo- error son fundamentales para que el estudiante establezca reglas o estrategias que le permitan construir regiones rectangulares empleando el

material manipulativo, además de lo anterior se activan los sistemas de representación para modelar situaciones que indiquen el área de regiones rectangulares.

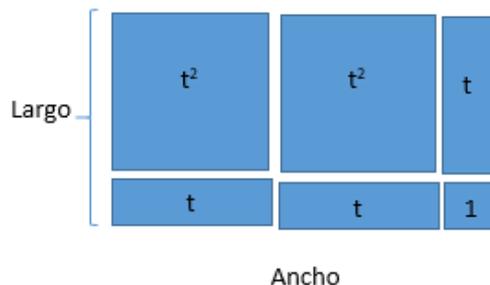


Figura 8. Representación gráfica de la región rectangular

La suma y multiplicación de expresiones algebraicas junto con las características geométricas de los rectángulos y los patrones de medida a escala son conocimientos que el estudiante pone a prueba, que a su vez le permite identificar reglas en la unión de fichas para futuras construcciones

Tabla 7.

Estructura de la segunda tarea

Procesos cognitivos		
Pensamiento	Procesos	Caracterización de los procesos
Espacial Variacional	Representar y operar una expresión algebraica y polinómica, a partir de su representación geométrica.	Establece equivalencias en representaciones algebraicas y geométricas (físicas)
Numérico Espacial	Establecer relaciones entre operaciones numéricas y algebraicas	Aplica propiedades de operaciones reales a representaciones algebraicas (establece reglas para usar el material manipulativo adecuadamente)
Espacial	Ligar diferentes representaciones algebraicas a características geométricas	Identifica relaciones entre distintas características espaciales bidimensionales relacionándolas con las magnitudes de sus lados
Objetivo de aprendizaje Usar diferentes sistemas de representación que indiquen el área de una región rectangular, a partir del diseño de regiones rectangulares y las operaciones de polinomios.		

4.1.3 Descripción de la tercera tarea

Esta tarea está enfocada en los sistemas de representación del área de regiones rectangulares: física, grafica, polinómica y como producto de factores lineales.

Polinomio	Representación gráfica del Rectángulo que forma	Longitud del largo	Longitud del ancho	Área del rectángulo $A = La$
$t^2 + 3t$		t	$t + 3$	$t(t + 3)$

Figura 9. Primera Actividad de la tercera tarea

Aquí el estudiante se fortalece y aprende nuevas estrategias para unir adecuadamente las fichas rectangulares y hacer conversiones del objeto matemático, transitando por un estado abstracto (polinomio de grado dos) al tangible (construcción de la región con material manipulable), seguidamente por un registro gráfico a escala sin perder la forma y culminando con un registro abstracto (factorización del polinomio como producto de factores lineales).

Tabla 8.

Estructura de la tercera tarea

Procesos cognitivos		
Pensamiento	Procesos	Caracterización de los procesos
Espacial	Aplicar conceptos y propiedades geométricas para solucionar problemas de contexto	Reconoce las particularidades en el cálculo del área de regiones rectangulares en la consecución de procesos inductivos
Espacial Variacional	Interpretar la representación de una región rectangular en una expresión polinómica algebraica cuadrática	Diseña regiones rectangulares a partir de sus representaciones algebraicas
Variacional	Vincular el producto de factores lineales a un polinomio cuadrático	Factoriza polinomios de grado dos a partir de situaciones de contexto espacial
Objetivo de aprendizaje: Representar un polinomio como producto de dos factores lineales, a través del diseño y construcción de figuras planas.		

4.1.4 Descripción de la cuarta tarea

Esta tarea pretende establecer conexiones entre el área de regiones rectangulares y la factorización de polinomios de grado dos. Para ello se plantea relacionar cuatro tipos de representaciones sobre el área de regiones rectangulares, las cuales consisten en las regiones construidas y diseñadas con la herramienta de trabajo, su registro por medio de expresiones y operaciones algebraicas, estableciendo conexiones entre los sistemas de representación del área de rectángulos y la factorización de polinomios. Además se puede aplicar la heurística y el pensamiento lógico para organizar adecuadamente las figuras del material manipulativo.

La actividad final pretende que el estudiante sea capaz de reconocer patrones y regularidades en la factorización de polinomios de grado dos con esta herramienta de trabajo.

Tabla 9.

Estructura de la cuarta tarea

Procesos cognitivos		
Pensamiento	Procesos	Caracterización de los procesos
Numérico Espacial	Aplicar regularidades y conceptos de proporcionalidad en la construcción de regiones rectangulares a escala sin perder las propiedades	Diseña regiones rectangulares teniendo en cuenta las restricciones o condiciones
Espacial Variacional	Vincular el área de regiones planas con el producto de factores lineales de un polinomio cuadrático	Relaciona el proceso de factorización de un polinomio de grado dos con el producto de las dimensiones de una región rectangular plana
Variacional	Transformar un polinomio algebraico de grado dos en factorización de factores lineales	Establece equivalencias entre la factorización de polinomios de grado dos y una expresión polinómica.
Objetivo de aprendizaje Representar y escribir la factorización de un polinomio a partir de la modelación de regiones rectangulares usando el material manipulativo		

4.2 Elaboración y uso de material manipulable

Estas figuras rectangulares son elaboradas por cada estudiante en cartulina y se convierten en su herramienta didáctica utilizada en el desarrollo de las actividades propuestas en todas las tareas de la secuencia didáctica. Consta de más de 20 figuras de 6 diferentes tamaños y etiquetadas por la expresión algebraica que representa su área.

Para la elaboración de estas fichas, se utilizan dos octavos de cartulina preferiblemente de diferente color, con medidas específicas (actividad 1, tarea 1), la optimización y modo de corte en la consecución de la herramienta depende de cada estudiante, además se pide reutilizar material sobrante para la elaboración de un sobre para guardar el material fabricado.

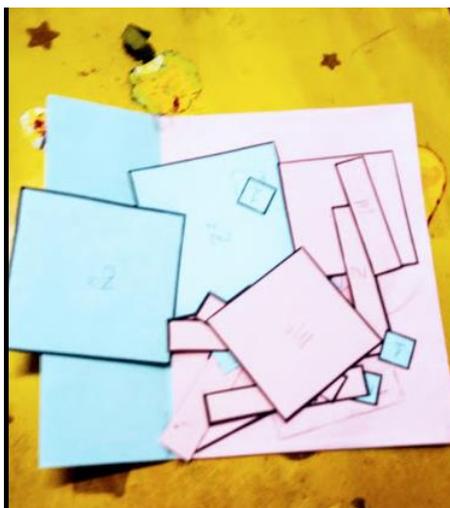


Figura 10. Material manipulable: figuras geométricas

Cada figura debe estar codificada con la expresión algebraica que represente su área, lo que implica hacer uso de conocimientos en relación a expresiones algebraicas y cálculo de áreas de figuras planas.

Capítulo 5. Resultados y análisis

A continuación se presenta la revisión y análisis de los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica, diseñada para la consecución de los objetivos planteados.

Para cumplir el primer objetivo se utilizó la prueba diagnóstica, en la consecución del segundo objetivo se usó la información recolectada en la implementación de la secuencia didáctica, el material fotográfico, los cuadernos de apuntes de los estudiantes y el diario de campo. Finalmente, para alcanzar el objetivo tres, se utilizó el diario de campo, el material fotográfico y la información de la rejilla.

5.1 Dificultades de los estudiantes relacionadas con el pensamiento variacional

La prueba aplicada tuvo una duración de una hora, y a partir de los resultados de los estudiantes, se pudo establecer cuatro categorías que identifican el desarrollo del pensamiento variacional, las cuales fueron:

C1: Identifica modelos algebraicos que representan magnitudes escalares de una figura rectangular.

C2: Identifica al menos un modelo algebraico de magnitudes escalares de una figura rectangular.

C3: No identifica modelos algebraicos de magnitudes escalares de una figura rectangular

C4: No intenta identificar modelos que representan magnitudes escalares de una figura rectangular.

A partir de estas categorías, se pudo observar la distribución de los estudiantes en cada una de las situaciones planteadas en la prueba diagnóstica. La grafica 11 muestra los resultados en relación con los registros escritos de los estudiantes en a resolución de diferentes figuras geométricas.

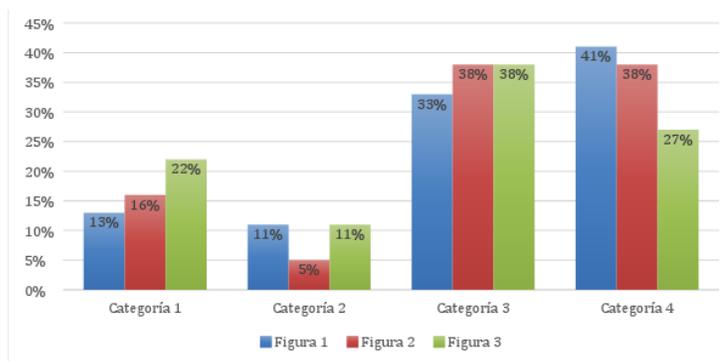


Figura 11. Distribución por categorías, de las dificultades en las figuras del primer ítem de la prueba diagnóstica

Según la figura 11 del 17,4% de los estudiantes de grado octavo que están en la categoría 1 identifican todos los modelos algebraicos que representan perímetro y área de una figura rectangular, su desempeño es similar para las diferentes figuras propuestas en las tareas, con un menor porcentaje en la figura 1 de la prueba.

Se pudo observar también que el desempeño de los estudiantes no es igual en cada una de las figuras de la prueba, de forma tal que en la categoría 4, la mayor dificultad del desempeño se presenta con la figura 1, mientras que para la categoría 3 esto se observa por igual en las figuras.

Con respecto a la categoría 2, el 9,22% de los estudiantes presentan dificultad en modelar algebraicamente el perímetro de figuras rectangulares, identificándose problemas en agrupación de términos semejantes y poca apropiación del concepto de perímetro de un rectángulo en un contexto algebraico.

Los estudiantes clasificados en 3 equivalente al 37,2%, realizaron modelos algebraicos que infieren la existencia de confusión de los conceptos de área y perímetro de un rectángulo, más aún, escriben expresiones que no tiene relación con lo que se estaba planteando.

Una característica de los estudiantes de la categoría 4 que conforman el 36,18%, no completaron el primer punto de la prueba y colocaron el nombre a su prueba, marcando con x aquello que no entendieron y entregando rápidamente, mientras que otros estudiantes, por el contrario, plantearon modelos, borraron y nuevamente intentaron escribirlos evidenciando esfuerzo e interés por desarrollar las actividades planteadas.

En general los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica muestra que cerca del 73% de los estudiantes no pueden identificar modelos algebraicos en situaciones de contextos geométricos, no realizan adecuadamente operaciones con expresiones algebraicas ni agrupan términos semejantes y mucho menos, manejan sistemas de representación del área y el perímetro de figuras rectangulares en forma adecuada. Así mismo, se evidenció que no relacionan la suma de expresiones algebraicas con el perímetro, ni la suma de las áreas rectangulares involucradas con el área total de la región poligonal que se muestra en cada figura.

Tan solo el 26,62% de los estudiantes de octavo se encuentran entre las categorías 1 y 2. Los modelos algebraicos del perímetro y el área de regiones poligonales que escribieron de forma correcta se observan en el siguiente cuadro.

Tabla 10.

Tipos de representaciones algebraicas del perímetro y área de figuras del punto 1 de la prueba diagnostico

Figura	Representaciones algebraicas del perímetro	Representaciones algebraicas del área	Observaciones generales
1	$m+m+m+m+4$ $2m+2m+4$	a. $m^2+m+m+1$ b. m^2+2 c. $(m+1)(m+1)$	El modelo más utilizado por los estudiantes para representar tanto el perímetro como el área es el modelo a; el no utilizado para el perímetro es el c
2	$m+m+z+z+4$ $2m+2z+4$	a. $mz+m+z+1$ b. $(m+1)(z+1)$	El modelo más utilizado por los estudiantes para el perímetro es modelo a y el único utilizado para el área es el modelo a
3	$2m+2m+2m+2m$ $8m$	a. $m^2+ m^2+ m^2$ b. $3 m^2$	El modelo más utilizado por los estudiantes para representar tanto el perímetro como el área es el modelo a

En el punto dos, se planteó una pregunta abierta, que buscó identificar la relación que los estudiantes establecen entre magnitudes escalares de rectángulos y operaciones de expresiones algebraicas. Para el análisis de las respuestas se plantearon las siguientes categorías:

R1: Relaciona operaciones de números reales en la construcción de modelos algebraicos del perímetro y el área de regiones rectangulares.

R2: Relaciona por lo menos una de las operaciones de números reales en la construcción de modelos algebraicos del perímetro o el área de regiones rectangulares.

R3: No relaciona adecuadamente operaciones de números reales en la construcción de modelos algebraicos del perímetro y el área de regiones rectangulares.

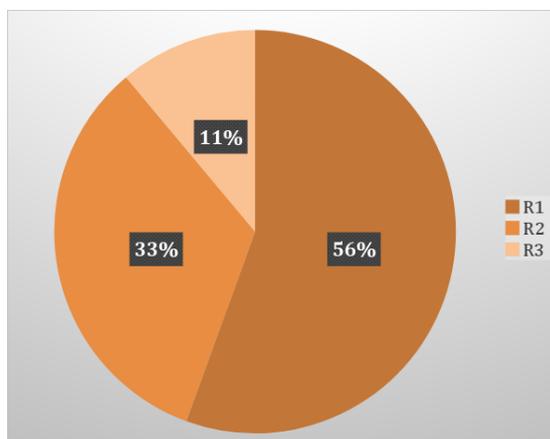


Figura 12. Distribución de las formas de relacionar operaciones de números con la construcción de modelos algebraicos del perímetro y el área de regiones poligonales por estudiantes de grado 8°

Como se observa en la figura 12, 56% de los estudiantes están en la categoría R1; relacionan correctamente las operaciones suma de los lados para realizar el cálculo del perímetro y la multiplicación para calcular el área de rectángulos, encontrándose respuestas similares a la que se presenta en la figura 13.

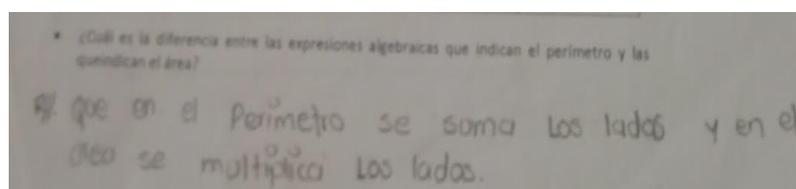


Figura 13. Forma de respuesta general de los estudiantes de la categoría R1.

En teoría más del 50% de los estudiantes referencian la suma de los lados de las figuras poligonales para el cálculo del perímetro pero al llevarlo a la práctica con expresiones algebraicas cometen errores en agrupación de términos semejantes y conversión de registros algebraicos.

Las dificultades presentadas se deben principalmente a que las diferentes representaciones del perímetro y área no provienen de un solo registro (Duval, 1999); debido a que tiene poca apropiación del lenguaje algebraico, particularmente en el manejo de sus operaciones, también, por errores algebraicos producidos por el mal uso de conceptos previos o por un uso inadecuado de registros algebraicos al igual que por operaciones mal referenciadas (García, Segovia, & Lupiáñez, 2011).

Con estos resultados se puede determinar que 74% de los estudiantes de grado octavo correspondientes a las categorías C3 y C4 presentan dificultades en el manejo del lenguaje algebraico para modelar magnitudes escalares de regiones rectangulares y poca apropiación de preconceptos necesarios para la construcción del concepto de factorización de polinomios.

5.2 Implementación de la secuencia didáctica

La implementación de la secuencia didáctica involucró unificar criterios y experiencias para desarrollar procesos de enseñanza con contenidos básicos procurando la movilización de conocimientos, también, promoviendo capacidades, al igual que criterios morales acordes al medio.

En ese sentido el papel del docente en la implementación de la secuencia consistió en asesorar y realizar momentos de retroalimentación a sus estudiantes; a partir de lo desarrollado y trabajado de manera individual o colectiva. Así mismo, su aplicación se desarrolló en cinco sesiones de tres horas semanales, distribuidas como se observa en la tabla 11.

Tabla 11.**Cronograma de fases del diseño implementación de la secuencia didáctica” Construyendo rectángulos algebraicos”**

Fecha	Sesiones	Estrategia didáctica
Septiembre 26 -30 de 2016	Sesión 1: Recepción de consentimiento informado y Prueba diagnóstica Se hace una retroalimentación desarrollando la prueba diagnóstica con todo el grupo y se prepara para el desarrollo de la secuencia didáctica	La docente lee y entrega el consentimiento informado a los estudiantes, aplica la prueba diagnóstica y realiza ajustes a la secuencia didáctica
Octubre 3-7 de 2016	Se realiza toda la tarea 1 Elaboración de herramienta didáctica y manipulación para simulación de una situación real de contexto espacial	Trabajo en grupo con apoyo de monitor y docente.
Octubre 3-7 de 2016	Sesión 2: Actividad de retroalimentación y desarrollo de toda la tarea 2	Trabajo en grupo con apoyo de monitor y docente.
Octubre 18-21 de 2016	Sesión 3: Actividad de empalme y retroalimentación, se desarrolla la tarea 3	Trabajo en grupo con apoyo de monitor y docente
Octubre 24-28 de 2016	Sesión 4: Se desarrolla toda la tarea 4, y se hace actividad de retroalimentación	Trabajo individual con apoyo de monitores
Noviembre 1 de 2016	Sesión 5: Actividad final	Individual y personalizado

En la sesión uno, los estudiantes conformaron sus grupos con el propósito de elaborar sus herramientas de trabajo, se observó buena disposición, vista en términos de solidaridad, trabajo en grupo y colaboración entre pares. En otra actividad el docente o los propios estudiantes realizaron asesorías para el desarrollo de las actividades planteadas, la mayoría de los grupos necesitaron de asesoría de la docente para su desarrollo.

En la segunda sesión, todos los estudiantes llevaron sus herramientas de trabajo en sobres realizados por ellos mismos y la clase se mantuvo en orden, caracterizándose por la concentración de los estudiantes y el trabajo individual o colectivo.

En la tercera y cuarta sesión los estudiantes se mostraron motivados y con actitud competitiva entre ellos, desarrollando estrategias para el diseño de regiones rectangulares con el material manipulativo, así mismo, plantearon diferentes registros de los diferentes polinomios y su respectiva factorización. Algunos pedían explicación y otros querían por ellos mismos diseñar las regiones planteadas en cada tarea.



Figura 14. Disposición de los estudiantes durante la implementación de la secuencia didáctica en el aula

En ese sentido, el trabajo y diseño de regiones rectangulares con el material manipulativo, permitió a los estudiantes modelar algebraicamente el área de regiones rectangulares cerradas transitando de un sistema de representación a otro, hasta lograr un acercamiento experimental al concepto de factorización de polinomios.

Gracias a la incorporación parcial del enfoque del aprendizaje comunicacional, que expone Sfard (2008), se logró que los estudiantes se vincularan al grupo, participando en el desarrollo de las actividades planteadas y utilizando el lenguaje algebraico como medio de comunicación junto con el lenguaje propio del grupo, con unos acuerdos explícitos e implícitos.

5.3 Análisis de los resultados de la implementación de la secuencia didáctica

La evaluación de la implementación de la secuencia didáctica “Construyendo rectángulos algebraicos” aplicada a los estudiantes de grado 8, se hace realizando un análisis cualitativo a los resultados obtenidos en el desarrollo de cada tarea.

5.3.1 Análisis tarea 1

Para el desarrollo de esta tarea se crearon nueve grupos de cuatro integrantes cada uno, nombrados G1, G2,..., G9 para referenciar sus respuestas. De los 36 estudiantes, 28 llevaron los materiales requeridos, por lo que comparten y colaboran en la elaboración del material de tal forma que todos tienen su propia herramienta de trabajo para las siguientes actividades.

Después de recortadas las figuras, los estudiantes las rotulan o codifican con la expresión algebraica que corresponde a su área de acuerdo a los patrones (letras) que asignaron a los lados de los rectángulos a excepción del cuadrado de área 4 cm^2 considerado como patrón de medida del área y rotulado por la unidad. Finalmente algunos grupos diseñan un sobre para guardar su herramienta de trabajo y lo personalizan. Luego siguen desarrollando las actividades planteadas.

Los grupos presentaron dificultades en el manejo del lenguaje algebraico básico, por lo que se realizó una actividad de retroalimentación con las figuras recortadas en términos de modelar sus perímetros y áreas de regiones rectangulares de acuerdo a las expresiones algebraicas vinculadas a sus áreas empleando la herramienta de trabajo.

El propósito de esta tarea implica la utilización de la herramienta de trabajo y las operaciones de expresiones algebraicas para modelar y representar una situación en contexto; pero

principalmente para darle sentido y necesidad de existencia a estos elementos y conectar a los estudiantes en los procesos de enseñanza.

Para el análisis de los desarrollos de las actividades, los resultados se clasifican en tres grupos:

T111: Diseño y elaboración del material manipulativo

T112: Elaboración del plano

T113: Interpretación de las expresiones algebraicas en un contexto espacial

Con respecto a la elaboración del material manipulable (TG11), 20 de los 36 estudiantes manejaron las unidades de medida de longitud y área; elaboraron las figuras rectangulares con las indicaciones dadas, utilizando también conceptos implícitos como perpendicularidad y paralelismo.

Los estudiantes presentaron dificultades al etiquetar cada rectángulo con la representación simbólica correspondiente a su área, 16 estudiantes utilizaron números para representar la magnitud escalar; además, no establecieron relaciones entre las variables y los lados, así mismo, no hicieron uso de letras o símbolos para generalizar un modelo, situación que genera un impedimento para usar el lenguaje algebraico en la representación simbólica de las figuras.

Con respecto al diseño de plano del apartamento que plantea el punto dos de esta tarea (G12):

1. La constructora Bolívar presenta el modelo de los apartamentos que va a construir en un sector del norte de la ciudad. Representar el plano del apartamento con la herramienta de trabajo en el recuadro que esta al frente del modelo.



Figura 15. Apartamento modelo; secuencia didáctica

Los 9 grupos diseñaron siete planos distintos, debido a cuatro grupos presentaron resultados similares. Las figuras se aprecian en la figura 16.

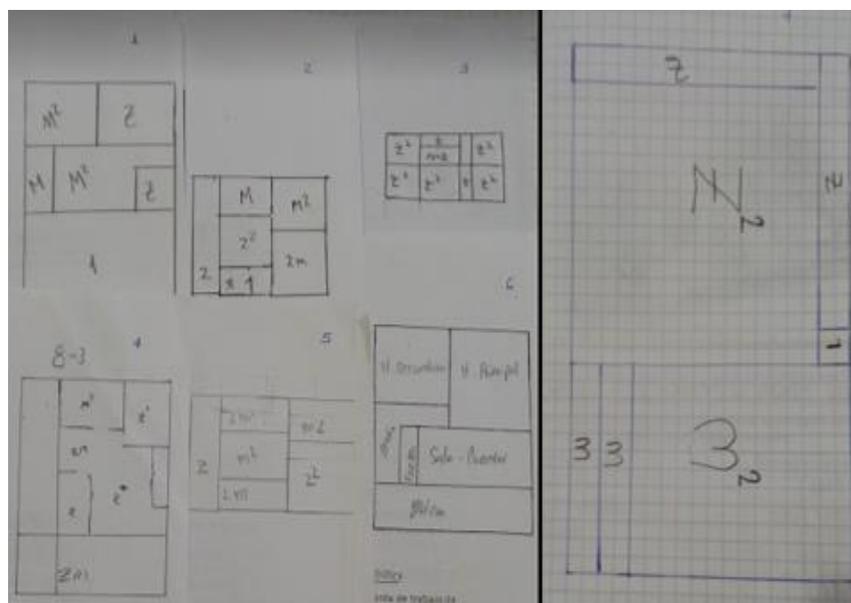


Figura 16. Diseño de planos de los estudiantes de grado 8-3

De los siete diseños a escala construidos por los grupos, el grupo G8 realizó el mismo diseño que el grupo G6, de igual forma, los grupos G9 y G7 realizaron el mismo diseño.

Se puede observar que las representaciones 2, 3, 5 y 7 emplearon la herramienta de trabajo y trataron de conservar las dimensiones en relación al diseño real, aunque el 7 no mantiene la forma de los espacios reales. Por otro lado las representaciones 1, 4 y 6 no cubren todos los espacios con las figuras rectangulares pero mantienen la forma de los espacios del apartamento.

Se puede evidenciar que la visualización del apartamento es concretada físicamente por los estudiantes de manera parcial; así mismo, la conversión de un registro de representación a otro en una estructura (gráfica) equivalente, presenta dificultades en cuanto a preservar la forma de los espacios y establecer relaciones y patrones de medida de área.

Estas dificultades se deben principalmente a los diferentes sistemas de representación por los que debe pasar el área de una región, como Duval (1999) lo explica, están en términos del contenido de la representación, y la forma de la representación. Así mismo, cada estudiante maneja sus propios sistemas de representación, algunos aún evidencian poca apropiación del lenguaje algebraico para modelar las situaciones planteadas.

En relación al manejo de dibujos a escala (proporciones de magnitudes) los grupos que diseñaron la representación 7 evidenciaron dificultades en el empleo de estos conceptos matemáticos, lo que no sucede con otros grupos.

Por otro lado para el análisis de los registros algebraicos en relación a la representación gráfica del diseño del plano (G13), se presenta la siguiente tabla con los registros algebraicos establecidos para cada zona del apartamento:

Tabla 12.

Asignación de los grupos a cada espacio del apartamento de la pregunta dos

Zona del apartamento	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	RI
Habitación principal	mz	mz	z^2	mz	z^2+2	z^2	z^2	z^2	mz	z^2
Habitación secundaria	m^2	m^2	z^2	m^2	mz	m^2	m^2	m^2	m^2	m^2
Sala- comedor	z^2	z^2	z^2	z^2	z^2	zm	mz	zm	z^2	zm
Cocina	Z	z	m	z	m	m	m	m	Z	M
Baño	l	l	l	m	l	l	l	l	l	$m+l$
Balcón	$m+z$	z	$2z^2$	zm	$z+l$	$2m$	$2z$	$2m$	Z	$m+z$

Como se puede evidenciar, la representación algebraica que coincide con el plano diseñado por la herramienta de trabajo, en la de los grupos G2 y G3; mientras que la de los grupos G6 y G8 coinciden con la misma representación, aunque no con el diseño físico. La asignación algebraica que los grupos realizaron a cada área del apartamento está afectada por la representación del apartamento y no con el plano diseñado por ellos.

En ese sentido, los tres tipos de registro difieren entre si debido a errores algebraicos elementales, así como al manejo de relaciones incoherentes y mal justificadas, producidos por el uso inadecuado de conceptos previos, como se plantea en las investigaciones de Caputo y Macías (2006), citados en García, Segovia y Lupiáñez (2011) quienes clasifican estos errores en cinco categorías.

En particular, las diferentes representaciones de un mismo espacio son irreducibles e independientes entre sí, es decir, no todas las representaciones de los grupos provienen o surgen de los registros presentados, también están las representaciones internas de tipo individual, que dependen de la situación que las produce (Duval, 1999). En ese sentido, Socas (1998) alude esta dificultad a la poca actitud afectiva y emocional por falta de concentración.

Una evidencia de lo planteado por Duval (1999) y Socas (1998) se observa en la respuesta que G1 expone al indagar sobre las zonas que ocupan el mayor y menor espacio:

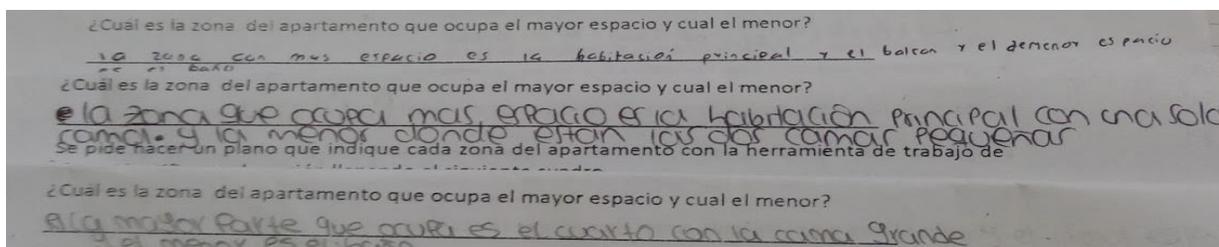


Figura 17. Respuesta del Grupo G1 en relación a referenciar los espacios del apartamento que ocupan mayor y menor área

La respuesta ofrecida por el grupo G1 está condicionada por la figura 17 y por las representaciones internas de cada uno de los integrantes del grupo y no coincide con el área del diseño del plano a partir de las figuras rectangulares. En ese mismo orden, el grupo G3 contesta a la misma pregunta:

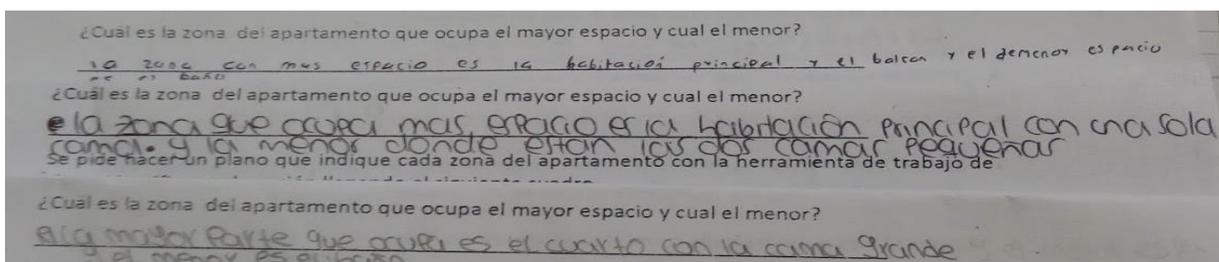


Figura 18. Respuesta del Grupo G3 en relación a referenciar los espacios del apartamento que ocupan mayor y menor área

Este grupo relaciona la representación exterior en términos de la cantidad de camas con al área que corresponde al espacio.

Con respecto a las otras preguntas, los grupos escribieron el polinomio de la región tal como diseñaron el plano, pero solo cinco grupos lo identificaron como el terreno que ocupa el

apartamento, y ningún grupo pudo identificar el largo y el ancho del plano diseñado, consecuentemente no escribieron el área del rectángulo como producto del largo por el ancho.

Al exponer cada grupo sus diseños y hacer un proceso de retroalimentación y mejora en el diseño del plano, se llegó entre todos a la representación RI que se muestra algebraicamente en la última columna de la tabla 12.

Lo anterior muestra que los grupos no establecieron relación con los tres sistemas de representaciones simultáneamente; lo que hace evidenciar problemas de conversión y tránsito de un sistema a otro.

Dado que esta tarea tiene un componente inductivo y preparatorio en relación al manejo del lenguaje algebraico, parte fundamental del pensamiento variacional, se evidencia un avance significativo leve en el uso de propiedades y operaciones de este lenguaje al transitar de una representación a otra. Además, involucran la agrupación de términos semejantes para simplificar los registros algebraicos que representan áreas rectangulares.

Lo anterior es posible dado que la expresión mz representa una figura rectangular del material manipulativo que al ser un registro físico y tangible, permite al estudiante relacionarlo con la cantidad de rectángulos de la misma área.

Con respecto a la aproximación del concepto de factorización que se plantea en la representación del largo por el ancho del terreno que se utiliza para construir el apartamento modelo, se puede afirmar que fue nulo, por cuanto ningún grupo respondió a ese ítem. Esta situación se debe a que el estudiante no identificó las letras como un número o valor indeterminado, en concreto, no identifica las letras como unidades de medida de longitudes.

5.3.2 Análisis tarea 2

Para esta tarea los estudiantes se organizaron en grupos o individualmente según conveniencia y afinidad, todos llevaron su material manipulativo y se tomaron su tiempo para el diseño y uso del material manipulativo de la región que se planteó. Luego respondieron las preguntas que están dadas a partir del diseño la región rectangular con el material manipulativo.

Las dificultades presentadas en esta tarea son los concernientes a la identificación de los lados de las regiones de las figuras rectangulares elaboradas con el material manipulativo que se hizo más innegable en los estudiantes, por lo que se realizó una actividad de retroalimentación para indicar aspectos relacionados con plantear algebraicamente los elementos concernientes a los lados de una región rectangular.

Consecuentemente, esta tarea plantea transitar por diferentes sistemas de representación que modelan el área de una región rectangular identificando los lados de las regiones diseñadas para posteriormente acercarse al concepto de factorización, desde su diseño haciendo uso de las operaciones de polinomios y las estrategias para ligar las tabletas algebraicas, lo que permite hacer el análisis de los datos trabajado de manera descriptiva y a partir de tres categorías de los resultados:

C21: Identifica adecuadamente los modelos algebraicos que representan los lados de la regiones rectangulares diseñadas y escribe los registros que representa algebraicamente su perímetro y área.

C22: Identifica adecuadamente los modelos algebraicos que representan al menos un modelo de uno de los lados de la región rectangular diseñada y escribe solo un registro que representa algebraica de una de las dos magnitudes escalares que se le piden.

C23: No Identifica parcialmente al menos uno de los modelos algebraicos que representan los lados de las región rectangulares diseñadas y escribe al menos un registro que representa algebraicamente sus magnitudes escalares.

C24: No identifica los modelos algebraicos que representan los lados de la región rectangular diseñada y no escribe registros que representen algebraicamente sus magnitudes escalares de los lados de regiones rectangulares.

De los 36 estudiantes, solo 27% están en la categoría C21; 33% en la categoría C22; 25% clasifican en la C23 y el resto en la C24. De los 10 estudiantes que se encuentran en la categoría C21 se destaca la siguiente solución:

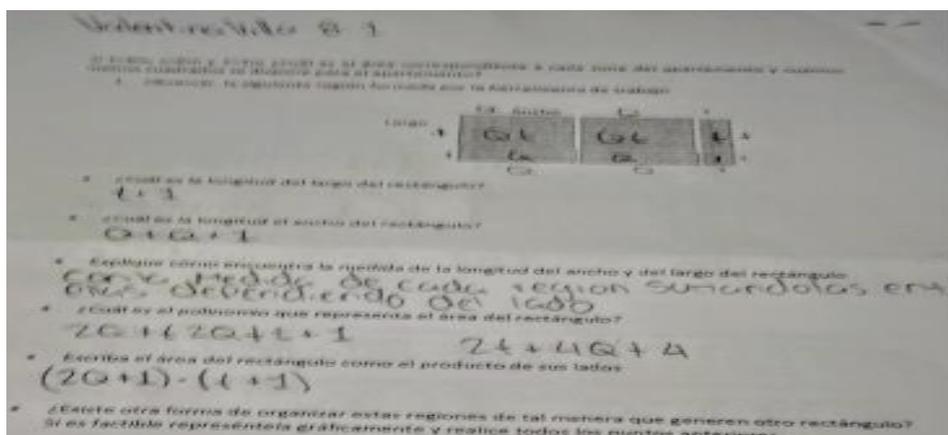


Figura 19. Solución a la tarea 2 Categoría C21

Como se evidencia, el estudiante identifica el área de las figuras con otras representaciones algebraicas; también, descompone cada área con el proceso inverso para identificar la

representación de cada lado; luego reconoce la suma de expresiones algebraicas para escribir adecuadamente el perímetro y el área como producto del largo y el ancho; aproximándose al proceso de factorización. En ese sentido el diseño y construcción de la región rectangular permiten al estudiante acercarse a una aprehensión conceptual del perímetro y área de figuras geométricas, específicamente la aprehensión perceptiva, dado que pasa de lo visual a lo simbólico y viceversa; consecuentemente crea un vínculo físico entre expresiones algebraicas y las propiedades escalares de las figuras geométricas (Salazar, Jiménez, & Mora, 2013):

Ejemplo de esta afirmación es el desarrollo de esta actividad, donde el estudiante hace una buena interpretación a partir del diseño gráfico de la región; descompone el área para identificar el largo y ancho, realizando una buena conversión de un registro a otro. Un ejemplo de categoría C22 se presenta en siguiente la ilustración

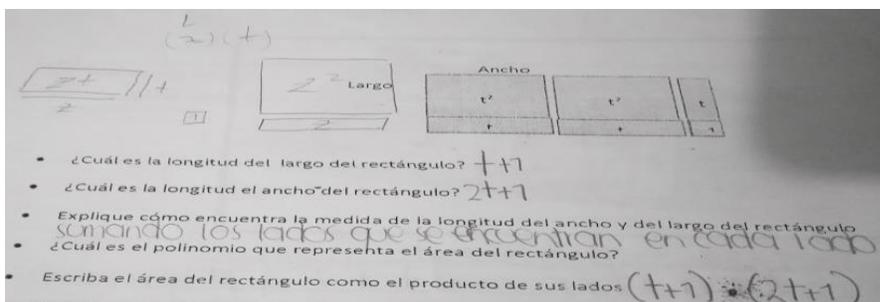


Figura 20. Solución a la tarea 2 Categoría C22

Este estudiante hace una descomposición de la expresión algebraica de un rectángulo para determinar patrones y así identificar el largo y el ancho de la toda la región, no representa algebraicamente el perímetro pero si escribe el área de la región rectangular como producto del largo y el ancho, aproximándose a la factorización del polinomio de grado dos.

Un ejemplo de la categoría C23 en el desarrollo de la tarea 2 realizado por un estudiante del grado octavo:

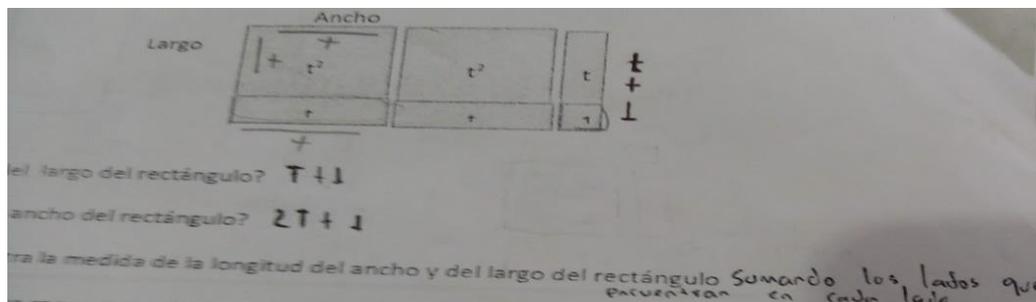


Figura 21. Solución a la tarea 2 Categoría C23

El estudiante emplea el área de cada rectángulo que conforma la región rectangular cerrada para identificar los lados de cada rectángulo, pero no plantea las representaciones de tipo algebraico tanto para el área como para el perímetro. En esta categoría se evidencian dificultades que como plantea Duval (1999) se debe a los diversos sistemas de representación por los que pasa, esto es, transita del gráfico al tangible y de ahí al simbólico para dividirlo en sus partes y obtener los lados de la región, de tal manera que el contenido de la representación y la forma de representación no lo dejan plantear los modelos que se piden.

En la última parte de esta tarea se pregunta por otras formas de organizar las fichas de la región que se muestran en la figura 7, de tal manera que genere otra región rectangular cerrada; el 25% de los estudiantes no realizó la actividad, mientras que el 75% realizaron tres modelos que difieren uno del otro por la organización de las fichas pero que mantiene las condiciones. La figura 22 muestra los tres modelos presentados.

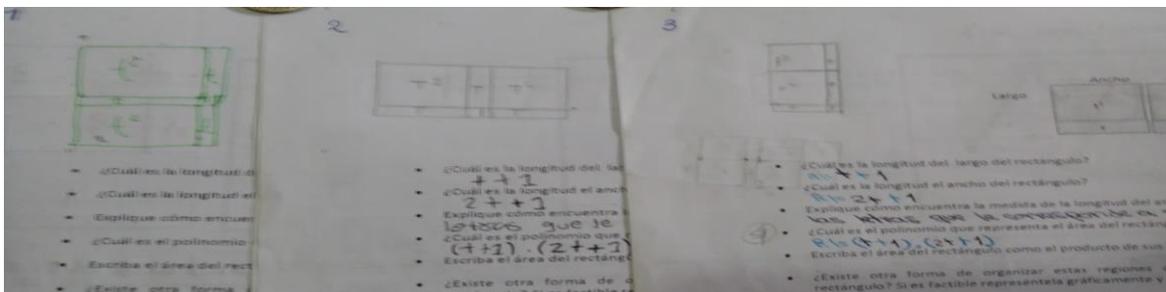


Figura 22. Otros diseños de regiones equivalentes al presentado en la tarea 2

Del análisis y de la observación de la investigadora en el desarrollo de esta tarea se puede constatar que la herramienta de trabajo, como lo plantea Salazar, Jiménez, & Mora (2013), permite la aprehensión discursiva asociando arreglos de fichas rectangulares con propiedades y características geométricas y algebraicas. Además, crea un lazo tangible entre expresiones algebraicas y la geometría, lo que permite acercarse al concepto de factorización de polinomios.

Los estudiantes manipulan muy bien las figuras geométricas para formar regiones a partir de condiciones dadas y su representación física hace que manejen adecuadamente diseños a escala; con una buena traducción de un registro a otro y uso de operaciones algebraicas para representar situaciones geométricas.

Aún se presentan dificultades en la identificación de los lados de las regiones rectangulares diseñadas con material manipulable, una explicación a esta situación se debe a que todas estas representaciones involucran procesos mentales que implican una transformación en la información.

5.3.3 Análisis tarea 3

Las dos tareas anteriores se focalizaron en la manipulación de las figuras rectangulares, el diseño de regiones, la identificación de sus lados y su área desde diferentes registros para llegar a

su representación factorizada, concretando elementos disciplinares y cognitivos. Esta tarea tiene como finalidad fortalecer estas actividades y culminar con la construcción del objeto de estudio.

Los diseños con material manipulativo planteados por medio de la representación polinómica del área de regiones rectangulares, se convirtieron en un reto para los estudiantes logrando una disposición total. Armar regiones mantuvo a los estudiantes concentrados, motivados, detectando y fortaleciendo estrategias y reglas para armar polinomios con las figuras geométricas.



Figura 23. Estudiantes de octavo realizando la tarea 3

En esta tarea aparece el término *factorización* de polinomios, el cual interpretan como el producto del largo por el ancho de una región rectangular cerrada y se hace una retroalimentación de lo aprendido, creando una conexión entre lo trabajado en físico y el representado por lenguaje algebraico transitando por cuatro representaciones del área de las regiones rectangulares cerradas.

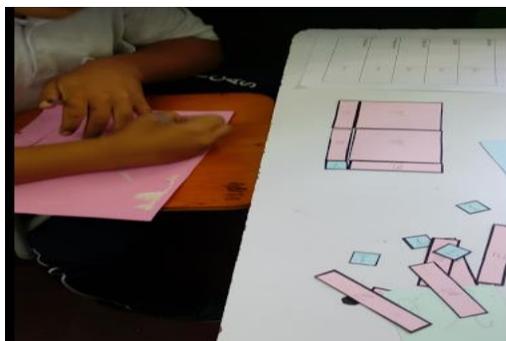


Figura 24. Diseño de áreas rectangulares cerradas con la herramienta de trabajo

De 36 estudiantes solo a 3 se les dificultó diseñar regiones rectangulares con la herramienta de trabajo en el área de la región que se plantea en forma de polinomio de grado dos con coeficientes positivos, siendo asesorados por sus compañeros. Para el análisis de su desarrollo se hace un estudio estadístico de cada ítem que conforma la tarea:

Polinomio	Representación gráfica de la herramienta de trabajo	Largo	Ancho	Área
$x^2 - 8$		x	$x-8$	$(x-8) \cdot x$
$x^2 - 2x - 1$		$x+1$	$x+1$	$(x+1) \cdot (x+1)$
$x^2 - 2x - 2$		$x+m$	$x+2$	$(x+m) \cdot (x+2)$
$x^2 - 2x - 3$		$x+1$	$x+3$	$(x+1) \cdot (x+3)$

Figura 25. Desarrollo de la tarea 3 por un estudiante

Las categorías que se plantean para su análisis son:

C31: Identifica el largo y el ancho de cada región rectangular y hace una adecuada conversión de un registro a otro para representar al área de rectángulos.

C32: Hace una mala conversión de registros para representar al área de rectángulos y no identifica los lados de las regiones rectangulares.

C33: No hace conversión de un registro a otro para representar al área de rectángulos y no identifica los lados de las regiones rectangulares

Para la categoría C31, la gráfica estadística relaciona la representación geométrica a escala que indica el área de la región desde un registro polinómico; sus lados con registros algebraicos y la representación factorizada de dicho polinomio como el producto del largo por el ancho (factorización).

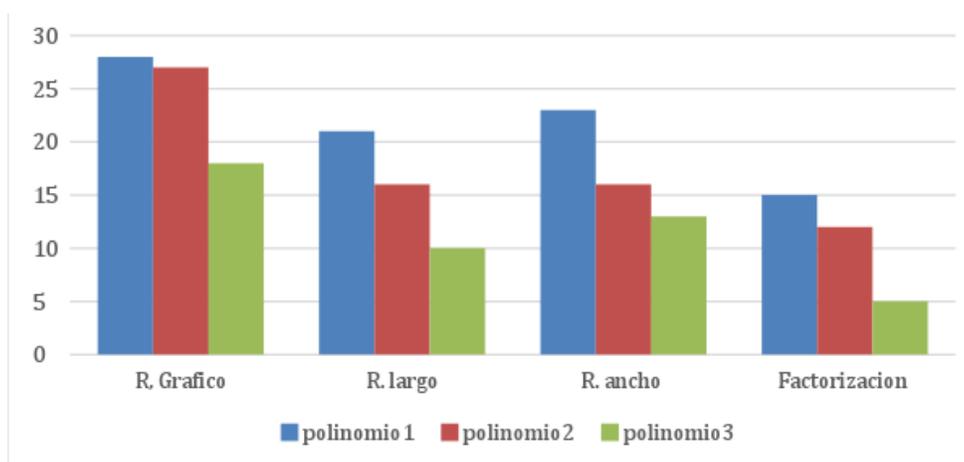


Figura 26. Gráfica estadística Categoría C31

Lo que induce a la siguiente gráfica estadística:

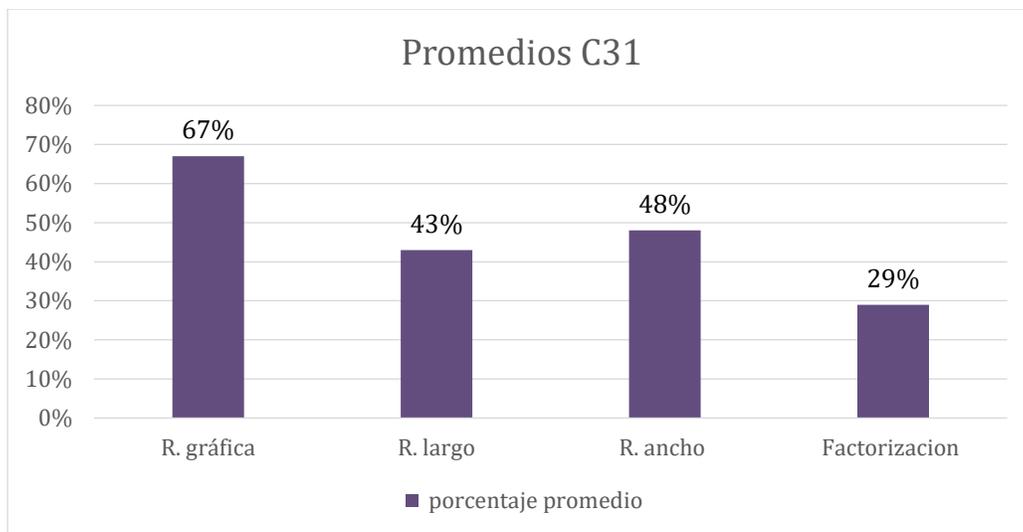


Figura 27. Gráfica estadística de promedios de registros categoría C31

La gráfica estadística muestra que el 67% de los estudiantes de 8° representa acertadamente el dibujo a escala del área de la región planteada; le siguen la representación algebraica de los lados con 43% y 48% respectivamente. Por último, el 29% escriben adecuadamente la factorización del polinomio en términos del largo por el ancho. Se nota también, que el tratamiento a los dos primeros polinomios, gráficamente se mantiene considerablemente; el tercer polinomio por el contrario no tiene un buen desarrollo. En general, tan solo el 13% de los estudiantes hace una conversión adecuada y escriben la representación factorizada en relación al área de una región rectangular cerrada.

Las dificultades que presentan los estudiantes se deben principalmente a la identificación de los lados de la región debido a que no pueden hacer el proceso inverso del área de los rectángulos para identificar sus lados, es decir descomponer el área en sus partes. Situación que se deriva del uso inadecuado de la notación o confusión del lenguaje algebraico y las operaciones que implican plantear el modelo; particularmente, los relacionados con el empleo de letras y

operaciones para la representación de los modelos indicados; también, el incorrecto significado y traducción que hacen los estudiantes del lenguaje simbólico al común y viceversa, (Duval, 1999).

Con respecto a las categorías C32 a continuación se presentan la gráfica estadística

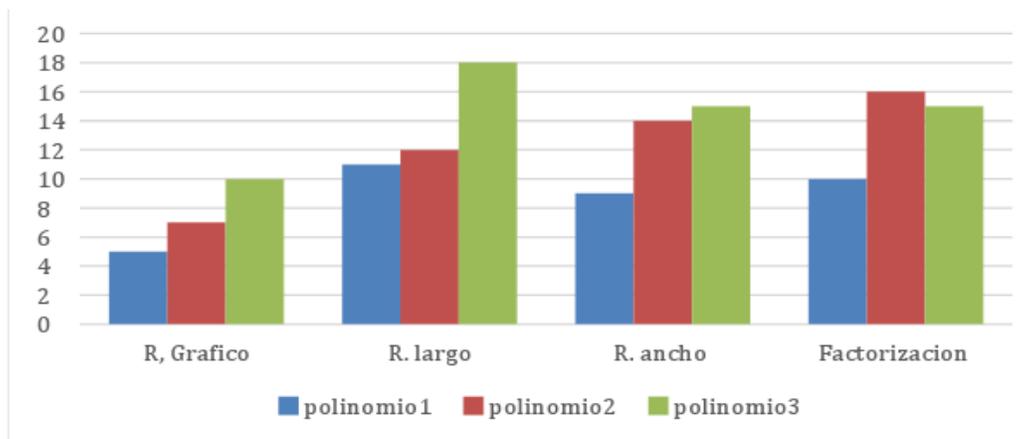


Figura 28. Gráfica estadística Categoría C32

Los promedios de esta categoría en términos de las representaciones se muestran en la siguiente grafica estadística:

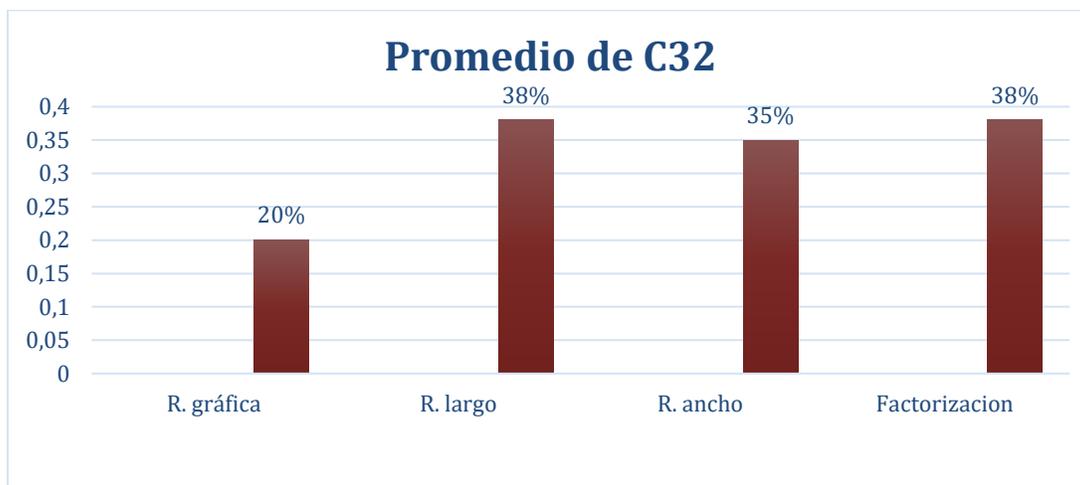


Figura 29. Gráfica de estadística de Promedio de registros categoría C32

Como se visualiza, los porcentajes de la representación gráfica del polinomio; y las algebraicas del largo y ancho así como la factorización del polinomio son en su orden 20%; 38%; 35% y 38% respectivamente. La inadecuada representación del registro de los lados al lenguaje algebraico implica una deficiente factorización del polinomio.

Un ejemplo de esta afirmación en el desarrollo de esta tarea se observa en la figura 28.

Polinomio	Representación gráfica de Rectángulo	Longitud Largo	Longitud Ancho	Factorización
$t^2 - 3t$		t	$t-3$	$t(t-3)$
$t^2 - 2t - 1$		$t+1$	$t-1$	$(t+1)(t-1)$
$t^2 - 22t - 2^2$		$t+2$	$t-2$	$(t+2)(t-2)$
$t^2 - 4t - 3$		$t+3$	$t-1$	$(t+3)(t-1)$

Figura 30. Registros erróneos de las representaciones algebraicas del largo y el ancho

Los inadecuados registros algebraicos que hacen del largo y el ancho se deben a que no descomponen adecuadamente el área de cada pieza; generalizándolo a toda la región. Debido a que el objeto matemático y sus representaciones dependen de la situación que los produce y en ese sentido, cada estudiante tiene sus propios sistemas de representación. Situación persistente, como se muestra en el siguiente registro, al no descomponer el área en sus partes, su factorización es incorrecta

$t^2 - 2t - 1$		$t+1$	$t-1$	$(t+1)(t-1)$
$t^2 - 22t - 2^2$		$(m^2 + m)^2$	$(m^2 + m^2)$	$(m+1)(m-1)$
$t^2 - 4t - 3$		$m^2 + 3$	$m+1$	$(m+3)(m+1)$

Figura 31. Errores frecuentes en la representación de lados de las regiones rectangulares

Los resultados en relación a la categoría C33 se reúnen en la siguiente grafica estadística:

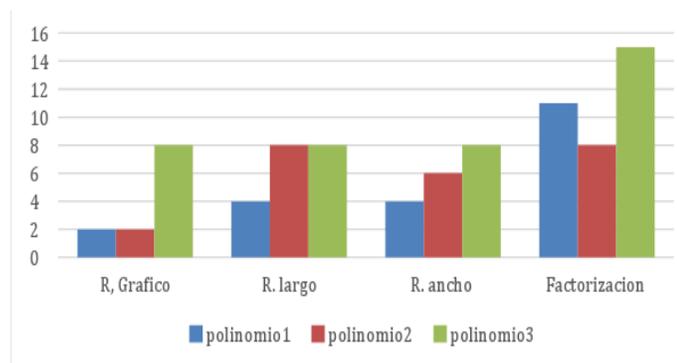


Figura 32. Gráfica de la Categoría C33, tarea 3

En esta categoría se puede evidenciar que muy pocos son los estudiantes que no representan geoméricamente a escala la región que diseñan con la herramienta de trabajo; adicionalmente no hacen una adecuada representación algebraica de los lados representando uno o los dos lados lo que impide la correcta factorización del polinomio.

El desarrollo de esta tarea muestra que los estudiantes aún presentan dificultades en el diseño de expresiones polinómicas que relacionan tanto el largo como el ancho, dado que no hacen bien el proceso invertido, esto es, el proceso de conversión del área en sus partes.

Por otro lado, adquieren habilidad en el diseño de áreas en términos de su representación en lenguaje algebraico, mejorando la agrupación de términos semejantes y la multiplicación de polinomios.

En relación a la actividad extra clase, investigar sobre la definición de factorización de polinomios, todos los estudiantes encontraron una de las cuatro definiciones presentadas en esta

investigación o muy similares; al compartir y hacer actividad de retroalimentación, el grupo presento las siguientes observaciones (ver anexo D):

- La factorización de polinomios es una forma de representar el área de una región rectangular a partir de su largo y ancho.

- Existen varias formas de armar una región rectangular cerrada con el material manipulativo.

- Si no se identifican bien los lados de cada figura rectangular es difícil escribir correctamente la factorización.

- Existen polinomios de coeficientes positivos que no admiten su representación como una región cuadrada, por ejemplo t^2+3 ;

Existen polinomios que admiten una estrategia común para unir las figuras, tales como t^2+4t+1

En esta tarea el logro del objetivo en términos de la construcción del concepto de factorización de polinomios presenta dificultades por la conversión de los sistemas de representación para identificar sus partes, pero se logra un avance significativo en el tratamiento del lenguaje algebraico y sus operaciones.

5.3.4 Análisis tarea 4

En esta sesión, se realizó una retroalimentación para identificar los lados de las regiones rectangulares diseñadas con el material manipulativo y la concreción del concepto de factorización

de polinomios de grado dos con coeficientes positivos.,

Su desarrollo se convirtió en una de las sesiones más productivas en términos de desarrollo de procesos cognitivos, liderazgo, trabajo colaborativo, concentración y motivación.

El mayor participe de este logro fue el reto de armar de manera eficaz una región rectangular dado un polinomio, e identificar que no todos los polinomios podían poden llegar a ser representados por una región rectangular cerrada y por tanto no se pueden factorizar (polinomios irreducibles de grado dos con coeficientes positivos).



Figura 33. Desarrollo de la tarea 4, estudiantes grado octavo

En esta actividad, los estudiantes trabajaron de manera libre, grupal o independiente, cuando presentaron dificultades o no entendieron, sus propios compañeros les explicaron, además, se prestaron las figuras entre si y crearon sus propios patrones retando a otros compañeros a que escribieran el polinomio y determinaran los lados o diseñaran otra región rectangular que representara la misma factorización.

Para el análisis de esta tarea se establecen las siguientes categorías:

C41: Desarrolla correctamente todas las actividades planteadas haciendo correctamente algunas la conversión de un registro a otro y escribiendo correctamente la factorización de polinomios de grado dos.

C42: Desarrolla parcialmente las actividades haciendo un proceso de conversión de registros polinómicos- físicos- geométricos pero no escribe correctamente algunas las factorizaciones de polinomios de grado dos

C43: No hace correctamente la transición de un registro polinómico al físico o al geométrico y no escribe la factorización de polinomios de grado dos.

De los 36 estudiantes el 50% de los estudiantes de grado 8-3, se encuentran en la categoría C41, esto es, realizan correctamente la conversión de un registro a otro en relación al área de regiones rectangulares, hace inversión de los registros para obtener información de los lados y por ende realizan correctamente la factorización del polinomio dado: muestra de ello es este el siguiente registro:

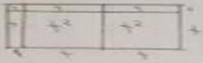
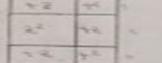
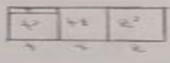
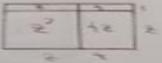
Polinomio	Representación con la herramienta de trabajo	Factorización
$t^2 + 4t + 4$		$A = (t+2) \cdot (t+2)$
$2t^2 + 3t + 1$		$A = (t+2t) \cdot (t+1)$
$2zt + 2t$		$A = (z+1) \cdot 2t$
$z^2 + 3tz + 2t^2$		$A = (z+t) \cdot (z+2t)$
$z^2 + tz + t^2 + t$		$A = (z+t) \cdot z$
$z^2 + tz + t + z$		$A = (z+t) \cdot (z+1)$

Figura 34. Desarrollo tarea 4, categoría C41

Como se puede observar el estudiante identifica el lado de cada figura rectangular que conforma la región poligonal a partir del registro algebraico que representa su área, por ejemplo si un rectángulo tiene el registro zt su largo es z y su ancho es t .

Después de este proceso, identifica el largo o el ancho de la región poligonal como la suma de las expresiones algebraicas que representan los lados de cada figura, desarma las áreas de los patrones para obtener la longitud de sus lados y así identificar y aplicar adecuadamente la estructura de región para posteriormente escribir la factorización de cada polinomio, por tanto se ha apropiado del concepto desarrollado y hace una buena aprehensión del objeto de estudio.

Cabe anotar que al construir las regiones rectangulares con la herramienta de trabajo, los estudiantes asignaron variables a su conveniencia lo que no afecto, no se presentaron dificultades en la construcción de las regiones rectangulares en el momento de realizar la factorización del polinomio, lo que muestra la transición de un registro algebraico a otro del mismo tipo sin perder la estructura; ejemplo de ello es el siguiente desarrollo de la tarea:

Polinomio	Representación con la herramienta de trabajo	Factorización
$z^2 + 4z + 4$		$(z+2) \cdot (z+2)$
$2z^2 + 3z + 1$		$(2z+1) \cdot (z+1)$
$2zt + 2t$		$(2t) \cdot (z+t)$
$z^2 + 3zt + 2t^2$		$(z+t) \cdot (z+2t)$
$z^2 + tz + t^2 + t$		$(z+t) \cdot (z+t)$
$z^2 + tz + t + z$		$(z+t) \cdot (z+t)$

Figura 35. Desarrollo tarea 4, cambio de variables

En esta figura, el estudiante cambió la variable t por m y esto no afectó para nada la factorización de los tres primeros polinomios.

Con respecto a la categoría C42, el 23% de los estudiantes pueden transitar por registros tangibles (diseño de regiones rectangulares con la herramienta de trabajo); algebraicos (polinomios de grado dos con coeficiente positivo) y geométricos (representación a escala de la región diseñada); pero se les dificultar hacer conversiones de estas representaciones para identificar los lados y por ende escribir la factorización del polinomio; la figura 36 evidencia esta afirmación:

Polinomio	Representación con la herramienta de trabajo	Factorización
$m^2 + 4m + 4$ ($m^2 + 4m + 4$)		$(m+2) \cdot (m+2)$
$2m^2 + 3m + 1$ ($2m^2 + 3m + 1$)		$(m+1) \cdot (2m+1)$
$2m^2 + 2m$ ($2m^2 + 2m$)		$(2m+2) \cdot (m)$
$z^2 + 3z + 2m^2$ ($z^2 + 3mz + 2m^2$)		$(3m) \cdot (2m)$
$z^2 + z + t^2 + t$		$(m) \cdot (3m+2)$
$z^2 + z + t + z$ ($z^2 + mz + m + z$)		$(2z) \cdot (m+1)$

Figura 36. Ejemplo de solución tarea 4

Aquí se evidencia observa como al representar gráficamente a escala la región, el estudiante no comete errores en la representación del quinto polinomio; además, identifica los lados de la región pero no los relaciona con la suma de expresiones algebraicas para representarlos, lo que le genera una factorización incorrecta.

También se puede observar que el polinomio de la quinta y sexta fila están mal diseñados por las figuras rectangulares; debido a que aún no tiene claras las reglas para unirlas, estableciendo una mala interpretación y representación geométrica.

Finalmente; el 27% de los estudiantes están en la categoría C43, lo que indica que no hacen adecuadamente la transición de una representación polinómica a la física; por no tener claras las reglas para unir las fichas rectangulares, lo que conlleva al diseño de una región rectangular cerrada que no cumple las condiciones. Situación Lo que no les permite hacer una buena identificación de los lados de la región poligonal y hace que escriban modelos polinómicos que no corresponden a su respectiva la factorización; del polinomio; ejemplo de esto es el desarrollo de la siguiente tarea:

Polinomio	Representación con la herramienta de trabajo	Factorización
$t^2 + 4t + 4$		$3m + 4 + m^2$ $(m + 4 + m^2)$
$2t^2 + 3t + 1$		$4A = 3m^2 + 3m + 1$ $(m^2 - m - 1) - m$
$2zt + 2t$		$3m^2 + 2m$ $(m^2 - 2m)$
$z^2 + 3tz + 2t^2$		$3m^2 + 2m + 7z^2$ $(mz - m)$
$z^2 + tz + t^2 + t$		$mz + m^2 + m^2z^2$ $(mz - m^2 - m - z^2)$
$z^2 + tz + t + z$		$mz + m + z + z^2$ $(mz - m - z)$

Figura 37. Ejemplo Categoría C43

En este caso particular la representación geométrica de los polinomios de las filas 2, 3, 4 y 5 infiere unas malas inadecuadas estrategias para unir las figuras generando modelos algebraicos que no corresponden a los planteados.

Finalmente el 73% de los estudiantes hacen una buena conversión de sistemas de representación, debido al vínculo físico que los estudiantes experimentan con las expresiones algebraicas cuando manipulan la herramienta de trabajo, facilitando la interiorización de las

operaciones algebraicas en los registros algebraicos de la representación del área de regiones poligonales; en concordancia con lo planteado por Salazar, Jiménez, & Mora (2013).

Así mismo, logran factorizar polinomios de grado dos, registros correspondientes al área de las regiones rectangulares elaboradas con las fichas de trabajo; al identificar adecuadamente logran identificar los lados y escribir parcialmente la factorización de los polinomios indicados; esto es, modelan y representan algebraicamente el área de una región rectangular cerrada transitando de una representación a otra.

En el tránsito de una representación a otra, fortalecen el pensamiento variacional y espacial en términos de la apropiación de la suma y multiplicación de expresiones algebraicas, agrupación de términos semejantes, elaboración de regiones rectangulares en función de la representación de su área.

5.4 Rejilla de observación

A continuación se muestran las observaciones que la docente realizó de manera general en la implementación de la secuencia didáctica en relación a cuatro aspectos que tuvo en cuenta: disposición, apropiación del pensamiento variacional, material manipulativo y comportamiento. Cabe anotar que esta rejilla se llenó durante el desarrollo de la secuencia didáctica, y que se tuvo en cuenta en el análisis de cada tarea.

Tabla 13.

Rejilla de observación

Desempeños	Indicadores de Evaluación	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Aspectos a evaluar		Observaciones	Observaciones	Observaciones	Observaciones
Disposición	<p>ACTITUD Y MOTIVACION: Referente al interés y perseverancia en la consecución de las actividades y aprendizaje individual</p> <p>TRABAJO GRUPAL O COLABORATIVO: relacionado con la participación activa y reflexiva en el desarrollo de las tareas como miembro de un grupo o del curso</p> <p>MANEJO DEL TIEMPO: Aprovechamiento del tiempo para la ejecución de las actividades</p>	<p>Con respecto al primer indicador, 20 estudiantes muestran interés y realizan sus actividades; 10 se muestran distraídos y 6 se distraen con el celular en la primera parte de la actividad. Finalmente 12 de los 16 se conectan con las actividades y realizan parcialmente las actividades.</p> <p>Con respecto a dos indicadores restantes se puede constatar que de los 9 grupos conformados 6 participan activamente y hacen un buen manejo del tiempo asignado para cada actividad, Los tres restantes trabajan parcialmente</p>	<p>En esta tarea 26 estudiantes se encuentran con disposición en con el desarrollo de las actividades y 10 se distraen continuamente con otro tipo de actividades</p>	<p>Todos los estudiantes presentan una buena actitud en el desarrollo de la tarea. Cinco estudiantes sirven de monitores a sus compañeros en el manejo de la herramienta de trabajo. El 75% de los estudiantes participan activamente en su propio aprendizaje</p>	<p>El reto de armar y construir polinomios con las figuras rectangulares tiene motivados, interesados y proactivos en su aprendizaje a 33 de los 36 estudiantes. De los 33 estudiantes tres hacen la representación gráfica a escala sin la ayuda de la herramienta de trabajo y como monitores explican sus estrategias. Tres estudiantes tienen dificultades de concentración y actitud, se le llama la atención e intentan realizar las actividades pidiendo asesoría</p>
Apropiación del pensamiento variacional	<p>Apropiación del lenguaje algebraico en construcción de modelos y sistemas de representación del área de regiones rectangulares y construcción del</p>	<p>Con respecto al manejo del lenguaje algebraico 15 estudiantes tienen dificultad en modelar algebraicamente las áreas rectangulares, tienen poco dominio en operaciones</p>	<p>Se hace retroalimentación y se asignan cinco estudiantes que tienen buen dominio del lenguaje algebraico para asesorar a 10 de sus compañeros.</p>	<p>Se hace una buena apropiación de la representación polinómica del área de regiones rectangulares cerradas, pero aún se presentan</p>	<p>Todos los estudiantes manejan adecuadamente tres registros diferentes del área de regiones rectangulares, 27 de los cuales manejan adecuadamente la</p>

Desempeños	Indicadores de Evaluación	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Aspectos a evaluar		Observaciones	Observaciones	Observaciones	Observaciones
	concepto de factorización	<p>algebraicas y no hacen una buena representación algebraica del área de regiones rectangulares. Tienen dificultades en los registros algebraicos del perímetro de regiones rectangulares. No se hace aproximación al concepto de factorización</p>	<p>En la transición del sistema de representación algebraico tienen dificultad en descomponerlo en sus partes, consecuencia de una mala identificación de los lados de la región rectangular. Se hace un acercamiento parcial del concepto de factorización pero como producto de factores lineales, que representan los lados de la región macro</p>	<p>dificultades en el tratamiento de sus partes. 27 estudiantes manejan tres registros diferentes del área de regiones rectangulares y parcialmente la relacionada con la factorización de polinomios. Se hace una aproximación directa al concepto de factorización desde la representación del área de regiones rectangulares. Se identifican cuatro métodos de factorización para los que cinco estudiantes establecen reglas en la construcción de polinomios respectivos con la herramienta de trabajo.</p>	<p>cuarta que tiene que ver con la factorización de polinomios. Tiene buen manejo del diseño a escala, manejan patrones de medida, plantean modelos que representan el área o el perímetro de regiones rectangulares con un empleo apropiado de las operaciones algebraicas. Pueden factorizar polinomios de grado dos con coeficientes positivos que involucren, factores comunes, agrupación por términos polinomios de la forma x^2+bx+c y ax^2+bx+c. Identifican polinomios irreducibles de grado dos específicamente los de la forma x^2+</p>
Material manipulativo	uso del material para la realización de las actividades y evaluación de estrategias que	Elaboran el material didáctico, lo rotulan pero no hacen un buen uso en el diseño de una	De los 36 estudiantes, 20 determinan reglas de para unir las figuras y diseñar regiones	El 75 % de los estudiantes utilizan y unen adecuadamente las figuras	El 100% de los estudiantes manejan adecuadamente el material manipulativo,

Desempeños	Indicadores de Evaluación	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Aspectos a evaluar		Observaciones	Observaciones	Observaciones	Observaciones
	propicien su manejo adecuado	situación de contexto espacial.	rectangulares cerradas.	rectangulares para diseñar otras. Este material les permite los estudiantes inferir crear usar expresiones algebraicas de manera tangible y hace que transiten y visualicen cuatro sistemas de representación del área de regiones rectangulares.	construyen regiones, plantean reglas, se retan y juegan con ella. Lo que permite cambiar de actitud frente al lenguaje algebraico. Esta herramienta permite a los estudiantes visualizar cuatro métodos de factorización de manera tangible y reflexiva.
Comportamiento	Solidaridad, respeto, colaboración y manejo de normas que permitan un buen ambiente escolar y propicien el logro de los objetivos	De los 36 estudiantes, 25 manejan un buen comportamiento y muestran su solidaridad prestando los materiales para la elaboración de las figuras rectangulares	Se maneja un ambiente escolar que permite que los estudiantes del grado octavo realicen sus actividades. Solo cinco estudiantes están generan indisciplina por falta de concentración	Buen comportamiento y manejo de las normas	Buen comportamiento y manejo de las normas

6. Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones que surgieron a lo largo de esta investigación y en la consecución parcial o total de los objetivos específicos, enfocados en favorecer el desarrollo del pensamiento variacional, específicamente en el manejo del lenguaje algebraico y el acercamiento a la construcción del concepto de factorización de polinomios.

Con respecto a la identificación de dificultades del pensamiento variacional de los estudiantes de octavo, de la Institución Educativa Técnica Comercial las Américas de la ciudad de Cali, el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica mostro que el 73% tenían dificultades en la apropiación del lenguaje algebraico, sus operaciones y el uso adecuado para representar modelos de magnitudes escalares de regiones poligonales.

Las dificultades más marcadas se deben al orden del manejo de términos semejantes y agrupación de términos, al uso de representaciones algebraicas que modelan el perímetro y área de regiones poligonales debido a que, aunque en teoría pueden relacionar estas magnitudes con operaciones de números reales, al llevarlas al lenguaje algebraico se pierde la estructura debido al cambio de sistemas de representación y la interpretación de estos.

Esto es producto de los diferentes sistemas de representación que tiene cada estudiante y la forma como los articula con los nuevos conceptos, que generalmente son fundamentados inadecuadamente por falta de apropiación. Otra razón se debe a la falta de sentido de las expresiones algebraicas y objetos matemáticos por parte de los estudiantes, como lo plantea Socas (1998), junto con la poca actitud afectiva y emocional debido a la falta de concentración.

Con respecto al diseño e implementación de la secuencia didáctica “construyendo rectángulos algebraicos” se pudo evidenciar varios aspectos.

Teniendo en cuenta que la implantación del modelo teórico a priori (García, y otros, 2013) como marco didáctico permitió organizar la secuencia didáctica con actividades que vincularon los sistemas de representación del área de regiones rectangulares y material manipulativo de manera coherente y encaminada al fortalecimiento del pensamiento variacional y la construcción del concepto de factorización de polinomios.

En ese sentido, los elementos que se destacan son:

En primer lugar, la organización de cada una de las actividades de las tareas matemáticas (García, Coronado, & Giraldo, 2015) que conforman la secuencia didáctica, colocando en juego los conocimientos de los pensamientos variacional, espacial, métrico y numérico y otros pensamientos matemáticos, al igual que habilidades y competencias matemáticas de los estudiantes.

La vinculación de los sistemas de representación y materiales manipulativos permitió a los estudiantes de octavo, accionar y poner en uso habilidades matemáticas para plantear y modelar las diferentes formas de representar el área de una región rectangular cerrada. Movilizando la capacidad para interpretar y distinguir formas de representación, así como las interacciones que existen entre las diversas representaciones y por ende aproximarse al concepto de factorización de polinomios y distinguir cuatro métodos desde otro enfoque diferente al convencional.

Por tanto, esta estrategia didáctica, como indica Penalva y LLinares (2011), permitió planear y pensar situaciones matemáticas para el estudiante de tal forma que sea participe

de su propio aprendizaje, usando sus conceptos previos, relacionándolos con otros desde su propia experiencia y adquiriendo sentido, a partir de estrategias de solución, análisis y desarrollo de procesos de simbolización.

Sobre las competencias matemáticas, que son un aspecto fundamental del modelo teórico a priori, se puede concluir que la comunicación matemática se movilizó desde la representación y modelación de magnitudes escalares de regiones rectangulares y desde diferentes sistemas de representación.

Con respecto a la evaluación de la efectividad de la secuencia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento variacional de los estudiantes de grado octavo, se puede concluir que del 73% que presentaban dificultades en la apropiación y manejo adecuado del lenguaje algebraico, después de aplicada la secuencia didáctica, tan solo el 26% no las superó.

Los estudiantes alcanzaron un manejo adecuado de las expresiones algebraicas empleando sus operaciones y características para la modelación de sistemas de representación de una situación en contexto geométrico, debido a problemas relacionados con el tratamiento y conversión de los registros y sistemas de representación trabajados sin lograr una completa aprehensión del objeto de estudio

Por tanto, la apropiación del lenguaje algebraico de los estudiantes de octavo se fortaleció parcialmente con la planificación de las actividades con material manipulativo y las representaciones de regiones rectangulares cerradas fue de gran ayuda para aproximar el concepto de factorización de polinomios aunque se limitó el concepto a polinomios de grado dos con coeficientes positivos, cortando la posibilidad de otro tipo de construcciones y factorizaciones.

Así mismo no se profundizó sobre los registros algebraicos incorrectos que los estudiantes realizaban en relación a las representaciones algebraicas de los factores lineales y el uso del lenguaje algebraico para modelar situaciones presentó ambigüedades en la multiplicación y suma.

Con respecto a los sistemas de representación y material manipulable se concluye que la posibilidad de vincular material manipulable también le permitió al estudiante establecer estrategias y reglas desde su propia experiencia, logrando una participación activa y reflexiva de su propio aprendizaje, construyendo y compartiendo significados con sus compañeros, logrando niveles de apropiación de la matemática que le permite comunicarse y solucionar problemas.

Consecuentemente, los sistemas de representación del área de regiones rectangulares, permitió constatar que la interpretación de las representaciones semióticas no es absoluta tal como lo plantea Duval (1999), evidenciando que dependen de las representaciones internas del estudiante y como conjunto de símbolos, ideas, o procedimientos matemáticos; además, que el tránsito de una representación a otra le permite al estudiante identificar elementos y características del objeto matemático adquiriendo mayor sentido en su comprensión.

Por último y no menos importante, la disposición de los estudiantes de grado octavo frente al proceso de aprendizaje de matemáticas en el aula de clase contribuyó al logro de los objetivos de la investigación.

Teniendo en cuenta que este fue el motor que dio la posibilidad a este trabajo, se puede constatar que la aplicación de la secuencia didáctica permitió cambiar la visión de apatía, desgano y desinterés que traía la mayoría de los estudiantes de grado octavo sobre la matemática.

El diseño de actividades de aprendizaje que logran captar la atención de los estudiantes, involucrando la construcción del conocimiento y por ende la necesidad de conocer y comprender lo que ha de ser enseñado, enmarcados en un ambiente de trabajo colaborativo, apoyado por monitores y guiados por el conocimiento del docente, permiten alcanzar parcialmente las expectativas, pero especialmente la disposición.

Ejemplo de esta afirmación fue retarlos a construir regiones rectangulares con el material manipulativo que representarán un polinomio dado; fomentando su concentración y promoviendo la búsqueda de estrategias, desarrollando de esta forma habilidades, competencias y uso de conocimientos matemáticos.

Otro aspecto a resaltar es el diálogo asertivo con aquellos estudiantes que hacían indisciplina lo que permitió cambiar su disposición para desarrollar las actividades planteadas en la secuencia didáctica.

Bibliografía

- Ballén, J. (2014). *El álgebra geométrica como recurso*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Ballén, J. (2014). *El álgebra geométrica como recurso recurso didactico en la factorizacion de polinomios de grado dos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Bedoya, N., & Londoño, H. (1985). *Matemática Progresiva*. Bogotá: Norma.
- Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la Educación matemática*. Bogotá: Universidad del Valle.
- Bressan, A. M., Bogisig, Beatriz, & Karina, C. (2009). *Razones para enseñar geometria en la educación básica, mirar, decir, construir y pensar*. Madrid: Piramide.
- Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, Carmen, & Serrano, C. (2002). *Alfa 8*. Bogotá: Norma.
- Castellanos, M., & Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Pasto.
- Castellanos, R., & Florez, R. (2006). *El aprendizaje de ecuaciones de primer grado mediante el empleo de una estrategia de solución de problemas y una representación gráfica*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 99-110.

- Comité de Calidad Institución Educativa Técnica Comercial las Américas. (2016). *Informe gestion académica área matemáticas*. Cali.
- Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle.
- Euclides. (1991). *Elementos. Libros I-VI*. Biblioteca Clásica.
- Fernández, F. (1999). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Granada.
- García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Giraldo, A., Tovar, B., Morales, S., & Cortés, D. (2013). *Competencias Matemáticas y actividad matemática de aprendizaje*. Florencia: Universidad del Amazonas.
- García, Coronado, & Giraldo. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de las competencias matemáticas*. Florencia: Universidad del Amazonas.
- García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de los estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas tareas . *Universidad de Granada, Granada* .
- Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico. *Recherches Didactique de Mathématiques*, 295-332.
- Gómez, P., & Carulla, C. (1999). *Sistemas de representación, mapas conceptuales y concepciones de los profesores sobre la función cuadrática*. Madrid.

Herscovics, N. (1980). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 60-86.

Herstein, I. (2006). *Algebra Moderna*. México: Trillas.

ICFES. (2015). *Pruebas Saber 3°. 5° y 9°*. Recuperado el Julio de 2014, de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jsp>

ICFES. (2016). *Resultados pruebas Saber 11. Resultados Nacionales. Resumen Ejecutivo*. Bogotá: ICFES.

Jiménez, S., Salazar, V., & Mora, L. (2013). La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. *ICEMACYC*.

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student Difficulties in Mathematizing Word Problem in Algebra. *Eurasian Journal of Mathematics, Science & Tecnología Education*, 2481-2501.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2017). *Colombia aprende*. Obtenido de <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siempre diae/86402>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional -MEN. (2003). *Estándares Básicos de Calidad. Área Matemáticas*. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional -MEN. (2015). *Índice Sintético de Calidad Educativa; IEC las Américas*. Bogotá.

Morales, I., & Sepulveda, A. (2006). Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra. *Memorias XIV Encuentro de profesores de Matemáticas*, 1-8.

Palomino, M. F. (2011). *La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de lápiz, papel y algebra computacional*. Trabajo de grado, Universidad del Valle, Maestría en Educación Matemática, Cali.

Programme for International Student Assessment - PISA. (Agosto de 2015). *Informe Pruebas PISA*. Obtenido de OECD: <http://www.oecd.org/pisa/data/>

Rico, L. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Intervención psicopedagógica y currículum escolar*, 153-182.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA, sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, 274-294.

Rivera, C. (2017). *Factorización polinomios*. Recuperado el 2017, de http://www.algebra.carimobits.com/Material%20del%20Curso/algebra_factorizacion_polinomiosv2.pdf

Rubio, M. (2016). *Polinimios*. Obtenido de http://www.famaf.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/24025/mod_resource/content/1/factorizaci%C3%B3n-polinomios.pdf

- Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, L. (2013). *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización*. Santo Domingo, República Dominicana: I CEMACYC.
- Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, L. (2013). *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización*. Santo Domingo, República Dominicana: I CEMACYC.
- Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, L. (2013). *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización*. Santo Domingo, República Dominicana: I CEMACYC.
- Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 71-92.
- Sandoval, N. (2014). *Diseño de una secuencia didáctica que integra el uso de origami para el aprendizaje de la factorización en grado octavo*. Palmira: Universidad Nacional de Colombia.
- Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Cali: Universidad del Valle.
- Socas, M. (1998). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en educación matemática*, 19-52.
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática - NTCM. (2000). *Principios y Estándares para Educación Matemática*. Sevilla: Thales.
- Tobón, S. (2006). *Formación basada en competencias*. Bogotá: Ecoe.
- Tobón, S. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. Mexico : Pearson.

Valoyes, L. E., & Malagón, M. R. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la formación escolar*. Cali, Valle del Cauca, Colombia: Universidad del Valle.

Vasco, C. (2000). *El pensamiento variacional y la modelacion matemática*.

Villa, J., & Ruiz, M. (2010). *Pensamiento variacional: seres humanos con Geogebra en la visualización de noción variacional*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Anexos

Anexo A. Prueba diagnóstica

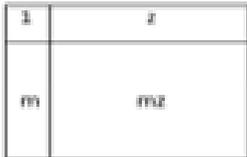
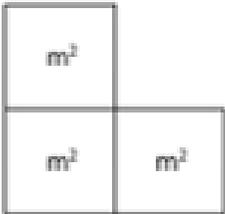
Anexo 1: Prueba diagnóstica

 ALCALDÍA DE SANTIAGO DE CALI	I.E. I.C. LAS AMÉRICAS	GRADO OCTAVO	
	DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	SEPTIEMBRE 2018	
	PRUEBA DIAGNÓSTICA		

NOMBRE:

OCTAVO

Cada figura rectangular de la primera columna tiene la información algebraica correspondiente al área de cada rectángulo que la conforma. En la segunda columna debe escribir el polinomio correspondiente al perímetro y en la tercera columna el polinomio correspondiente al área de la región

Región	Polinomio que expresa el perímetro	Polinomio que expresa el área
		
		
		

2. ¿Qué operaciones de expresiones algebraicas se necesitan para escribir el perímetro y área de cada figura?

Anexo B. Secuencia didáctica “Construyendo rectángulos algebraicos”



CONSTRUYENDO RECTANGULOS ALGEBRAICOS

Secuencia Didáctica

DESCRIPCIÓN BREVE

Aquí encontrarse cuatro tareas matemáticas que te mantendrán diseñando rectángulos de manera divertida y retadora; realizando diferentes representaciones de su área para llegar al concepto de factorización de polinomios algebraicos de grado dos.

Patricia Margot Pisso M.

TAREA 1

Descripción:

Inicialmente debes elaborar tu herramienta de trabajo que consiste en recortar figuras rectangulares planas de diferentes tamaños a partir de las especificaciones dadas. Luego identifica conjuntamente patrones y características de diferentes regiones para modelar situaciones de contexto espacial.

En esta actividad forma tu grupo de trabajo con cuatro compañeros.

Expectativas de aprendizaje

Utilizar el material manipulativo y las operaciones de polinomios para modelar y representar matemáticamente una situación en contexto que involucra el área de regiones rectangulares.

Actividades.

1. Recorta en un octavo de cartulina los siguientes figuras rectangulares:

Dos cuadrados de 8cm de lado

Dos cuadrados de 4cm de lado

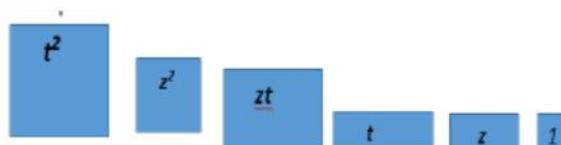
5 cuadrados de 1cm de lado

Dos rectángulos cuyo largo y ancho midan 6cm y 8cm respectivamente

Tres rectángulos cuyo largo y ancho midan 1cm y 8 cm respectivamente

Tres rectángulos cuyo largo y ancho midan 1cm y 6cm respectivamente

Luego rotulamos cada figura con la expresión algebraica que representa su área; como se muestra:



2. La constructora Bolívar presenta el modelo de los apartamentos que va a construir en un sector del norte de la ciudad.

- a. El grupo debe representar el plano del apartamento con la herramienta de trabajo en el recuadro que está al frente del modelo.



- b. De acuerdo al modelo diseñado por la constructora y el plano realizado con la herramienta de trabajo, identifica cada espacio del apartamento con la expresión algebraica correspondiente, llenando el siguiente cuadro:

Zona del apartamento	Área que lo representa (expresión algebraica)
Habitación principal	
Habitación secundaria	
Sala-comedor	
Cocina	
Baño	
Balcón	

Según la tabla responde las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué polinomio representa área del plano realizado con la herramienta de trabajo?

2. ¿Qué indica este polinomio para la constructora?

3. ¿Cuál es el largo y ancho de la región que se dispone para el apartamento? (teniendo en cuenta la herramienta de trabajo)

4. Escribir el área como producto del largo y el ancho del terreno rectangular a utilizar para la construcción del apartamento

TAREA 2

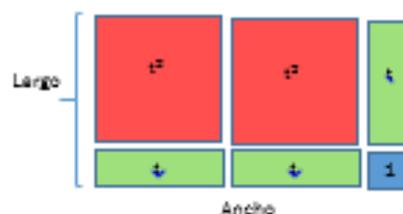
Descripción de la tarea:

Trabaja individualmente con tu herramienta de trabajo (si lo deseas conforma un grupo con tus compañeros de máximo cuatro integrantes) y construye regiones rectangulares: Después de explica y pregunta a cada grupo los conceptos matemáticos que se movilizan en la actividad y asesora a estudiantes que presentan dificultades en la interpretación y manipulación de la herramienta de trabajo.

Expectativas de aprendizaje

Identificar diferentes sistemas de representación que representen el área de una región rectangular diseñada a partir del material manipulativo, las operaciones de polinomios y las estrategias para ligarlas.

1. Con tu herramienta de trabajo arma la región rectangular que se presenta a continuación:



Contesta:

- a. ¿Cuál es la longitud del largo del rectángulo formado? _____
- b. ¿Cuál es la longitud del ancho del rectángulo formado? _____
- c. Explica cómo encuentras algebraicamente la medida de la longitud del ancho y del largo del rectángulo

d. ¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo? _____

e. Escribe el área del rectángulo como el producto del largo y el ancho

- f. Buscar otra forma de organizar las figuras de tal manera que formen otra región rectangular y dibújala en este espacio



2. Realiza representaciones con la herramienta de trabajo y juego gráficamente en su cuaderno de apuntes las regiones rectangulares dadas las siguientes condiciones:
- Utilizar dos figuras de igual forma cuadrada, dos rectangulares de formas distintas
 - Utilizar dos figuras cuadradas de distinta forma y dos rectangulares de igual forma.

Tarea 3

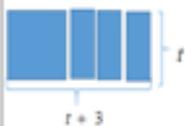
Descripción de la tarea:

Sigue trabajando como te sientas más cómodo, puedes pedir colaboración a tu compañero monitor en las dificultades que se presenten relacionadas con la manipulación de la herramienta de trabajo y los conceptos matemáticos que se movilizan. En esta actividad podrás poner en juego la heurística, el ensayo- error y tus habilidades para construir, modelar y escribir las diferentes representaciones del área de una región rectangular.

Expectativas de aprendizaje

Utilizar la construcción y el área de figuras planas con el material manipulativo para representar un polinomio como producto de dos factores lineales.

1. Debes Construir un rectángulo con la herramienta de trabajo de tal manera que represente cada uno de los siguientes polinomios y luego completa la tabla

Polinomio	Representación gráfica del rectángulo que forma	Longitud del largo	Longitud del ancho	Área del rectángulo An la
$t^2 + 3t$		t	$t + 3$	$t(t + 3)$
$t^2 + 2t + 1$				
$t^2 + 2zt + z^2$				
$z^2 + 4z + 3$				

2. De acuerdo a la tabla responde las siguientes preguntas

a. ¿Qué relación existe entre el polinomio que representa el área del rectángulo y el producto del largo y el ancho de cada rectángulo construido? Explica



b. ¿Las dos expresiones representan la misma región? ¿En qué se diferencian? Explica



Actividad en casa

c. Investigar el concepto de factorización de un polinomio



d. Establece relaciones del concepto con lo realizado en la tabla.



Tarea 4

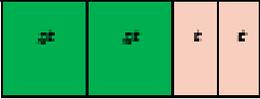
Descripción de la tarea:

Se inicia con una lluvia de ideas donde participamos todos los integrantes del curso para construir el concepto de factorización de polinomios desde las prácticas realizadas con la herramienta de trabajo y lo investigado. Luego se hacen algunos ejemplos con la colaboración de todos los integrantes y finalmente de manera individual y con tu herramienta de trabajo completa la tabla y responde a las preguntas se hacen.

Expectativas de aprendizaje

Representar y escribir la factorización de un polinomio a partir de la modelación de regiones rectangulares.

1. Realiza la representación geométrica del polinomio con la herramienta de trabajo y escribir la factorización y completa la tabla

Polinomio	Representación con la herramienta de trabajo	Factorización
$t^2 + 4t + 4$		
$2t^2 + 3t + 1$		
		
$z^2 + 3tz + 2t^2$		
$z^2 + tz + t^2 + t$		
$z^2 + tz + t + z$		

2. Contesta las siguientes preguntas

- a. ¿La representación con la herramienta de trabajo que realizaste a cada polinomio es la única? Explica

- b. ¿Cómo comprobar que es correcta la factorización realizada?

Actividad Final

1. Representa gráficamente el polinomio $z^2 + 3tz + 2t^2$ con la ayuda de tu herramienta didáctica (si consideras necesario) y completa:

- a. Ancho de la región rectangular: _____
 b. Largo de la región rectangular: _____
 c. Factorización del polinomio: _____

2. Dada la región rectangular

Completa:

Polinomio que representa la región rectangular: _____

Representación polinómica del perímetro: _____

Expresión algebraica el largo de la región rectangular: _____

Expresión algebraica el ancho de la región rectangular: _____

Escribe la factorización del polinomio: _____



¿Qué representa la factorización del polinomio para la región rectangular?

3. Representa una región rectangular que indique la factorización $(x + m)(x + 2)$

4. Escribe con tus propias palabras lo que entiendes por factorizar un polinomio de grado dos

Anexo C. Consentimiento informado

 ALCALDIA DE SANTIAGO DE CHILE	I.E.T.C. LA 8 AMÉRICA 8	GRADO OCTAVO	
	DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS	NOVIEMBRE 2016	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO		

Septiembre 15 de 2016

Señores padres de familia y/o acudientes de los estudiantes de grado 8-3

Yo Patricia Margot Pizzo docente del grado 8-3 del área de matemáticas y en calidad estudiante de Maestría en Educación de la Universidad ICESI y en el marco del desarrollo del Trabajo de Grado, cuyo objetivo principal: **"Diseñar una secuencia didáctica que involucre material manipulativo y sistemas de representación de regiones rectangulares para la construcción del concepto de factorización de polinomios de grado dos"**; solicito su consentimiento para realizar a los estudiantes antes mencionados aplicar la secuencia y realizar el análisis de su desarrollo.

Es importante, antes de confirmar su participación informarle que:

Este es un proceso que no le reporta ningún riesgo directo o indirecto a los estudiantes.

Se espera que las actividades en las que participe, no le generen ningún tipo de molestia. Sin embargo, el niño/la niña tiene el derecho a manifestar sus inquietudes o abstenerse de responder en el momento en que lo considere adecuado

Las respuestas y todos los registros de participación se mantendrán anónimos durante el procesamiento, análisis y presentación de resultados. Solamente serán usados dentro de este proyecto.

Ni usted ni los estudiantes recibirán ningún tipo de incentivo económico o de otro tipo por participar en este estudio.

El estudiante deberá consentir verbalmente su participación y podrá negarse en cualquier momento del estudio, sin que ello implique perjuicio alguno.

Usted puede solicitar ampliación de información sobre el estudio en el momento en que lo desee.

Si comprendió los alcances de los términos que ha leído y está de acuerdo por favor firme el consentimiento

Yo _____ padre o acudiente del estudiante
 _____ del grado 8-3 formo el consentimiento para que mi hijo o acudido
 participe en dicha actividad

Firma: _____

Anexo D. Rejilla de observación

Desempeños	Indicadores de Evaluación	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Aspectos a evaluar		Observaciones	Observaciones	Observaciones	Observaciones
Disposición	ACTITUD Y MOTIVACION: Referente al interés y perseverancia en la consecución de las actividades y aprendizaje individual TRABAJO GRUPAL O COLABORATIVO: relacionado con la participación activa y reflexiva en el desarrollo de las tareas como miembro de un grupo o del curso MANEJO DEL TIEMPO: Aprovechamiento del tiempo para la ejecución de las actividades				
Apropiación del pensamiento variacional	Apropiación del lenguaje algebraico en construcción de modelos y sistemas de representación del área de regiones rectangulares y construcción del concepto de factorización				
Material manipulativo	uso del material para la realización de las actividades y evaluación de estrategias que propicien su manejo adecuado				
Comportamiento	Solidaridad, respeto, colaboración y manejo de normas que permitan un buen ambiente escolar y propicien el logro de los objetivos				