

**IMPLEMENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS EN EL
APRENDIZAJE DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON
LA UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA**

Diego Fernando Caicedo Ramírez

Santiago de Cali
Ciencias de la Educación
Maestría en Educación
Universidad Icesi
2019

**IMPLEMENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS EN EL
ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON LA
UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA**

Diego Fernando Caicedo Ramírez

Trabajo de Grado presentado como requisito para obtener el grado de Magister en
Educación

Director
Alexander Bonilla Castro
PhD. Doctor en Educación

Santiago de Cali
Ciencias de la Educación
Maestría en Educación
Universidad Icesi
2019

DEDICATORIA

A Dios por la bendición que me otorgo del beneficio de poder iniciar y terminar mis estudios.

A mi madre por el apoyo constante en los procesos de formación personal y laboral.

A mi esposa y mis hijos que son la motivación para no desfallecer en los diferentes momentos de la vida.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos a:

Los docentes del programa Maestría en educación que con su experiencia y sabiduría aportaron en el fortalecimiento de mi formación docente.

De igual manera al Doctor Alexander Bonilla Castro, asesor de este trabajo por su aportes, reflexiones y dedicación durante el proceso de construcción de la tesis siempre apuntando al mejoramiento continuo y superación de las dificultades presentadas.

Así mismo, a los estudiantes del grado 10 – 4 de la institución educativa técnica comercial LITECOM, que aceptaron el reto de un trabajo diferente donde sus aportes contribuyeron al desarrollo de esta investigación. Además, a las directivas del establecimiento educativo por su colaboración y comprensión durante la intervención en el aula de clase.

A todas aquellas personas que me brindaron una voz de aliento y su apoyo desinteresado durante estos dos años de formación académica.

Gracias.

Contenido

Introducción	10
Capítulo 1	12
1. Justificación del Problema	12
1.1 Descripción del Problema.....	12
1.2 Formulación.....	15
1.3 Justificación	16
1.4 Objetivo General.....	19
1.4.1 Objetivos Específicos.....	19
1.5 Marco de Referencia	20
1.5.1 Antecedentes.....	20
1.5.2 Estado del Arte.	21
Capítulo 2	24
2. Marco Teórico.....	24
2.1 Tareas Matemáticas	24
2.1.2 Ambiente Gráfico Dinámico (GeoGebra)	28
2.1.3 Función.....	30
2.1.4 Función Cuadrática.....	32
2.1.5 Parámetros de una Función Cuadrática.....	34
2.1.6 Pensamiento Matemático y Variacional	36
Capítulo 3	38

3.1 Metodología.....	38
3.1.1 Teoría Fundamentada	39
3.1.2 Estudio de caso	40
3.1.2 Contexto	42
3.1.3 Implementación de Diseño	44
Capítulo 4	49
4.1 Análisis de Resultados.....	49
4.1.1 Variación del parámetro “a” en la función $y = ax^2$	57
4.1.2 Análisis de la Tarea 2: Cambio y Observo	62
4.1.3 Análisis Tarea 3: Cambio y Observo.....	66
4.1.4 Análisis Tarea 4: Expresiones Equivalentes	71
5 Conclusiones	76
Bibliografía.....	81
ANEXOS	84
ANEXO A Horario de Actividades	84
ANEXO B Trabajo Diagnóstico	85
ANEXO C Diseño de Tarea	87
ANEXO D Taller de Función Cuadrática	91
ANEXO E Instrumento de Validación.....	93
ANEXO F Encuesta de Satisfacción	102

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Distribución de la Clase	43
Figura 4 Cambios del parámetro a . Grupo de estudiantes 03.	57
Figura 5: Ejemplo de descripción de observación. Tarea 1	58
Figura 6: Descripción grupo 03. Tarea 1	59
Figura 7: Descripción grupo 6. Tarea 1	60
Figura 8: Elaboración propia. Representación de familia de parábolas. Cuando $a \geq 1$	61
Figura 9: Descripción grupo 8. Tarea 2	62
Figura 10: Descripción grupo 1. Tarea 2	64
Figura 11: Representación de traslación Grupo 5. Tarea 2	65
Figura 12 Producto de la forma $(x+a)(x+b)$	65
Figura 13 Suma de áreas parciales.	65
Figura 14: Traslación de funciones en GeoGebra. Grupo 1.	66
Figura 15: solución punto 1 de la tarea 3. Grupo 4	67
Figura 16: solución punto 1, tarea 3. Segunda propuesta. Grupo 7	67
Figura 17: traslación vertical. Grupo 8	68
Figura 18: Elaboración propia. Traslación vertical. Geogebra	69
Figura 19: Posibles soluciones gráficas de una ecuación cuadrática. Grupo 6	70
Figura 20: Posibles soluciones de una ecuación cuadrática. Grupo 2	70
Figura 21: tratamiento de una expresión algebraica. Grupo 1	72
Figura 22: descripción punto 1, tarea 4. Grupo 3	73

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1 Categoría de Análisis – Calidad de Adaptación	51
Tabla 2. Categoría de Análisis – Diseño Propuesta Didáctica	53
Tabla 3. Categoría de Análisis – Calidad de Implementación	54
Tabla 4 Categoría de Análisis: Motivación	56

Resumen

Este trabajo presenta la descripción de una intervención pedagógica enfocada en la enseñanza de los parámetros de la función cuadrática, sustentada en la propuesta de una situación de tareas de complejidad creciente, conceptualizada desde la teoría de la actividad formulada por Leontiev, orientado a un contexto determinado, donde el maestro selecciona y organiza las tareas con el propósito de ponerlos al servicio de la comunidad, adaptado al ambiente de Geogebra. Esta propuesta surge de la reflexión pedagógica, con el fin de, proponer un ambiente de trabajo, donde los estudiantes puedan participar activamente dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, y desarrollar en los estudiantes las competencias matemáticas.

Palabras Claves: Parámetros, Tareas Matemáticas, función cuadrática, Geogebra.

Abstract

This paper presents the description of a pedagogical intervention focused on the teaching of the parameters of the quadratic function, based on the proposal of a situation of tasks of increasing complexity, conceptualized from the theory of activity formulated by Leontiev, oriented to a specific context , where the teacher selects and organizes the tasks with the purpose of putting them at the service of the community, adapted to the Geogebra environment. This proposal arises from pedagogical reflection, in order to propose a work environment, where students can actively participate in the teaching and learning process, and develop mathematical competences in students.

Key words: Parameters, Mathematical Tasks, quadratic function, Geogebra.

Introducción

Contribuir al mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje es uno de los retos de la educación matemática en la actualidad. Es decir, considerando que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es de carácter complejo por los diversos factores internos y externos que la acompañan, se hace necesario la adecuación, implementación de un propuesta pedagógica y restructuración de la práctica de aula con el fin de mejorar estos procesos, aportando al desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de la Institución Técnica Comercial LITECOM (I.E.L). La propuesta pedagógica presentada en este documento obedece a una reflexión sobre la enseñanza de la matemática en un contexto tradicional - convencional donde el papel del estudiante es el de un sujeto pasivo dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, dentro del contexto de la enseñanza de la matemática convencional poco se utiliza la visualización y la contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos, así como, la dificultad que se presentan para vincular aspectos gráficos visuales y analíticos, algoritmos relacionados con ellos (Macías, 2007). Es decir, la didáctica utilizada por parte del docente resulta insuficiente en el objetivo de desarrollar competencias matemáticas en los estudiantes. Por lo tanto, el diseño de una situación de tareas con niveles de complejidad creciente se convierte en una apuesta pedagógica para el docente que debe garantizar coherencia y pertinencia en la planeación y organización de las tareas articuladas con herramientas tecnológicas.

En ese mismo sentido, se considera pensar las clases como espacios donde exista una comunicación bidireccional entre docente y estudiante, donde la única voz autorizada, aceptada y absoluta no sea la del maestro. Es decir, espacios de comunicación generados por ambientes de aprendizaje propuestos por el docente y desarrollado por los estudiantes desde la perspectiva de las tareas de niveles de

complejidad creciente y complementarlo con el uso adecuado de la tecnología que, para este caso referenciamos el ambiente gráfico dinámico (GeoGebra). Así mismo, el software de GeoGebra como herramienta dinámica y gratuita se convierte en una oportunidad tanto para el docente, como para el estudiante que, mediante el análisis y la exploración construyen o reconstruyen saberes. Dicho lo anterior, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la educación básica representan una importante herramienta en el desarrollo de las competencias y las habilidades fundamentales en matemáticas y otras áreas (Fedesarrollo, 2016).

Para presentar este estudio se hace la descripción de forma general de los capítulos que hacen parte de este trabajo.

Capitulo uno, se plantea, describe y contextualiza la propuesta, se expone la pregunta problematizadora, se establece el objetivo general y los específicos, se describe el lugar donde se realiza la propuesta pedagógica y de igual manera se mencionan los trabajos que tienen la misma línea de investigación.

Capitulo Dos, este concierne al marco teórico donde se exponen los referentes claves en el desarrollo de la propuesta de trabajo.

Capitulo Tres, hace referencia a la metodología utilizada, las técnicas y los instrumentos que se aplicaron en recoger la información. Además, se describe cómo se desarrolla la propuesta pedagógica en el aula.

En el capítulo cuatro se analizan los resultados teniendo en cuenta los niveles de complejidad creciente (Reproducción, conexión y reflexión) en una situación de tareas articulada con GeoGebra.

La conclusiones se muestra en el capítulo cinco donde se relacionan los resultados con los objetivos propuestos al iniciar la intervención pedagógica.

Capítulo 1

1. Justificación del Problema

1.1 Descripción del Problema

La enseñanza de la matemática es acotada desde un enfoque de escuela tradicional. En este sentido, la escuela significa método y orden, según Durkheim (1999) en su obra Educación y Sociología la enseñanza es de tipo lineal y acumulativa que va del profesor al alumno, permitiendo que el alumno acceda al conocimiento. De otra parte, Palacios (1984) sitúa al maestro como el eje central y guía del proceso de enseñanza bajo la concepción del modelo a imitar por parte de los alumnos mencionado por Comenio.

Dado lo anterior, según Porlán (2002) la enseñanza tradicional está caracterizada por los siguientes aspectos: el Magistrocentrismo, el enciclopedismo, verbalismo y pasividad. En relación con lo anterior se toma como referencia el área de matemáticas y el objeto matemático parámetros de la función cuadrática, haciendo énfasis en la metodología de enseñarla en los últimos años. Por lo tanto, se mencionan algunas situaciones que caracterizan este proceso de enseñanza y aprendizaje:

En el Magistrocentrismo, el maestro es el centro de la información y es el organizador del contenido que los estudiantes deben aprender (Porlán, 2002). En este sentido, la enseñanza de los parámetros de la función cuadrática en la educación media más concretamente en los grados 9º y 10º, se ha realizado en la mayoría de los casos desde una práctica de aula de forma conductista y tradicionalista, desde este enfoque la única voz autorizada es la del maestro sin tener en cuenta la participación de los estudiantes, fijada desde un enfoque realista,

donde el maestro impone su interés sometido a los contenidos y la rigurosidad de una matemática demostrativa que no causa un interés en la población estudiantil.

Por lo tanto, el docente prepara el tema a enseñar y lo organiza de tal forma que los estudiantes realicen procesos rutinarios donde la memoria es el factor de mayor influencia en el aprendizaje. En el caso de los parámetros de la función cuadrática, se planea: una definición de función cuadrática; cómo se tabulan valores, que es la parte operacional de entrada y salida de valores teniendo como base una regla algorítmica; se representa mediante una gráfica, que se reduce a la ubicación de los pares ordenados (resultados de la tabulación) y resaltar la figura que estos determinan. En pocas ocasiones se permite analizar el comportamiento de la gráfica, esto debido a que no es del interés del docente o no se cuenta con otras herramientas diferentes al lápiz y papel para realizar diferentes tipos de observaciones, en consecuencia, solo queda la información en un solo sentido donde el estudiante es un receptor sin la oportunidad de opinar.

En ese orden, y tomando como referencia la práctica de aula tradicionalista, se deja ver que cuando se trata la función cuadrática y sus parámetros, se realiza desde una perspectiva meramente informativa y poco útil para los aprendices. Se enfatiza mucho en la representación algebraica, las tabulaciones y la representación gráfica del objeto de estudio de una forma necesaria, si es el caso de aprender un algoritmo, pero de poca trascendencia en el entorno cultural de los estudiantes. En consecuencia, se tienen alumnos que solo repiten algunos procedimientos, pero sin comprenderlos en su esencia y cómo estos pueden influenciar en muchos fenómenos cotidianos. (García B. a., 2013)

De otra parte, el docente prepara y planea de acuerdo con los programas o directrices del Ministerio de Educación Nacional (M.E.N), que es el que orienta y propone los aprendizajes que deben aprender los estudiantes. Así mismo, el docente se limita a transmitir lo que el órgano de control le está sugiriendo, con el

fin de cumplir y “garantizar” los objetivos y metas de aprendizaje que deben tener los aprendices en los diferentes niveles de escolaridad.

A su vez, el verbalismo y la pasividad, según Porlán (2002) los docentes están influenciados en mayor o menor medida por el modelo de enseñanza tradicional, para nuestro ejemplo, la forma de enseñar el objeto de aprendizaje función cuadrática se resume; en primera instancia la transmisión verbal como forma habitual de enseñar, de una o de otra forma los docentes se ven influenciados por el entorno donde laboran, donde la escuela tradicional es predominante y siempre se termina realizando lo mismo y algunas veces enseñando en la forma en que se aprendió. Posteriormente, el modelo tradicional de enseñar que cumplió con algunas expectativas en los siglos XVI – XIX, en el tiempo presente se ve reducida a un proceso instruccional y conductista lo cual no responde a las necesidades actuales, donde la forma de aprender de la mayoría de los estudiantes demanda más participación en el proceso de enseñanza en las escuelas públicas del país.

De acuerdo con lo anterior, es necesario considerar una intervención en el trabajo de aula con el fin de reflexionar sobre la práctica pedagógica que deben ser más centradas en los estudiantes y donde el docente se convierte en un mediador entre el sujeto y el objeto de estudio. En consecuencia, se propone una práctica de aula que rompa con el esquema convencional y que se acerque más a las demandas (participación, trabajo en equipo y experimentación) que están presentes en la enseñanza actual, donde, los aprendices sean partícipes de su proceso de aprendizaje. En la medida que el estudiante se involucre en los procesos, es allí donde encontrará un verdadero sentido de lo que está aprendiendo y el para qué lo aprende, al mismo tiempo, los estudiantes desarrollarán la creatividad al generar respuestas, proponer soluciones y preguntas no esperadas que se convierten en un indicador de innovación por parte de los estudiantes en la búsqueda de resolver situaciones utilizando las herramientas que estén a su disposición en el contexto.

De igual manera, y según Fedesarrollo (2016) el trabajo en equipo es una de las habilidades de mayor énfasis en el tiempo actual ya que está demostrado de que el ser humano no aprende solo, el proceso de aprendizaje se da por la interacción con sus semejantes y así poder evaluar situaciones por medios tradicionales o tecnológicos donde la experimentación se convierte en un aliado en la búsqueda de patrones o respuestas a interrogantes que en el modelo tradicional se responderían con mayor dificultad.

Por lo tanto, implementar una situación de tareas de complejidad creciente que utilice una herramienta tecnológica permitiría representar y analizar de una manera más fidedigna los parámetros de la función cuadrática. En la actualidad, la evolución de la tecnología no ha sido ajena a la educación. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (M.E.N) y su programa Computadores para Educar, apunta a que los docentes incorporen la tecnología en los procesos de enseñanza, con el objetivo de desarrollar las competencias y habilidades en las estudiantes, necesarias para las exigencias actuales (Ministerio de Educación Nacional, 2016). De otra parte, en la revisión de tesis, documentos, artículos que tienen la misma directriz de la investigación, consideran que un ambiente gráfico dinámico (GeoGebra) es un recurso que se presta para la dinamización del aprendizaje en los estudiantes, además, es un software gratuito y de fácil adquisición para los sujetos, sin mencionar que su entorno es de fácil comprensión.

1.2 Formulación

Con relación a la situación planteada, se deriva el siguiente interrogante: ¿Cómo la adaptación de una propuesta didáctica articulada con GeoGebra aporta al aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática en los estudiantes de grado 10^a?

1.3 Justificación

El desarrollo de esta propuesta está enfocado, a que los estudiantes asuman el papel principal de su proceso de aprendizaje, con el propósito, de fomentar la innovación y la creatividad apoyadas en la utilización de un software, donde los aprendices pueden verificar los comportamientos de las funciones cuadráticas y analizar sus posibles relaciones con situaciones de otras disciplinas. Según los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares de básicos de Competencias en Matemáticas (2006) el pensamiento matemático se divide en cinco componentes: el numérico, aleatorio, métrico y medidas, geométrico y el variacional. Precisamente este último, el variacional, se fundamenta en la percepción, la variación, la descripción de las diferentes representaciones o sistemas simbólicos, así mismo, el significado y sentido de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problema cuyos espacios sean acordes a los fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

De otra parte, los cambios realizados por parte de Icfes en la prueba Saber 11 a partir del año 2017, orienta los procesos de enseñanza a las competencias de la matemática, enfocados en la interpretación, representación, formulación, ejecución y la argumentación. Para el caso de la competencia interpretar, según la orientación de la prueba es...

la habilidad para comprender y transformar la información presentada en distintos formatos como tablas, gráficas, conjunto de datos, diagramas, entre otras, así como la capacidad de utilizar estos tipos de representación para extraer de ellos información relevante que permita, entre otras cosas, establecer relaciones matemáticas e identificar tendencias y patrones. Con el desarrollo de esta competencia, se espera, que el estudiante manipule coherentemente registros como el simbólico, el natural, el gráfico y todos aquellos que se dan en situaciones que involucran las matemáticas (MEN, 2008)

Por lo tanto, en campos como la física, sociales, medicina, ciencias naturales, estadística, matemáticas, es necesario realizar tabulaciones donde se relacionan dos variables, la interpretación de las gráficas que en algunos casos son un aporte

importante en la toma de decisiones, por ejemplo, en el caso de analizar un ecocardiograma, el médico debe interpretar la gráfica, la cual representa el ritmo cardíaco en función del tiempo, y dependiendo del análisis realizado se toman las acciones de hecho pertinentes en el caso. Lo anterior, señala lo necesario que resulta el estudio de las funciones polinómicas, y más, aun, el poder comprender las variaciones que se pueden presentar en este tipo de relaciones. Además, en los Estándares Básicos de Competencia y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), se tienen en cuenta los siguientes indicadores:

- Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
- Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpretar y utilizar derivadas.
- Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas, racionales y de sus derivadas.
- Resolver problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usar representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.

En ese sentido, se requiere de una reestructuración en la planeación y estructuración de las clases, con el fin, de que los estudiantes desarrollen las competencias básicas en el área de matemáticas y con mayor énfasis en el análisis, de los parámetros de la función cuadrática. Además, del análisis y la reflexión de la práctica docente, los maestros en colaboración de sus colegas deben organizar propuestas alternativas que contribuyan al mejoramiento de las prácticas de aula. En ese orden de ideas según Medina y Salvador (2009) la organización de la clase, la interacción social – grupo clase, la calidad de las actividades que se realizan, la pertinencia de los recursos que necesitan, hace parte de la dinámica de los

procesos de aula y su influencia en el aprendizaje enfocados en el rendimiento académico de los estudiantes, que son factor de preocupación de los docentes.

Por lo tanto, la propuesta de una situación de tareas con niveles de complejidad creciente articulado con un ambiente gráfico dinámico (GeoGebra) se convierte en una alternativa en el proceso de aula tradicional, con el objetivo de brindar una calidad en el desarrollo de las actividades matemáticas, donde los estudiantes son parte activa del proceso de aprendizaje proponiendo innovación y creatividad en la solución de situaciones dentro de un contexto determinado.

De otra parte, las TIC han sido introducidos en las escuelas para transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje y mejorar las estrategias con miras al logro educativo (Alderete & Formychehlla, 2016). La tecnología ha venido incursionando en los procesos educativos, brindando herramientas que pueden ser complementarias en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, cabe decir, que la efectividad de estas herramientas depende del uso adecuado por parte del docente que es el directo responsable de la integración tecnológica al currículo. Además, las TIC les permite a los estudiantes con pocas destrezas simbólicas y numéricas desarrollar estrategias para resolver situaciones problemáticas, utilizando diversos recursos que les proporcione un mejor entendimiento.

En ese sentido, usar las TIC en las clases de matemáticas es más que usar un recurso, implica reflexionar sobre las prácticas de enseñanza. De igual manera, los ambientes gráficos dinámicos y más concreto GeoGebra, se convierte en una herramienta complementaria eficaz en la enseñanza de la matemática porque, permite la interacción del medio con el sujeto, facilitando la manipulación de las funciones y poder describir los comportamientos, y así, establecer generalidades desde la observación. Es decir, en la manera como se trabaja en la enseñanza de los parámetros de la función cuadrática, están limitadas a los métodos tradicionales (lápiz y papel) que son necesarios, pero, son insuficientes a la hora de analizar las

características y variaciones que se presentan en esta clase de relaciones, donde solo algunos estudiantes pueden hacer registros.

De igual manera, la implementación de esta propuesta de trabajo busca beneficiar inicialmente a los estudiantes de grado 10 - 4 de (IEL), y también impactar en la práctica de aula al docente, buscando la integración de compañeros de la disciplina para reflexionar y mejorar este proyecto.

1.4 Objetivo General

Establecer el impacto de la adaptación de una situación de tareas de complejidad creciente articulada con GeoGebra en el contexto del aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática.

1.4.1 Objetivos Específicos

- Adaptar una situación de tareas donde se haga evidente los niveles de complejidad creciente (reproducción, conexión, reflexión).
- Implementar una situación de tareas de complejidad creciente articulado con GeoGebra en el aprendizaje de los parámetros de una función cuadrática.
- Determinar el impacto de la implementación de una situación de tareas de complejidad creciente articulado con GeoGebra, a través de la observación, entrevistas y resultados.

1.5 Marco de Referencia

1.5.1 Antecedentes.

La Institución Educativa Técnico Comercial LITECOM (I.E.L), está ubicada en la zona urbana del municipio de Jamundí, frente al parque principal. Actualmente, la I.E.L cuenta en sus instalaciones con 26 aulas. Tiene como propósito formar seres humanos en un pensamiento crítico, complementado con habilidades y valores que aporten a la transformación de la sociedad siendo agentes de cambio. La propuesta de trabajo se orienta a los estudiantes del grado 10 - 4, este grupo, presenta disposición y responsabilidad que motiva al docente a pensar en un trabajo diferente promoviendo la reflexión pedagógica y la participación activa de los estudiantes dentro de su proceso de aprendizaje.

De otra parte, el docente del área durante la enseñanza no tiene en cuenta las posibilidades que pueden ofrecer algunos recursos que son mediados por las tecnologías (cabri, GeoGebra, Calculadoras, entre otras) computadores y Tablets, los cuales pueden ser un complemento ideal dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje en las actividades matemáticas de los estudiantes. Cabe mencionar que, la resistencia de los maestros en un cambio en la enseñanza de las matemáticas, no permite la inclusión inmediata de nuevas alternativas en las prácticas de aula, limitando al estudiante a memorizar y repetir representaciones con falta de significado para los aprendices, provocando su desinterés. Vale la pena, preguntar ¿Cuál es el impacto de implementar la tecnología en clase de matemática?

Así, por ejemplo, en los últimos cinco años como referencia cronológica, la enseñanza de la función cuadrática, se ha realizado desde la forma tradicional, es decir, el maestro es el centro de la información y la trasmite de una manera literal

preocupado por llenar y cumplir con los contenidos del grado; los estudiantes actúan de forma pasiva en el proceso de aprendizaje, los aportes de los aprendices son de poca demanda cognitiva, los procesos algorítmicos son de carácter rutinarios; la propuesta de trabajo por parte del docente en la mayoría de las veces es de carácter utilitario, la clase se enfoca en trabajar el contenido de forma superficial, realizando tabulaciones, representaciones gráficas en el plano cartesiano sin tener en cuenta las variaciones o características de la función cuadrática. Además, la incorporación de la tecnología en el desarrollo de las clases como un complemento al proceso de enseñanza y aprendizaje es casi nulo.

1.5.2 Estado del Arte.

En relación con las investigaciones desarrolladas en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la función lineal y cuadrática, articulada con GeoGebra, se consideran los siguientes trabajos que permiten distinguir las ventajas y desventajas del uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En ese sentido, según Insuasty Ossa (2014), en su trabajo “Cambios producidos en el aprendizaje de las familias de las funciones cuadráticas en estudiantes de Grado Noveno a través de situaciones didácticas utilizando GeoGebra”, permite la orientación de este trabajo a hacer énfasis en comprender el concepto de función. Es decir, la enseñanza de este concepto en la mayoría de los casos, se limita solo a la tabulación y a graficar sin la realización de una serie de observaciones o análisis que permitan la movilización de saberes por parte de los estudiantes.

Con relación a la tecnología, Insuasty Osa (2014) resalta las ventajas de utilizar un ambiente gráfico dinámico denominado para este caso como GeoGebra, el cual nos permite corroborar las expectativas en el momento de proponer este software

como herramienta tecnológica en la propuesta de trabajo. Algunas de esas expectativas son:

- El uso de un ambiente gráfico favorece la visualización y la manipulación de la función cuadrática teniendo en cuenta sus parámetros.
- Los estudiantes reescriben el concepto de función con base en las observaciones y la experiencia de desarrollar la situación didáctica propuesta.
- Otro aspecto importante de esta tesis, es la inclusión de la teoría de situaciones didácticas, las cuales favorecen al rol del estudiante en su proceso de aprendizaje y el del docente como el mediador entre el sujeto y el objeto de estudio.

De otra parte, una consideración que no es muy tenida en cuenta por los docentes y en particular los de matemáticas; Según Figueroa (2013) la falta de motivación de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos y específicamente en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En muchos casos los docentes se preocupan por los contenidos, la planificación de una buena clase sin medir la intencionalidad y si es interesante para los aprendices (Porlán, 2002). En ese orden de ideas, el diseño de situaciones didácticas y la implementación de GeoGebra, son una buena alternativa para contribuir al mejoramiento de las competencias en el área de matemáticas y el uso de GeoGebra contribuye a la creación y solución de problemas relacionados con los sistemas lineales, apoyando la visualización matemática para la interpretación de gráficos y análisis de los mismos.

En otras palabras, la implementación de recursos digitales, resultan innovadores en la organización y planificación de una clase de matemáticas. Además, sería un factor de motivación extra para los estudiantes permitiendo adquisición de nuevas habilidades necesarias en el desarrollo de competencias en la actualidad.

Por su parte, Carranza (2011), en su trabajo “Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de Geometría Dinámica (AGD) GeoGebra, en la enseñanza de los cursos de Matemáticas Básicas de primer Semestre de la Universidad Nacional Sede Palmira”. Plantea una serie de aspectos de las habilidades de los estudiantes que ingresan al curso de matemáticas básicas, por medio de una prueba para determinar qué grupos necesitan nivelación o no debido a los resultados tan alarmantes. Este trabajo pone en evidencia las ventajas y desventajas del uso de un ambiente gráfico, situación que no ha ocurrido en los dos autores anteriores, para este caso, este trabajo reafirma que la elección de GeoGebra es válida para la propuesta didáctica de trabajo porque, permite la interacción de los estudiantes con el medio de una manera sencilla y clara, además, se refuerza la idea de que la tecnología sin una intencionalidad no es recomendable. Según la aplicación de GeoGebra se concluye que:

- Los grupos que fueron intervenidos con mediación tecnológica GeoGebra, obtuvieron mejores resultados que aquellos grupos que no tuvieron la intervención.
- La eficiencia de la mediación tecnológica del AGD GeoGebra, depende del tema que se vaya abordar o que la mediación aplicaría para temas específicos tales como: funciones de variable real, funciones trigonométricas, transformación de funciones, y todo lo relacionado con el plano cartesiano y la geometría elemental.
- El desempeño del docente influyó más que la mediación tecnológica GeoGebra.
- El diseño de evaluaciones en el ambiente gráfico cuidando que sea producto de un análisis y no de una mecanización.

En consecuencia, la integración de GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas, debe responder a las necesidades de plan de estudios y los objetivos de aprendizaje propuestos por los maestros.

Capítulo 2

2. Marco Teórico

En esta sección del trabajo se presenta el marco teórico, donde se identifican los conceptos claves como tareas matemáticas, ambiente gráfico, función polinómica, función cuadrática, parámetros de una función cuadrática, pensamiento matemático; para desarrollar el diseño e implementación de GeoGebra en una situación de tareas de complejidad creciente en el aprendizaje de los parámetros de las funciones cuadráticas.

2.1 Tareas Matemáticas

Con respecto a la reflexión de la tarea en el contexto de la matemática, esta es utilizada como un dispositivo en el aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática. Se debe agregar que, en la mayoría de los casos, la tarea es utilizada como la parte final de una clase expositiva, donde los estudiantes realizan procesos rutinarios sin ninguna conexión en un contexto determinado. De otra parte, los términos tarea matemática y actividad matemática están relacionados y generan confusión en la mayoría de los docentes, en ese orden de ideas, ¿Qué es una tarea matemática? ¿Qué es una actividad matemática? son cuestionamientos que surgen de la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, desde su significado el término tarea, hace referencia al hacer o asignar un trabajo en un intervalo de tiempo corto. Desde ese punto de vista, las tareas en las escuelas cumplen ese propósito. Pero ¿Cuál es la intención de una tarea? ¿Cuáles son los niveles de complejidad de las tareas? Estos son algunos cuestionamientos que pocos maestros se preguntan al asignar una tarea a los

estudiantes. Es de gran importancia revisar el concepto de tarea que presentan algunos autores con el fin de dar claridad al tema y cuáles serían sus implicaciones.

En ese sentido, según Doyle (1998) citado por Herbst (2012), la tarea es una unidad de significado que se determina por el trabajo observado en clase. Durante este proceso, se generan acciones e interacciones orientadas a unos objetivos específicos dentro de un contexto práctico, donde los estudiantes pueden aportar ideas en la solución de un problema. Cabe decir que en la búsqueda de la solución de los problemas se debe considerar las metas, los recursos y las operaciones.

Según Margolinas (s.f), citado por Rojas (2014), citado por García, Coronado y Giraldo (2015), asume la tarea matemática dentro del marco de la teoría de la actividad como una operación realizada por los estudiantes dentro de un marco para responder a unas demandas organizadas por el docente.

De otra parte, según García (2015) conceptualiza la tarea matemática como una actividad humana desde la teoría de Actividad formulada por Leontiev. En otros términos, el docente analiza, selecciona y organiza las tareas con el objetivo de estimular su actuación y al mismo tiempo proponer a los estudiantes espacios para construir su conocimiento matemático, para colocarlo al servicio de sus necesidades culturales, científicas y sociales. Así mismo, García (2013) hace referencia a los niveles de complejidad de una tarea matemática, teniendo en cuenta que, dependiendo de la calidad de la tarea matemática y la construcción de saber por parte de los aprendices, se desarrollan competencias matemáticas. En ese orden de ideas los niveles de complejidad para tener en cuenta son:

- **Reproducción:** este nivel exige al estudiante procedimientos rutinarios para resolver tareas con las cuales esté familiarizado y que le exige aplicar algoritmos, realizar operaciones sencillas, aplicar propiedades, y en general, reproducir conocimiento ya practicado por el estudiante. Así por ejemplo, en la tarea 1 (anexo C) Dibuja un cuadrado en cada caso, teniendo en cuenta la

longitud del lado; En el plano cartesiano ubicar los puntos y trazar la línea que representa la relación anterior. Son algunos de las situaciones donde el estudiante realiza procesos mecánicos sin tener una alta demanda cognitiva.

- **Conexión:** aquí el nivel de complejidad se expresa según la solución o soluciones que el estudiante construya para la tarea. En este proceso el estudiante debe usar varias formas de representación semiótica (decodificar, codificar, traducir, razonar, argumentar, describir, entre otras) y hacer tratamiento y conversión en mínimo dos sistemas diferentes. Para ilustrar mejor, se hace referencia a la tarea 3, actividad 1 (Anexo C). Si a uno de los cuadrados de lado x se le agrega 2 unidades en uno de su par de lados paralelos. ¿Cuál es la nueva figura resultante? ¿Cuál es la expresión que representa el área de esa nueva figura? ¿Cuáles son los coeficientes del término al cuadrado x^2 y el término lineal x ?

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes deben de realizar algunos procesos de forma mecánica que sirven de apoyo en la inferencia de una nueva información. Es decir, decodifica, codifica e identifica ciertos elementos que hacen parte de la función cuadrática.

- **Reflexión:** está orientado a la resolución de las tareas que el estudiante es capaz de proponer y desarrollar. Se desarrollan procesos como; razonamiento, argumentación, matematización horizontal y vertical. Según García (2013) la matematización horizontal es cuando se traslada un problema en su lenguaje natural a un lenguaje de símbolos en este caso matemático. De otra parte, la matematización vertical consiste en formalizar el desarrollo de una ecuación matemática. Así por ejemplo, Si tenemos un cuadrado de lado x y se le agrega 2 unidades a la base y 3 unidades a la altura. Represente la nueva figura. ¿Cuál es la expresión que representa el área de la figura? ¿Cuáles son los coeficientes de cada uno de los términos?

(término cuadrático, lineal y el término independiente). En este caso, el estudiante realizara un esquema o dibujo (interpreta); representa el área de la figura por medio de una expresión algebraica que resulta de un producto de expresiones algebraicas, de un producto notable, de la suma de áreas parciales para luego hallar un área total. Es decir, el estudiante tiene una serie de posibilidades para determinar la expresión solicitada.

Dado lo anterior, y en palabras de Goñi (2009) citado por García (2013) los niveles de complejidad de las tareas matemáticas están asociadas con las exigencias cognitivas del objeto matemático, las cuales aumentan en la medida que avanzan en su conocimiento. Es decir, en las tareas matemáticas el papel del docente es fundamental en la planificación, diseño y selección de las mismas, para fomentar la actividad matemática realizada por los estudiantes, con el propósito de movilizar capacidades y desarrollar la competencia matemática en los aprendices, que permitan atender las necesidades de su entorno y cultural.

Por otra parte, García (2013, P 26) considera que, “la actividad matemática de aprendizaje se adscribe al estudiante” es decir, el estudiante aborda la tarea permitiendo el desarrollo de procesos como (codificar, decodificar, comunicar, razonar, argumentar, tabular, representar, entre otros) donde la disposición del estudiante es parte fundamental para la construcción o reconstrucción de su saber. Además, la actividad matemática, hace parte de una articulación entre tareas, actividad y tendencia de acción, con el fin de desarrollar competencias en los estudiantes.

En ese orden de ideas, este trabajo asumirá el concepto de tarea como la relación que se genera entre docente y estudiante, con el fin de resaltar y adquirir un conocimiento teniendo en cuenta los niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión).

2.1.2 Ambiente Gráfico Dinámico (GeoGebra)

En la enseñanza de los parámetros de la función cuadrática, se ha utilizado el papel y lápiz como instrumentos de elaboración de los registros tabulares y gráficos. La utilización de este método conocido como tradicional resulta insuficiente en el momento de analizar, observar, comparar, explorar, argumentar, entre otras, los diferentes comportamientos de la función cuando a los parámetros se les asigna un valor dentro de un intervalo determinado.

Por lo tanto, se hace necesario, buscar recursos o herramientas que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de este complejo tema. En la actualidad, el avance de la tecnología propone una serie de retos o competencias en la sociedad. Desde el punto de vista de educación, según el Ministerio de Educación Nacional (M.E.N) 2006, se refiere a situaciones en la que se utiliza las nuevas tecnologías con el fin de promover el aprendizaje. La implementación de las nuevas tecnologías conduce a la renovación de la propuesta curricular y la transformación de los procesos escolares centrados en los estudiantes, donde el rol del docente es orientador y mediador con las situaciones propuestas. En lo posible, las TIC deben adaptarse a las necesidades de los estudiantes para complementar su proceso escolar. Además, las habilidades comunicativas son necesarias en la sociedad de la información, globalización y la comunicación, exigiendo a la escuela fomentar estas habilidades.

De otra parte, la tecnología ofrece miradas que resultaban complejas y dispendiosas en una clase de matemáticas que, no disponía de imágenes o que, requería de grandes esfuerzos para realizarla (Novembre, Nicodemo, & Coll, 2015, pág. 24) En consecuencia, la implementación de ambientes gráficos dinámicos como GeoGebra la cual se constituye como herramienta didáctica que, contribuye a la creación de ambientes propicios de aprendizaje, donde, se descontextualiza la simple transmisión de la información, generando en los estudiantes la posibilidad de simular, explorar y observar algunas características de gráficos con el fin de

reescribir su saber. El ambiente gráfico, integra la aritmética con la geometría y el álgebra, potencializando así los diferentes tipos de pensamiento (aleatorio, variacional, numérico, geométrico y métrico).

¿Por qué utilizar GeoGebra? La idea básica de los creadores Markus Hohenwarter (2001) y desarrolladores de este software, ha sido integrar geometría, álgebra y cálculo, para la enseñanza de la matemática y posibilitando la enseñanza y aprendizaje de otras disciplinas. Además, las ventajas de este software son: licencia libre, versión para todos los sistemas operativos y las construcciones se guardan como archivos XML y se pueden exportar como imágenes, dibujos o páginas web dinámicas llamadas applets.

De otra parte, la capacidad de arrastre de las figuras construidas es una gran ventaja respecto a las construcciones con lápiz y papel (Cotic., 2014). Por el método tradicional, resulta demasiado complejo la movilización de las gráficas alrededor de un espacio determinado, con la utilización de GeoGebra este movimiento resulta mucho más fácil y permite la interacción con el estudiante para explorar y establecer nuevas relaciones entre los objetos. Las animaciones de la figuras o construcciones compuestas, permite presenciar el proceso constructivo de un objeto geométrico (Cotic., 2014), esta es una de las ventajas del ambiente gráfico dinámico, la visualización del paso a paso de los pormenores de las funciones donde los aprendices pueden observar el comportamiento detallado de las gráficas en un plano 2D. Así mismo, una de las ventajas de GeoGebra, con relación a otros ambientes gráficos, al realizar las representaciones geométricas en una ventana, en otra ventana se van mostrando las expresiones algebraicas que representan a las líneas, los segmentos, círculos, funciones y puntos de la construcción. Además, GeoGebra puede calcular la derivada de las funciones, posee su propia hoja de cálculo y también tienen muchas funciones de manera interna lo que ahorra tiempo en los procesos.

2.1.3 Función

Las funciones hacen parte de los sistemas de representación que permiten modelar, comprender y analizar los múltiples fenómenos tanto en las ciencias, las sociales y la misma matemática, donde se derivan sus diversas aplicaciones que se generan en la vida cotidiana. En otras palabras, en la mayoría de los fenómenos que ocurren en campos como: la física, la economía, biología, química, ciencias sociales, entre otras; se observa, que una cantidad depende de otra. Es decir, la estatura depende de la edad, el área de un círculo depende de su radio, el número de bacterias depende del tiempo, son algunos ejemplos donde el concepto de función es utilizado para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra.

En ese sentido, en la educación básica y media el concepto de función contribuye a la estructuración del pensamiento variacional y de los sistemas analíticos, como lo expone el M.E.N en sus referentes curriculares (los Lineamientos Curriculares, DBA y Estándares Básicos de Competencia), pues promueve herramientas didácticas que permita desarrollar en los estudiantes competencias para la observación, medición, registro de datos, realizar distintas representaciones gráficas que le permitan la identificación de las variables y el establecimiento de relaciones funcionales aplicables a los contextos reales (M.E.N, 2006).

Con respecto a lo anterior, en términos de Sastre, Rey y Boubée (2008) quienes realizan un recorrido por la historia y la evolución del concepto de función, encontraron varios obstáculos que impidieron que surgiera con anterioridad, entre ellos la inconmensurabilidad, la proporcionalidad, la disipación entre número y magnitud. Sin embargo, el desarrollo del simbolismo algebraico, la creación de la trigonometría, la astronomía y los estudios de movimiento alcanzaron un nivel importante. Para considerar, algunas definiciones de grandes matemáticos a través de la historia, entre los cuales tenemos a Leibniz, Euler y LaGrange quienes realizaron importantes aportes al desarrollo del concepto de función.

Leibniz (1646 – 1716) define la función como “cualquier cantidad que varía de un punto a otro, de una curva, tal como la longitud tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada” (Sastre V, Rey, & Boubée, 2008)

Euler (1707 – 1783) define la función “si algunas cantidades depende de otras cantidades de modo que, si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas”. (Sastre V, Rey, & Boubée, 2008)

LaGrange (1783 – 1813) “Llamamos función a toda expresión matemática de una o varias cantidades en la cual estas aparecen de cualquier manera, relacionadas o no con cualquier otra cantidad que son consideradas como constantes, mientras las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles”. (Sastre V, Rey, & Boubée, 2008)

Por lo tanto, se considera que, para poder llegar a la definición o conceptualización de función se debe tener claro los conceptos de variable, constante y parámetros. Dado lo anterior, en concepto de función es uno de los principales en el desarrollo del pensamiento variacional por ende de la matemática dentro un contexto determinado, las relaciones entre cantidades, permiten el análisis de situaciones que pueden llevar a la toma de decisiones donde se afecte una comunidad.

2.1.4 Función Cuadrática

El hablar de las funciones como concepto general, permite incursionar en el concepto de función cuadrática. Según Mesa – Villa (2008), la historia ha puesto en evidencia la matemática teniendo en cuenta las actividades de los hombres pertenecientes a una sociedad. Además, en los registros de la historia se han resaltado cuatro nociones ligadas al concepto de cuadrado como los son: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones.

En este mismo orden, las grandes culturas han realizado sus aportes a la construcción de los conceptos de objetos matemáticos; en el caso de los babilonios su aporte se fundamenta en los registros tabulares. Según Kline (1992) citado por (Mesa & Villa Ochoa, 2007) los babilonios resolvían problemas de ecuaciones, como, por ejemplo: “hallar un número tal que sumado a su inverso de un número dado”. Los babilonios utilizaban como sistema de representación el lenguaje común, y sus avances en la geometría no fueron muy significativos.

En el caso de los griegos, la geometría era parte de la fundamentación matemática, según Mesa y Villa (2007), esta cultura evidencia un razonamiento geométrico donde, la deducción permite generalizar para luego aplicar a situaciones particulares. Uno de los más importantes exponentes de esta cultura es Euclides, quien en su obra “Los elementos” aborda el término cuadrado, que a su vez se conceptualizaba como cuadrilátero equilátero, por la razón que podía dibujar repetidamente la misma recta hasta cerrar la figura, lo anterior aportaba al concepto de área.

De otra parte, Apolonio (260 A.C) construye un tratado de las secciones cónicas, con base en los estudios de Euclides, Platón, Aristóteles y otros, dándole una forma sistemática. Según Meza (2008), el cuadrado es sin lugar a dudas la expresión geométrica, para Apolonio la generalización y el acercamiento al álgebra de las cónicas. Por otra parte, en el siglo XVII lo cuadrático está asociado a lo

geométrico de una curva llamada por Apolonio como parábola, (Meza, 2008). Las cónicas y en particular la parábola se considera en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo el surgimiento de los conceptos de variación y cambio relativos complementaron el estudio de las funciones.

Así mismo, la observación de los fenómenos por parte de Galileo, Newton, que se encargan de estudiar el movimiento utilizando representaciones gráficas y donde se analizaba que a todo número natural le correspondía un instante de tiempo, pero que dejaba ver los espacios de un número a otro, lo cual podía solucionarse con la construcción del conjunto de los reales. En ese orden, la parábola toma sentido como la representación de un fenómeno en movimiento y de tipo cuadrático ya que habla de los incrementos de la parábola en forma lineal.

En palabras de Meza (2008), las situaciones cuadráticas después de ser estudiadas en el plano y relacionarlas con una expresión algebraica, donde dos variables se relacionan a un punto (x, y) se denominó después función cuadrática.

En la actualidad la función cuadrática se relaciona con la siguiente expresión algebraica: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y $c \in R$; donde $a \neq 0$.

Una función cuadrática puede escribirse como:

$f(x) = a(x - h)^2 + k$ Donde h, k corresponde a las coordenadas del vértice. La gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de parábola.

$y - k = (x - h)^2$ Otra forma de representación.

En conclusión, en la vida real se presenta en algunos fenómenos, en las ciencias, haciendo referencia a las situaciones de la cinemática, movimiento uniformemente acelerado, caída libre, lanzamiento de proyectiles; en la economía al optimizar funciones de ingreso, costo y utilidad; la geometría cuando se trabaja con llenado de recipientes, variabilidad de las funciones de una figura. Hay que mencionar además, la importancia de articular la tecnología al proceso de

enseñanza de la matemáticas y en especial al de las funciones, permitiendo así una mejor organización y variedad en la planificación de las tareas matemáticas y al mismo tiempo una mayor interacción del estudiante con el objeto de estudio.

2.1.5 Parámetros de una Función Cuadrática

En el estudio del concepto de función, en el nivel de secundaria, surge el término parámetro que, con gran facilidad se confunde con los ya conocidos términos como incógnita, variables, constantes. Por lo tanto, se realiza una breve distinción entre cada uno de los términos antes mencionados, teniendo en cuenta los autores Bloedy (2000), Ursini & Trigueros (2004) citados por Varón, Hernández & Posada (2010) en el caso de las letras usadas en las expresiones algebraicas toman un valor determinado pero desconocido, entonces la letra se asume como una incógnita, así mismo, cuando las letras representan un rango de valores asociados a una función se denominan variables y finalmente las letras asumen la connotación de parámetro cuando se requiere el estudio de una función o una ecuación constituyendo una familia de funciones (Varon, Hernandez, & Posada, 2010).

Es decir, los estudiantes no diferencian de forma correcta los conceptos, realizando interpretaciones no adecuadas de las expresiones algebraicas que representan una función y su correspondiente gráfica. La conceptualización de los parámetros, haciendo énfasis en su diferencia con las variables o incógnitas, ha originado diferentes estudios que tienen como objetivo el resaltar los diferentes significados que tienen estos términos en el estudio de las funciones. Entre ellos tenemos: Según Bloedy – Vinner (2001) citado por Basurto (2013) para quien...

“el parámetro es el argumento de la función de (segundo orden) y al variar este determina ecuaciones y funciones, por otro lado, dentro de cada función que corresponde a un valor específico del parámetro, el parámetro es una constante mientras las otras letras son incógnitas o variables”.

En ese mismo sentido y parafraseando con Drijvers (2001), citado por Basurto (2013), menciona que el parámetro es una variable extra en cualquier expresión algebraica. Es decir, el cambio de valor del parámetro no afecta solo un punto, sino que impacta a toda la gráfica, obteniendo como resultado una cantidad que cambia a través de un conjunto de valores en forma dinámica. Además, si el cambio del valor del parámetro es por valores específicos, el rol del parámetro según Drijvers es de fijador de posición, lo cual quiere decir que, se generan gráficas de forma independiente cada una con sus respectivas características y el caso del parámetro como generalizador, hace referencia a la familia de funciones que determina el parámetro, generalizando situaciones y soluciones dentro de un determinado contexto.

Por lo tanto, para el estudio de los parámetros de la función cuadrática se retoma los tres aspectos del parámetro: en primer lugar, como fijador de posición, para determinar las diferentes tipos de gráfica que genera el cambio de valor del parámetro; en segundo lugar como parámetro que se desliza, permite la visualización del comportamiento de la gráfica de la función cuadrática a través de un intervalo de valores y en tercer lugar el parámetro como generalizador, permitiendo la representación de una familia de funciones en un conjunto de gráficas que determinan situaciones comunes.

2.1.6 Pensamiento Matemático y Variacional

En la enseñanza de las matemáticas, se desarrollan dos tipos de pensamiento el lógico y pensamiento matemático. En primer lugar, el pensamiento lógico, se avoca a la argumentación, el razonamiento y la deducción formal e informal, apoyando y estructurando el pensamiento matemático; en segundo lugar el pensamiento matemático (PM), según la publicación (Gobernación de Antioquia , 2006) se consideran que:

“El Pensamiento Variacional, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación y cambio en diferentes contextos: en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas” P, 16.

En otras palabras, el pensamiento matemático tiene unos componentes que le permiten distinguir el tipo de actividad matemático que se realiza, por ejemplo, en la antigua Grecia la forma de hacer matemática con relación al número se pensaba en la aritmética (pensamiento numérico), y cuando se pensaba en el espacio, recurrían a la geometría euclidiana (pensamiento espacial y geométrico). Luego, con el paso del tiempo y el desarrollo de las matemáticas, se fueron presentando situaciones donde no solo bastaba lo numérico y lo geométrico, surgiendo así la necesidad de lo métrico, aleatorio y variacional aplicado a la física, química y otros campos disciplinares.

Por lo tanto, retomando una de los componentes del (PM), como lo es el pensamiento variacional que, teniendo en cuenta el documento de los Estándares Básicos de competencias emanados por M.E.N menciona:

“Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la educación básica primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico, y en la educación Media, del cálculo diferencial e integral” (2006).

En consecuencia, el docente debe generar espacios propicios de aprendizaje donde el estudiante observe, reconozca, identifique, los diferentes cambios y variaciones de los diferentes contextos y al mismo tiempo pueda modelar y representar en diferentes sistemas o registro simbólicos. Es decir, este pensamiento se relaciona con situaciones de la vida, las ciencias y la matemática misma donde se perciben la variación, el cambio y la modelación, en contextos determinados y en los procesos de comprensión y aplicación de las funciones, permitiendo un estudio más enfocado en situaciones cotidianas, donde el estudiante manifieste su interés y asuma la responsabilidad de su proceso de aprendizaje.

Capítulo 3

3.1 Metodología

El trabajo de investigación realizado, tiene por objetivo describir el impacto de la adaptación de una situación de tareas articulado con un ambiente gráfico en el aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática. En ese sentido, el diseño metodológico, se establece en el enfoque cualitativo orientado hacia la comprensión de las situaciones únicas y particulares, se centra en la búsqueda de significado y sentido (Rodríguez & Valldeoriola, 2011). Es decir, el objetivo es describir las cualidades de una situación, no se trata de probar o medir el grado de una cualidad que se encuentre en un acontecimiento dado, se trata de entender el fenómeno lo más exacto posible. Por lo tanto, la utilización del estudio de caso como metodología de investigación es coherente con la intencionalidad de este trabajo, donde se limita el estudio y se observa en el marco de un contexto para proporcionar información del objeto de estudio. De otra parte, en el análisis de los resultados de este investigación de tiene en cuenta la teoría fundamentada como metodología de análisis, siendo pertinente según Charmaz (2005) citado por Rodríguez y Valldeoriola (2011) “el investigado describe la comprensión de los significados y la acción de los participantes p. 61”

Durante el diseño de la propuesta pedagógica, consideremos la siguiente hipótesis: si el estudiante coloca en ejercicio sus habilidades creativas en función de modelar situaciones particulares relacionadas con los parámetros de la función cuadrática mediante GeoGebra se potencializa la comprensión del objeto matemático. Para entender esta situación, se aplica la propuesta pedagógica a los estudiantes de grado 10^o, con el fin de poder recolectar la información pertinente que contribuya a la reflexión de la práctica docente durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.1.1 Teoría Fundamentada

Esta teoría tiene su origen en el interaccionismo simbólico. Es decir, en el momento de recoger la información se analiza los datos con la intención de mejorar los procesos y recíprocamente permite realizar un nuevo análisis. Por otra parte, en términos de Strauss y Corbin (2002) la teoría fundamentada emerge a partir de los datos en un área de estudio, por medio de un proceso de investigación. Para el desarrollo de la teoría en el trabajo de investigación, se utiliza el método de comparación constante el cual consiste en comparar datos con categorías, de igual manera la integración de las categorías con sus propiedades.

De otra parte, en palabras de Rodríguez, Gil y García (1999) citados por Rodríguez y Valdeoriola (2011) uno de los factores de la teoría fundamentada con relación a otros métodos cualitativos es su interés en generar teoría que explique, confirmen o desarrollen los fenómenos sociales del objeto de estudio. En la mayoría de las ocasiones, la sustentación teórica surge de la anidación o relación de conceptos derivando una postura hacia el objeto de estudio (Rodríguez & Valdeoriola, 2011). Es decir, establecer una relación de coherencia y pertenencia en el desarrollo de la investigación para determinar su utilidad en el proceso. Sin embargo, la teoría fundamentada se deriva de los datos y sus análisis y conclusiones se parezcan más a la realidad, basados en la experiencia y al mismo tiempo fomentando o promoviendo conocimiento, comprensión y reflexión del trabajo en sí.

3.1.2 Estudio de caso

Para algunos autores, el estudio de caso no es considerado como un método de investigación cualitativa, mejor, es una estrategia de diseño que contribuye a la investigación y que permite seleccionar el objeto; sujeto de estudio y el ambiente de trabajo. Sin embargo, para otros autores como Barrio, González y otros (2010) el estudio de caso lo sitúan como un método de investigación de gran relevancia en el desarrollo de las ciencias sociales y humanas donde el proceso de indagación se caracteriza por ser único o de múltiples casos. Además, el estudio de casos aporta a la comprensión en profundidad de los fenómenos educativos.

De igual manera, la revisión de la literatura sobre el concepto de estudio caso, hace referencia a los siguientes autores: según Yin (1989) citado por Barrio, González y otros (2010) el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallado de las unidades sociales o entidades educativas. Así mismo, Para Stake (1998) el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas. Como una particularidad del método, es el estudio intensivo y profundo, entendiendo este como un sistema acotado, limitado por el objeto de estudio; demarcado en el contexto donde se produce.

Por otra parte, se considera la metodología de estudio de caso, como la más apropiada para este trabajo de investigación, según Durán (2002), citado por Rodríguez y Valldeoriola (2011), permite:

- Descubrir conceptos nuevos y sus relaciones entre conceptos.
- Comprender el concepto que se está estudiando desde el punto de vista de las personas que lo protagonizan.
- Confirmar aquello que ya conocemos.
- Proporcionar información sobre el fenómeno objeto de estudio.

Además, se puede mencionar que el caso es único y particular, relacionado con las razones anteriores que argumentan y sostienen la decisión del estudio de caso, en la comprensión de la reflexión de la práctica docente.

De otra parte, según Sampieri, Baptista (2012), los estudios de caso con enfoque cualitativo, son diseños en los cuales el investigador explora un caso o múltiples a través de la recopilación de datos, utilizando múltiples fuentes de información (observaciones, entrevistas, material audiovisual, documentos e informes) con el objetivo de reportar una descripción del caso vinculado a unas categorías que surgen del análisis. Con relación a lo anterior, las fuentes de información que se acomodan a la realización de la propuesta pedagógica son la observación y el informe.

En este sentido, la observación cualitativa no es una mera contemplación, implica adentrarse en profundidad en situaciones sociales y tener un papel activo así como una reflexión permanente (Sampieri, Fernandez, & Baptista, 2010) precisamente la observación resalta unos propósitos importantes en el estudio cualitativo, entre ellos se tiene, en primer lugar, la exploración de ambientes, contextos y aspectos de la vida social; en segundo lugar, descripción de ambientes, contextos, comunidades y las actividades de las personas que intervienen en el proceso; en tercer lugar, la comprensión de procesos, vinculaciones entre personas y sus situaciones y por último, identificar los problemas que se generan en el desarrollo de las actividades teniendo en cuenta el ambiente, los procesos en las descripción del fenómeno. También, hay que mencionar que la observación no es estructurada, lo cual quiere decir, que no se tendrá una escala de estimación ni lista de cotejo.

3.1.2 Contexto

Para el desarrollo de esta propuesta didáctica, se aplicó un trabajo diagnóstico (Anexo B) en el grado 10-4, esta se llevó a cabo en el salón de clase sin la intervención de la tecnología, con el fin, de establecer las fortalezas y debilidades en algunos procesos matemáticos como tabular, interpretar, representar, codificar, decodificar que son de gran utilidad para comprender significativamente los parámetros de la función cuadrática y así tener un punto de referencia antes de intervenir con el diseño didáctico. La aplicación de la prueba (Anexo C) se realizó en la segunda y tercera semana del mes de febrero del año 2018, correspondiente al primer período, la prueba diagnóstica se lleva a cabo en el aula, la cual se realiza de forma individual en un tiempo máximo de 4 horas, cabe mencionar que, la intensidad horaria de la asignatura es de tres (3) horas semanales y la jornada escolar es de 6:30 a.m. hasta las 12:30 p.m. Además, los estudiantes de la I.E.L se forman en bachilleres técnico comerciales, idóneos para ingresar a la educación superior, competentes en el uso de las TIC, la segunda lengua y con pensamiento crítico que, sean capaces de formular un proyecto de vida coherente y factible.

De otra parte, el grupo 10-4 que participó en la intervención pedagógica está conformado por 36 estudiantes que tienen entre los 15 y 18 años de los cuales seis (6) son hombres y treinta (30) son mujeres; en este grado solo se reportan dos (2) estudiantes nuevos, lo cual quiere decir que, aproximadamente el 90% de los estudiantes pertenecen a un proceso mínimo de un (1) año dentro de la I.E.L.

En la aplicación de la prueba o diseño pedagógico que se realizó en el salón de clases, se tuvo en cuenta las siguientes situaciones:

- Antes de la aplicación del diseño pedagógico, se organizaron 3 sesiones, correspondientes a 6 horas, equivalentes a 3 semanas en la ambientación y socialización del entorno gráfico con los estudiantes del grado 10-4, con el

fin de que, los estudiantes conocieran el entorno gráfico y así poder construir los ambientes de aprendizaje de acuerdo con la complejidad de la tarea.

- Los portátiles utilizados para el desarrollo de la propuesta de trabajo, se debían de trasladar al salón de clases, debido a que la disponibilidad de las salas de sistema no era factible para clases diferentes a las de informática.
- En tercer lugar, se organizaron grupos de trabajo conformado por dos estudiantes, esto debido a que solo se disponía de dos maletas, cada una con 10 portátiles del programa Computadores para Educar.
- La organización dentro del salón de clases estuvo sujeta a la disponibilidad de los tomacorrientes y las extensiones.
- Por último, de las tres horas semanales de la clase, solo se trabajan dos horas (bloque) con la tecnología para permitir la organización de los equipos en el salón de clase.

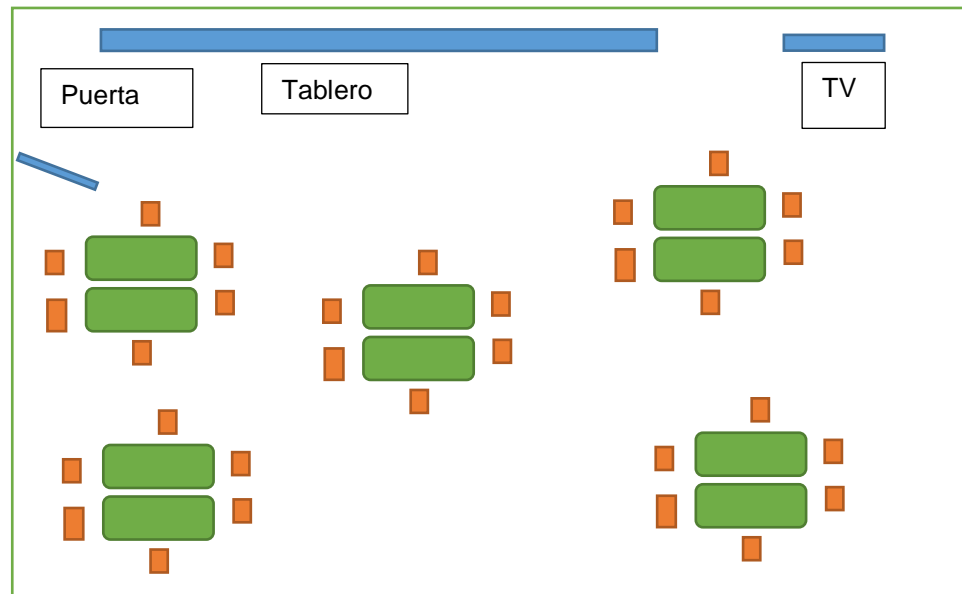


Figura 1 Distribución de la Clase

Durante el desarrollo de la intervención pedagógica se efectuó un registro fotográfico focalizado en la participación de los estudiantes y en la elaboración de las diferentes tareas propuestas en el trabajo pedagógico. Se hace también una socialización al finalizar la intervención pedagógica, con el objetivo de recoger las inquietudes de los participantes para tenerlas en cuenta en próximos diseños de clase por parte del docente. En ese sentido, es de vital importancia la información suministrada por los estudiantes en el desarrollo de la propuesta pedagógica, con el fin de, reflexionar y ajustar el proceso de enseñanza en el estudio de los parámetros de la función cuadrática, permitiendo así el desarrollo de habilidades matemáticas que, conduzcan al logro de competencias en los estudiantes que aporten a la construcción de su proyecto de vida.

3.1.3 Implementación de Diseño

La elaboración de una situación de tareas de complejidad creciente, articulado con (GeoGebra) para analizar y comprender los parámetros de una función cuadrática. Para este propósito, tenemos en cuenta la teoría de tareas Matemáticas con complejidad creciente (reproducción, conexión y reflexión). La propuesta de trabajo está enmarcada en los parámetros del plan de área, plan de aula de la Institución, donde es pertinente la relación con los contenidos en los cuales se encuentra las secciones cónicas y específicamente la parábola, este a su vez responde a los directrices de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias publicados por M.E.N en el año 2006, las matrices de referencia y los DBA en su segunda versión del año 2017.

Cabe mencionar, que, en la I.E.L la misión del área de matemáticas, es la de formar seres humanos que tengan las habilidades, actitudes y valores, para ser competentes ante las demandas sociales actuales. De otra parte, las fechas para la aplicación de la propuesta pedagógica están dentro de las proyecciones del plan de

área de matemáticas de la I.E LITECOM. De igual manera, en esta sección del trabajo, se inicia con una situación de tareas matemáticas denominada, conociendo GeoGebra, con el fin de que el estudiante reconozca el ambiente gráfico y así poder aprovechar al máximo las ventajas que ofrece el programa, como la visualización, la construcción virtual de gráficas, la manipulación de las diferentes variables y la observación en tiempo de real de cada uno de los comportamientos de una gráfica. Además, los estudiantes construyen las situaciones interactivas en GeoGebra y así sería una forma de incorporar la tecnología en el proceso de aprendizaje.

A su vez, el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde deben tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivos a los demás (Ministerio de Educación Nacional, 1998). En consecuencia y teniendo en cuenta el modelo pedagógico institucional, los estudiantes tienen unos saberes previos, igualmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje se tiene en cuenta la información del alumno y a partir de allí proponer una serie de situaciones que lleven al aprendiz a construir o reconstruir los saberes. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones el docente de matemáticas, se preocupa por el objeto de enseñanza, sin tener en cuenta los saberes previos de los estudiantes, la enseñanza de la matemática centrada en el maestro, poseedor de un saber y un estudiante resignado a recibir y guardar la información para después tratar de entenderla y aplicarla en un determinado ejercicio.

Por lo tanto, una situación de tareas con complejidad creciente es el ambiente adecuado que genera el docente para que el aprendiz construya o reconstruya su conocimiento. De acuerdo con lo anterior, la interrelación entre estudiante, maestro, medio de aprendizaje, se puede presentar desde dos momentos; el primero, desde una situación didáctica, cuando en la interrelación entre estudiante y medio didáctico existe una intervención del docente, en efecto, en esta situación el rol del docente es de mediador o facilitador para que el alumno pueda desarrollar los objetivos de la clase, y el segundo momento, desde una situación no didáctica,

cuando en la interrelación entre sujeto y medio didáctico, el estudiantes expone sus saberes para dar solución a una situación, sin la intervención del docente.

En cuanto a el desarrollo de las tareas matemáticas de complejidad creciente, se tuvo en cuenta la fenomenología del objeto matemático, en qué aspectos de la vida cotidiana es relevante este tema de estudio, además, con la utilización de GeoGebra se logró rescribir por parte de los estudiantes y la mediación del docente el concepto de la parábola como lugar geométrico. Cabe mencionar que, las tareas se realizaron en grupos de dos estudiantes, así mismo, se estableció un diálogo entre pares y cada uno de ellos registra las observaciones acordadas por el grupo de trabajo, después, al finalizar, cada una de las actividades que componen la tarea se estableció una socialización sobre los registros que cada uno de los grupos realizó, con el fin de validar la información con los grupos participantes. Por lo tanto la implementación se llevó a cabo en diferentes sesiones de trabajo.

Sesión 1: en esta parte del trabajo se presenta a los estudiantes el ambiente gráfico, con el objetivo de reconocer e identificar el entorno virtual. Además, se realizaron construcciones de puntos, rectas, semirrectas, rectas paralelas, perpendiculares, vectores, segmentos, polígonos regulares e irregulares.

Sesión 2: después de la parte del reconocimiento del entorno gráfico y de realizar algunas construcciones, en el segundo encuentro donde los estudiantes tienen contacto con Geogebra, la orientación está enfocada en la medición de distancias entre puntos, áreas de figuras como: el cuadrado, rectángulo, triángulo, y figuras compuestas.

Sesión 3: para este momento del conocimiento de Geogebra, la intención es de construir funciones lineales, afines, cuadrática, cubica, racionales, exponenciales, entre otras. Con el objetivo de que el estudiante aprenda el algoritmo de construcción de representar funciones en GeoGebra.

Una vez terminada la cualificación de la utilización de Geogebra, se da paso a la realización y aplicación de la propuesta de trabajo la cual se lleva a cabo en las siguientes sesiones:

Sesión 4: el propósito de la tarea 1 es identificar la correlación que existe entre el lado y el área de un cuadrado. Para este fin, se entrega a los estudiantes una guía de trabajo donde deben resolver una situación problema en el contexto de la matemática, como lo es el determinar el área de un cuadrado y representarlo en un sistema algebraico. Los estudiantes realizan representación como tabular y graficar en lápiz y papel. Una vez terminada la tarea 1, el docente organiza una socialización de los escritos por parte de los estudiantes con el fin de puntualizar y establecer unas conclusiones generales.

Sesión 5: para este momento, se desarrolló la tarea 2 y 3 con el propósito de que los estudiantes identifiquen los parámetros de una función cuadrática y observen el comportamiento de la función cuando estos oscilan en un rango de valores. En este sentido, se continúa con la unidad de trabajo, en esta ocasión los estudiantes deben de representar en un sistema algebraico el modelo que corresponda a las situaciones planteadas en las tarea 2 y 3. Los estudiantes después de escribir sus expresiones algebraicas, utilizan el ambiente gráfico con la intención de visualizar las representaciones graficas correspondientes, explorar los diferentes cambios que presenta la función al modificar el valor del parámetro o los parámetros de cada una de las funciones, interactuar con el entorno gráfico y poder registrar las observaciones en cada uno de los casos. Al finalizar cada una de estas tareas se realiza una socialización de los registros hechos por los participantes para realizar aclaraciones y validar el aprendizaje.

Sesión 6: en esta parte de la aplicación de la propuesta de trabajo, se desarrolla la tarea 4, donde los estudiantes realizaran tratamiento, es decir, transformar la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en una función de la forma $g(x) = (x - h)^2 + k$ para determinar los parámetros h y k , y con la ayuda de

Geogebra poder observar cual es la influencia de estos parámetros en el comportamiento de la función cuadrática.

De otra parte, el proceso de evaluación de la intervención pedagógica, se refleja de manera directa en el aprendizaje de los estudiantes, es decir, una buena planificación y ejecución del diseño pedagógico aumenta las posibilidades de éxito de los estudiantes en el desarrollo de las competencias del área. Así mismo, el propósito de la evaluación desde una perspectiva formativa es la de retroalimentar, obtener información pertinente y oportuna para reorientar el proceso, determinar si los contenidos, actividades, estrategias, recursos y tiempo son adecuados para las características de los estudiantes. En ese sentido, se pone a consideración el diseño pedagógico con los pares académicos con el fin de validar el diseño y así poder aplicarlo al grupo piloto, cabe mencionar que, una de las características de la evaluación formativa son los procesos y no los resultados.

En cuanto a recoger la información, se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos: en primer lugar, la observación como un instrumento de evaluación en el trabajo en clase; durante las cuatro semanas de trabajo, este fue uno de los criterios de evaluación en la valoración del trabajo de los estudiantes, se puede mencionar, que los aprendices estuvieron dentro de un marco de trabajo cooperativo con buena disposición; en segundo lugar, la participación por parte de los estudiantes en los diferentes momentos de la socialización, al finalizar cada una de las tareas, los estudiantes compartían sus observaciones con sus compañeros, las cuales era objetos de discusión entre el grupos de participantes y el docente; en tercer lugar, la revisión de los registros por parte del docente; en cada una de las tareas se llevó a cabo una revisión de las evidencias generadas por los estudiantes, en cuarto lugar y por último la autoevaluación de las actividades por parte de los estudiantes con el fin de identificar las fortalezas y las debilidades de la implementación de la propuesta pedagógica. Cabe mencionar, que la socialización se llevaba en los días que solo había una hora de clase y es de recalcar la buena disposición y actitud de los estudiantes para realizar el trabajo propuesto.

Capítulo 4

4.1 Análisis de Resultados

En este capítulo, se analizan los resultados desde el aprendizaje, identificando las fortalezas y dificultades de los estudiantes al desarrollar la situación de tareas matemáticas de complejidad creciente haciendo énfasis en el nivel de reproducción, conexión y reflexión aplicado al objeto matemático y mediado por GeoGebra.

En este sentido, los resultados de la intervención pedagógica, en términos de PISA (OCDE, 2003), De Lange (1995), Smith y Stein (1998) y Solar (2009), citados por García [et al.] (2013), las tareas matemáticas se propone analizarlas desde los niveles de complejidad creciente (reproducir, conexión y reflexión), considerando la relación de las demandas cognitivas y las estructuras conceptuales del objeto matemático. Es decir, poder determinar las acciones de la actividad matemática de los estudiantes, su interacción, participación, la negociación de significados y a partir de lo anterior determinar el desarrollo de los procesos matemáticos (codificar, decodificar, representar, calcular, tabular) que se convierten en un complemento pertinente en el desarrollo de las competencias matemáticas. Además, y en términos de García (2013) el docente no debe involucrarse directamente en la tarea de los estudiantes, pero, es su deber, plantear tareas y estrategias en la orientación de la clase, con el fin que, los estudiantes participen de forma activa en su proceso de aprendizaje.

Además, un aspecto para tener en cuenta es la disposición de los estudiantes como parte fundamental en el desarrollo de la propuesta de trabajo. En términos de García (2013) la disposición para realizar una actividad matemática y la persistencia en no claudicar en los obstáculos presentados a lo largo del proceso de enseñanza

y aprendizaje, son esenciales en la consecución de los objetivos de la propuesta de trabajo.

En segundo lugar, el objeto de estudio parámetros de una función cuadrática que sirvió de excusa para la propuesta de trabajo, se analiza desde la representación de las funciones en diferentes sistemas (algebraico, gráfico, tabular), reconocer e identificar los parámetros de una función cuadrática para determinar su comportamiento en un sistema de coordenadas cartesianas, de igual manera en poder asociar estos comportamientos a situaciones dentro del contexto de la ciencias, la misma matemática o fenómenos cotidianos.

En un tercer y último lugar, la influencia GeoGebra desde la visualización, exploración y la interacción de los estudiantes con el medio, con el fin de que los estudiantes puedan reescribir o escribir su saber en un contexto determinado.

De otra parte, se toma como referencia la teoría fundamentada como metodología de análisis, con el fin de identificar unidades de comparación llamadas categorías que, permitan determinar si la propuesta pedagógica es pertinente y coherente en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Después de analizar los resultados de la propuesta de trabajo en el aula, a través de la teoría fundamentada como metodología de análisis de información en una investigación, se identificaron algunas categorías, las cuales permiten un acercamiento pertinente al objetivo de estudio que pretende el trabajo de investigación. Entre ellas tenemos:

Calidad de Adaptación: categoría que hace referencia a la pertinencia y coherencia de una situación de tareas vinculada a la propuesta de trabajo sobre el aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática realizada con los estudiantes de grado 10º. De igual manera, la propuesta de trabajo fue valorada por los docentes del área por medio de una encuesta de validación (Anexo E) donde en el

apartado de práctica de aula se identifican los puntos que hacen referencia a la organización y planeación de la propuesta. Una vez desarrollada la validación se concluye que la propuesta de trabajo es innovadora; así mismo los docentes consideran que la utilización de la tecnología motiva el interés en la clase y consideran que la organización de la clase contribuye a alcanzar las meta propuestas.

En ese orden de ideas, se establecen unas subcategorías que hacen parte del proceso de enseñanza y aprendizaje como lo son: el contexto, propósito, objeto matemático

Tabla 1 Categoría de Análisis – Calidad de Adaptación

Calidad de Adaptación	
Descripción	
Contexto	Estudiantes de grado 10 ^o de la institución educativa LITECOM.
Objeto Matemático	Parámetros de una función cuadrática
Propósito	Construir espacios de aprendizaje que contribuyan a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.
Innovación	Los estudiantes consideran innovadora la propuesta de acuerdo a una encuesta de satisfacción.

Fuente: Elaboración Propia.

Calidad del Diseño: En esta segunda categoría, se enfoca a la articulación que se hace desde el componente pedagógico, componente disciplinar y componente tecnológico en la búsqueda de soluciones a distintos obstáculos de enseñanza y aprendizaje del individuo que se pretender atender desde la creación de ambientes educativos y estrategias pedagógicas para facilitar u posibilitar los cambios en el individuo. Cabe mencionar, que los literales de 2 y 4 de la encuesta de satisfacción realizada por los estudiantes (Anexo F) está de acuerdo con la utilización de un ambiente grafico en el proceso de aprendizaje, hay que considerar que la mayoría de los estudiantes que participaron en el desarrollo de la propuesta de trabajo les motiva el uso de la tecnología. De otra parte, los estudiantes consideran que el trabajo en equipo permite la interacción entre pares en la realización de una actividad.

En ese orden de ideas, se busca dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, con la firme intención de desarrollar en los estudiantes habilidades y competencias que le permitan responder ante las demandas sociales actuales.

Por lo tanto, uno de los propósitos de la propuesta de trabajo es que el estudiante sea el actor principal de su proceso de aprendizaje y que pueda interactuar con sus pares en la construcción del conocimiento mediado por la tecnología. En ese orden de ideas, se identifican las siguientes subcategorías: Innovación, interacción, habilidad.

Tabla 2. Categoría de Análisis – Diseño Propuesta Didáctica

Diseño Pedagógico	
Descripción	
Innovación	Los estudiantes desarrollan la tarea de complejidad creciente combinando lápiz y papel con un ambiente gráfico, donde realiza exploraciones y manipulaciones de los parámetros visualizando el comportamiento de la función.
Interacción	La interacción se realiza en primera instancia con su par en la elaboración de un posible desarrollo de la actividad; en una segunda instancia con GeoGebra en la representación de forma dinámica de la solución propuesta y en una tercera instancia con sus compañeros y docente con el fin de socializar sus observaciones.
Habilidad	Los estudiantes muestran dominio en el manejo del computador y específicamente en el ambiente gráfico GeoGebra, además, se utiliza el argumento y la razón como procesos desde la comunicación.

Fuente: Elaboración Propia.

Calidad de la implementación: esta categoría se enfoca en el conocimiento que tiene el docente en los procesos de enseñar y aprendizaje mediados por las TIC. En este sentido la validación de la propuesta pedagógica por parte de los docentes del área, permite establecer, los conocimientos del docente se dirigen en el conocimiento pedagógico disciplinar (PCK) por sus siglas en inglés, conocimiento tecnológico de contenido (TCK) y el conocimiento tecnológico pedagógico (TPK), los cuales hacen parte de un modelo reconocido como TPACK (conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinar) Según Mishra y Koehler

(2006) citados por Cabero, Roy-Vila y Mengual-Andres (2017) formulan el modelo TPACK con el objetivo de delimitar los conocimientos que deben tener los docentes para integrar las TIC de manera eficaz y coherente en el aula.

Tabla 3. Categoría de Análisis – Calidad de Implementación

Calidad de Implementación	
Descripción	
Componente Tecnológico del Contenido	Se refiere al conocimiento de cómo la tecnología puede crear nuevas representaciones para contenidos específicos.
Conocimiento Tecnológico Pedagógico	Conocimiento de las características y el potencial de las múltiples tecnologías disponibles utilizadas en contextos de enseñanza y aprendizaje.
Conocimiento Pedagógico Disciplinar	Conocimiento que el docente utiliza al enseñar un contenido determinado, teniendo en cuenta las características de los sujetos.

Fuente: Elaboración Propia.

Actitud hacia el Aprendizaje: los estudiantes durante el desarrollo de su proceso de aprendizaje, generan distintas manifestaciones de aceptación o de rechazo frente a una propuesta de trabajo, ese tipo de situaciones puede favorecer o no los propósitos de la propuesta de trabajo. Además, la disposición del estudiante es fundamental al momento de encontrar obstáculos de aprendizaje. En ese sentido, la actitud hacia el aprendizaje moviliza diferentes situaciones como: el gusto por la tecnología, gusto por las matemáticas, la motivación por la clase, habilidades del siglo XXI (HS21) que hacen referencia a la colaboración, pensamiento crítico, pensamiento creativo y la comunicación entre otras (Fedesarrollo, 2016). En ese

orden, la organización, el diseño y la evaluación deben de estar enfocados a fomentar en los estudiantes este tipo de competencias. Se presenta un dialogo en la reflexión del trabajo realizado y estos son algunas respuestas de los estudiantes:

Docente: ¿Cuál es tu opinión frente a la clase de Matemáticas?

Estudiante 1: “la clase de matemáticas me gusta porque aprendo de una manera didáctica, es un espacio donde podemos expresar nuestras ideas y opiniones ponemos a pensar nuestro cerebro, nunca perdemos el tiempo incluso debatimos cosas de actualidad”

Estudiante 2:

Docente: ¿Consideras importante el uso de la tecnología en la clase?

Estudiante 1: “La tecnología juega un papel importante durante la clase ya que a través de ella podemos aprender más fácil”

Estudiante 2: “si porque en muchos casos se necesita para ver resultados y comprobarlos”

Estudiante 3: “claro que si ya que el método y temas que el profesor propone son requeridos para el resultado final”

Docente: ¿Qué aspectos de la clase motivan el trabajo en clase?

Estudiante 1: “la clase de matemáticas me motiva cuando utilizamos los computadores”

Estudiante 2: “la energía y el empeño del profesor a la hora de explicar y su dedicación eso me motiva porque cuando uno entiende un tema él se emociona y hace una actividad”

Estudiante 3: “la tecnología porque se usa esta de buena manera”

Tabla 4 Categoría de Análisis: Motivación

Motivación	
Descripción	
Actitud hacia la Tecnología	Los estudiantes reaccionan de manera positiva frente al uso de dispositivos tecnológicos. Se muestran interesados en utilizar GeoGebra y con una gran expectativa.
Actitud hacia la Matemáticas	Hay estudiantes que se destacan en el área, realizan procesos de codificación, decodificación de manera útil.
Actitud hacia el Trabajo	Los estudiantes asumen su rol dentro del trabajo propuesto de forma positiva y asertiva facilitando el desarrollo del mismo, esto se demuestra en la participación activa durante la realización del trabajo.
Habilidades Siglo XXI (HS21)	El trabajo cooperativo, la comunicación como proceso basado en la argumentación y la razón, al momento de socializar sus observaciones ante sus pares y docente.

4.1.1 Variación del parámetro “a” en la función $y = ax^2$

En esta actividad 1 de la tarea 1, el propósito es identificar el parámetro “a” cómo el coeficiente del término cuadrático de la función $y = ax^2$ y determinar la relación de del parámetro “a” con el comportamiento de la función en un sistema de coordenadas. De igual manera, el docente presenta unas recomendaciones para tener en cuenta a la hora de interactuar con el ambiente gráfico y maximizar el tiempo en la construcción del ambiente virtual de aprendizaje.

De esta forma, se da inicio al desarrollo de las tareas de complejidad creciente con la implementación de GeoGebra en el aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática. Cabe mencionar, que para el análisis se tiene como referencia los diferentes momentos del desarrollo de las tareas.

Reproducción: en esta primera parte que corresponde a los puntos 1 y 2 de la tarea 1, los estudiantes realizan las representaciones las funciones $y = ax^2$ y $y = -ax^2$. Este momento no presentó mucha dificultad para los estudiantes, ellos están relacionados con la tabulación y la representación gráfica en un plano cartesiano, una vez realizado el bosquejo inicial, se utiliza el ambiente gráfico y se construyen las gráficas para poder observar las diferentes representaciones.

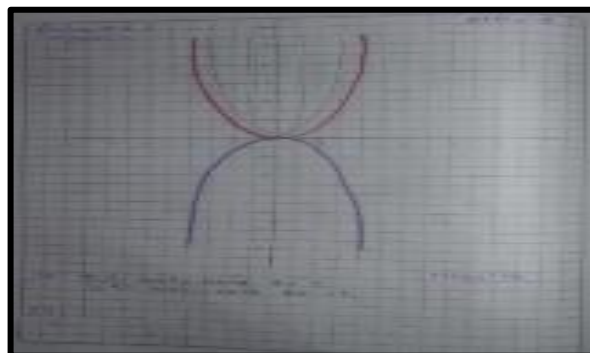
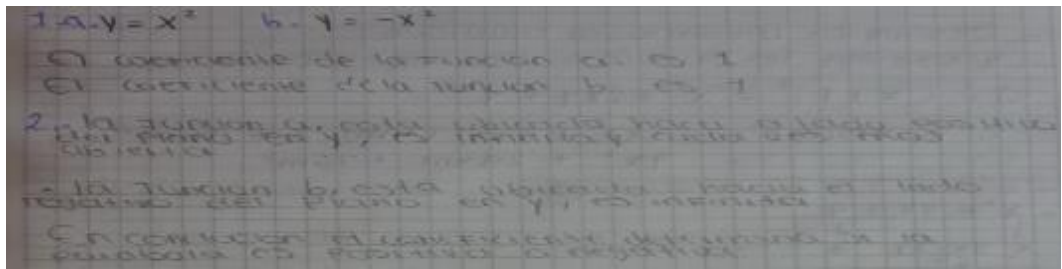


Figura 2 Cambios del parámetro a. Grupo de estudiantes 03.

Con relación al programa de apoyo GeoGebra, los estudiantes hasta el momento no presentan mayores dificultades, crean los deslizadores de forma correcta y los relacionan con la construcción de las expresiones algebraicas que son representadas gráficamente.



1. $y = ax^2$ y $y = -ax^2$
 - a. El coeficiente de la función a es 1
 - b. El coeficiente de la función b es -1
2. La función está ubicada hacia el lado positivo del plano y es infinita y cada vez más abierta.

La función b, está ubicada hacia el lado negativo del plano y es infinita.

Figura 3: Ejemplo de descripción de observación. Tarea 1

Conexión: En este momento, los estudiantes describen el comportamiento de cada una de las funciones $y = ax^2$ y $y = -ax^2$, al mismo tiempo, tratan de relacionar las funciones con las representaciones gráficas y poder establecer una conclusión sobre la primera actividad matemática. Los estudiantes en su lenguaje simple y particular, escriben expresiones como:

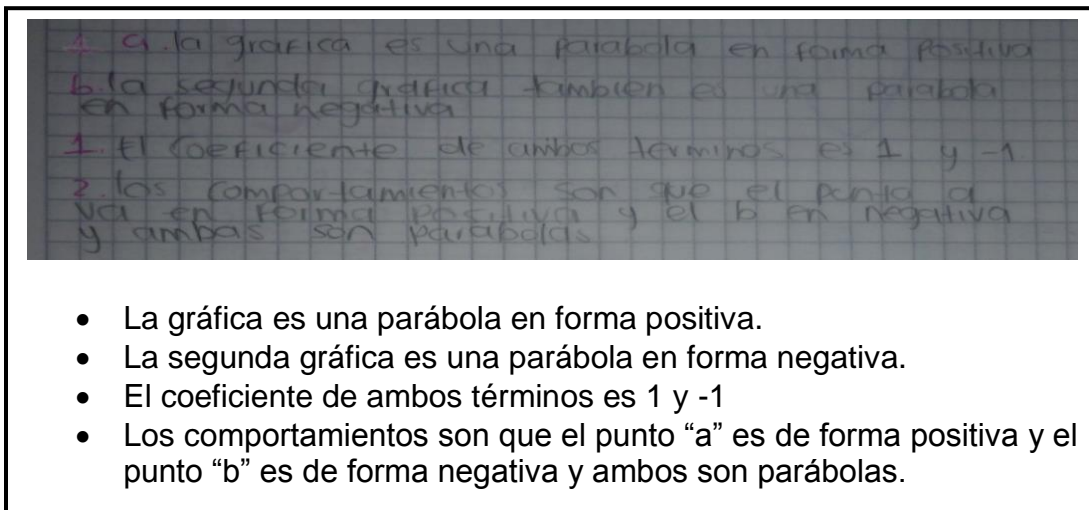


Figura 4: Descripción grupo 03. Tarea 1

Conviene subrayar, que el lenguaje utilizado por los estudiantes es algo confuso al tratar de relacionar el signo del parámetro a con la concavidad de la parábola. Por otra parte, en el punto 3 de la tarea, los estudiantes tienen la libertad de escoger valores para el parámetro “a” y así poder describir una serie de comportamientos de la función. Se observa que los estudiantes al asignar un valor al parámetro “a” describen el comportamiento con relación a ese valor y no en un rango de valores, lo cual dificulta al momento de puntualizar sobre el tema. Además, se detectó que los estudiantes tienen una confusión con los valores negativos, ocasionando una percepción y descripción en contravía de lo esperado.

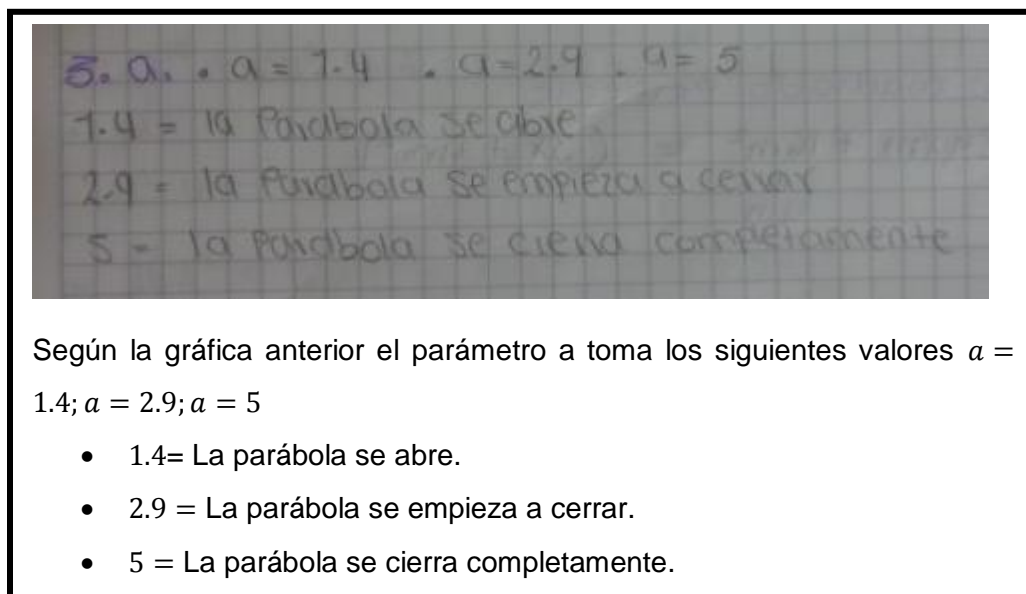


Figura 5: Descripción grupo 6. Tarea 1

En términos generales, los estudiantes visualizan y entienden el comportamiento de una función cuadrática con relación al parámetro “ a ”, sin embargo, el lenguaje utilizado en la descripción de los sucesos es confuso y se puede facilitar para interpretaciones que no corresponden. Cabe mencionar que, los estudiantes no han tenido sesiones previas en el estudio sobre el objeto matemático.

Reflexión: en esta parte de la tarea matemática, el propósito es que los estudiantes aparte de comprender cuándo una parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo, también pudieran transformar del lenguaje natural a un lenguaje simbólico, utilizando la argumentación y la razón para justificar las descripciones realizadas y establecer una relación entre el coeficiente del término cuadrático y el comportamiento de la función en el plano cartesiano. En este caso, hay que mencionar que solo 12 estudiantes lograron realizar la conversión de lenguaje natural a lenguaje simbólico de forma coherente, 19 estudiantes realizaron las descripciones apropiadas sobre el comportamiento de la función sin poder hacer una conversión coherente y 7 estudiantes, solo lograron hacer una descripción sin proponer una relación de tipo simbólico.

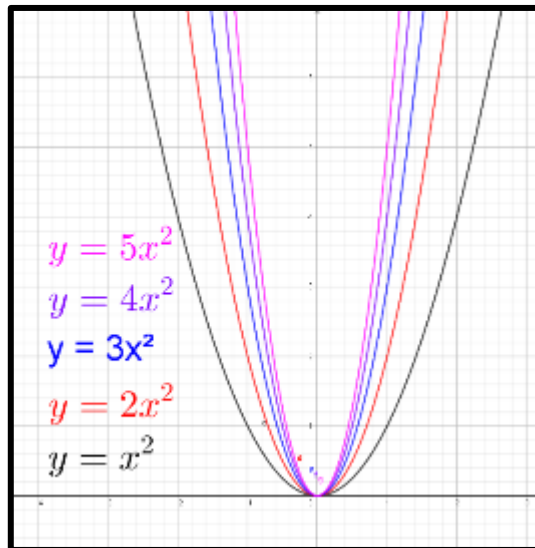


Figura 6: Elaboración propia. Representación de familia de parábolas. Cuando $a \geq 1$

En resumen, de esta primera tarea, se observa dos situaciones, la primera de ellas es la disposición de los estudiantes frente a la propuesta de trabajo, que en términos de ellos mismos es algo fuera de lo normal, y, en segundo lugar, los aprendices lograron ser parte de la construcción del proceso de aprendizaje siendo ellos mismos, los sujetos activos y parte fundamental del proceso.

Con relación a lo esperado en esta primera tarea, se puede considerar que es aceptable, teniendo en cuenta que es la primera vez que se realiza este tipo de trabajo por parte del docente de matemática, la intervención de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje no es fácil, además, hay que decir también que se presentaron obstáculos como el poder comunicar lo realizado por parte de los estudiantes en términos de un lenguaje cotidiano coherente y más en un lenguaje matemático. De otra parte, los estudiantes lograron identificar el parámetro “a” como una constante de la función cuadrática, así mismo poder establecer la relación que existe entre el signo de la constante y el comportamiento de gráfica si es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo, de igual manera, los aprendices lograron determinar que cuando el valor de es $a < -1$ y $a > 1$ las ramas de la

gráfica se contraen, así mismo, cuando $0 < a < 1$ y $0 > a > -1$ las ramas de la parábola se dilatan.

4.1.2 Análisis de la Tarea 2: Cambio y Observo

1.

$A_T = x^2 + 2x$

$(x+2) \cdot x = x^2 + 2x$

ella nueva figura resultante es un rectángulo
 ella expresión es $A_T = x^2 + 2x$
 el los coeficientes son

$1x^2$ coeficiente $2x$ coeficiente

$A_T = x^2 + 2x$; $(x + 2) \cdot x = x^2 + 2x$

- La nueva figura resultante es un rectángulo.
- La expresión es $x^2 + 2x$
- Los coeficientes son 1 del término cuadrático y 2 del término lineal.

Figura 7: Descripción grupo 8. Tarea 2

En esta tarea, se plantea la construcción de una figura geométrica relacionada con las indicaciones registradas en el punto 1, con el propósito de hacer una modelación gráfica, determinar una expresión algebraica, representarla en GeoGebra para realizar las comparaciones entre la función $y = ax^2$ y la expresión resultante después de la modelación, ¿Cuántos términos tiene la expresión resultante? ¿Cuáles son los coeficientes de los términos? ¿Qué otro parámetro surge?

Niveles de Complejidad

Reproducción: los estudiantes modelan un rectángulo según las indicaciones de la tarea en el punto número 1, donde solo 7 estudiantes lograron representar de forma coherente la situación planteada teniendo en cuenta sus respectivas dimensiones y la expresión algebraica que representa el área de la figura construida. Después, el grupo de estudiantes con la utilización de GeoGebra construyen el ambiente de aprendizaje, asocian dos deslizadores a la función que, para este caso, serían a y b , los cuales representan los coeficientes de los términos de la función $y = ax^2 + bx$, así mismo, se construye la gráfica en un sistema de coordenadas bidimensional. Los estudiantes realizan procedimientos como la multiplicación de expresiones algebraicas, hallan la expresión que representa el área de una figura, consideradas dentro de procedimientos rutinarios con los cuales el estudiante está familiarizado.

Conexión: los estudiantes realizan en GeoGebra las gráficas $y = ax^2$ y $y = ax^2 + bx$. Al mismo tiempo logran establecer unas características entre una función y otra. Según la descripción anterior los aprendices identifican cuándo una parábola tiene vértice en el origen y cuando está fuera de él, esto se relaciona con las expresiones algebraicas $y = x^2$; $y = x^2 + 2x$ que representan las funciones.

Por lo tanto, 14 aprendices logran relacionar las expresiones algebraicas con su representación gráfica y determinan que, cuando una expresión algebraica que representa una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx$ tiene dos términos y sus coeficientes son diferentes de cero o no nulos, su vértice o punto extremo no está ubicado en el origen de un sistema de coordenadas. Es decir, los aprendices pueden representar en dos sistemas uno algebraico y otro gráfico, siendo lo más importante que la variación del parámetro b está relacionado con el vértice de la función. En algunos casos, los estudiantes al manipular el parámetro b tuvieron cierta confusión al tratar de describir el comportamiento de la gráfica que representa la función $y = ax^2 + bx$, no se sabía exactamente si el movimiento era vertical,

horizontal o la composición de ambos. De todas maneras, los aprendices relacionaron el parámetro b con la variación del vértice fuera del origen de un sistema de coordenadas. Sin embargo, hay que mencionar que el parámetro b de una función cuadrática no es de muy fácil comprensión y habría que hacer un análisis más detallado.

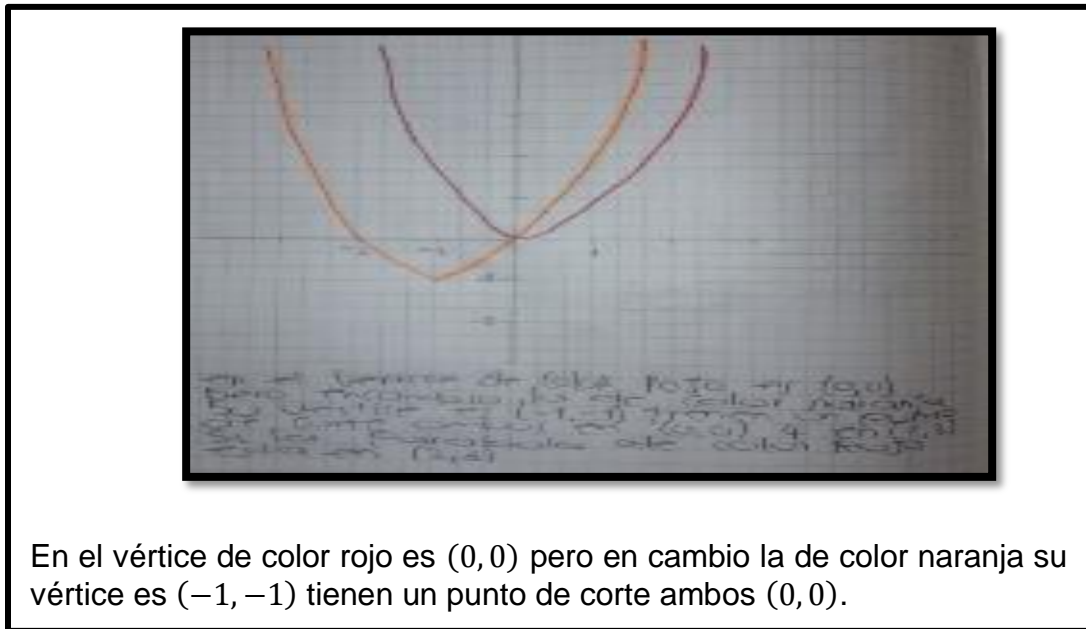


Figura 8: Descripción grupo 1. Tarea 2

De otra parte, los estudiantes se muestran muy cómodos y motivados con la utilización del ambiente gráfico el cual les permite observar, manipular y escribir lo acontecido en el desarrollo de la tarea.

Reflexión: para este caso, los estudiantes realizan procesos de codificación del lenguaje natural a una representación icónica, luego, codifican a un lenguaje algebraico y por último a un sistema de coordenadas. A esta conversión dentro de la actividad matemática se puede nombrar como una matematización horizontal. Los aprendices representan la misma situación en dos sistemas diferentes, permitiendo obtener mucha más información.

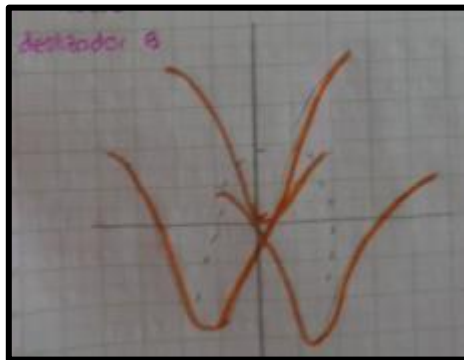


Figura 9: Representación de traslación
Grupo 5. Tarea 2

De otra parte, los estudiantes, comprobaron dos formas de poder hallar la expresión algebraica que representaba el área del rectángulo modelado, una de ellas fue, el determinar el área de cada una de las regiones en la cual estaba compuesta la figura y sumar sus resultados; una segunda forma fue, determinar las dimensiones del rectángulo modelo y realizando el producto $x \cdot (x + 2)$ para hallar la expresión que representa el área del rectángulo obtenido. En consecuencia, los estudiantes proponen alternativas de solución a una situación matemática, así mismo, el utilizar un ambiente gráfico, les permite a los estudiantes obtener información de manera rápida y coherente de acuerdo con lo planteado en las tareas matemáticas. Además, se tiene en cuenta las observaciones generadas por las diferentes situaciones planteadas, los estudiantes argumentan y defienden sus conclusiones con relación a la postura de otros compañeros en el proceso de socialización de la clase.

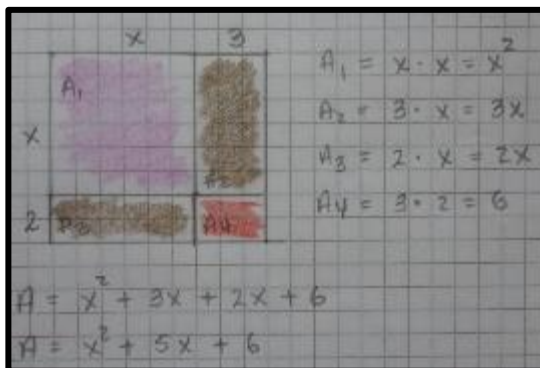


Figura 11 Suma de áreas parciales.

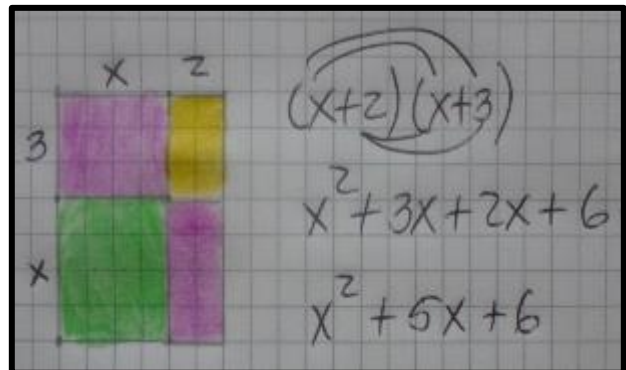


Figura 10 Producto de la forma $(x+a)(x+b)$

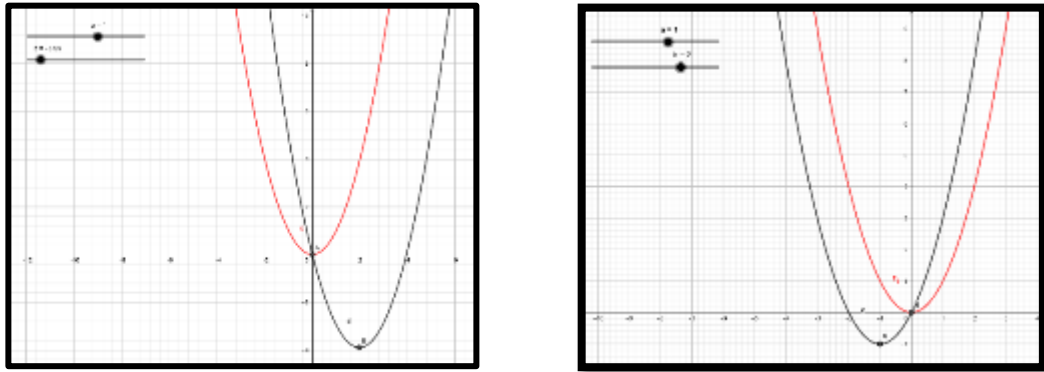


Figura 12: Traslación de funciones en GeoGebra. Grupo 1.

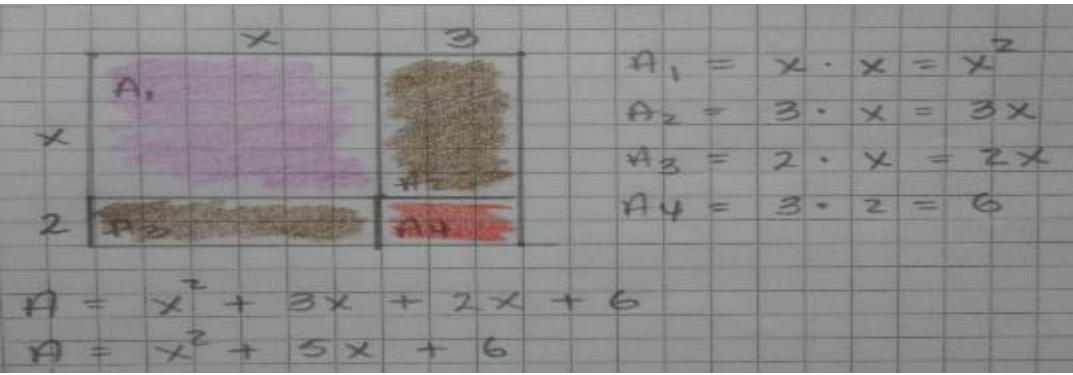
Con la variación del parámetro b se observa que cuando b toma valores mayores que cero, el vértice se desplaza hacia el lado positivo del *eje x*, así mismo, cuando b toma valores negativos, el vértice se desplaza hacia lado negativo del mismo eje.

4.1.3 Análisis Tarea 3: Cambio y Observo

Cuando se propone esta tarea, los estudiantes tienen una disposición asertiva frente a la metodología utilizada en el momento de desarrollar las tareas matemáticas, es notable que la utilización de la tecnología en el proceso de aprendizaje motiva al estudiante y al mismo tiempo genera la incertidumbre de qué va encontrar durante el desarrollo de la misma. En esta tarea el propósito es identificar cuál es la influencia del parámetro c en una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, tomando como constantes los parámetros a y b . De otra parte, se plantea una situación matemática con la cual se estructura la tarea 3.

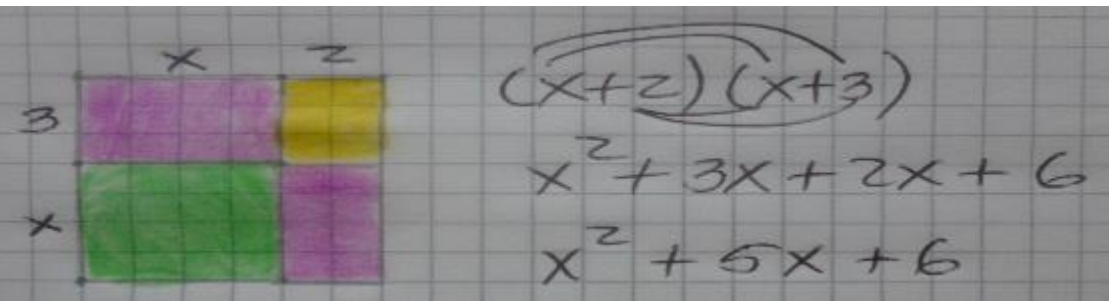
Reproducción: los estudiantes modelan de manera sencilla el rectángulo, teniendo como referencia la situación de la tarea 2, determinan las dimensiones de la figura geométrica y encuentran la expresión que representa el área por medio de procedimientos rutinarios como: multiplicación de expresiones algebraicas, suma de

términos semejantes de la figura modelada. De igual manera identifica los parámetros a, b y un nuevo elemento como lo es el término denominado independiente o para este caso el parámetro c , utilizando el ambiente gráfico, construyen el ambiente de aprendizaje, representan la gráfica y realizan las comparaciones respectivas entre las funciones $y = x^2$ y $y = ax^2 + bx + c$ manteniendo los parámetros a y b constantes y manipulando el parámetro c .



$A_1 = x \cdot x = x^2$ $A_3 = 2 \cdot x = 2x$ $A = x^2 + 3x + 2x + 6$
 $A_2 = 3 \cdot x = 3x$ $A_4 = 3 \cdot 2 = 6$ $A = x^2 + 5x + 6$

Figura 13: solución punto 1 de la tarea 3. Grupo 4



$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 \rightarrow x^2 + 5x + 6$

Figura 14: solución punto 1, tarea 3. Segunda propuesta. Grupo 7

Conexión: para este momento, los estudiantes realizan procesos de la actividad matemática como codificar, este se hace evidente al realizar la conversión entre el lenguaje natural al lenguaje icónico, a sí mismo, al lenguaje algebraico; después los aprendices realizan una decodificación al interpretar las características de la función $g(x) = ax^2 + bx + c$ entre ellas el signo del parámetro a para determinar la concavidad, si el parámetro $b = 0$ el vértice se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, si $a < -1$ y $a > 1$ la parábola esta contraída con relación a la función $y = x^2$ y si $-1 < a < 1$ siendo $a \neq 0$ la parábola esta dilatada. Además, cuando se manipula el parámetro c los aprendices observan que la función g tiene un desplazamiento vertical sobre el sistema de ejes coordenados, verificando así el movimiento vertical del vértice de la función.

De otra parte, los estudiantes solo manipulaban el parámetro “ c ” teniendo los parámetros a y b constantes. Igualmente, 3 grupos de trabajo consideraron que si $b = 0$, el desplazamiento vertical de la gráfica se realiza sobre el eje de la ordenada en un plano cartesiano.

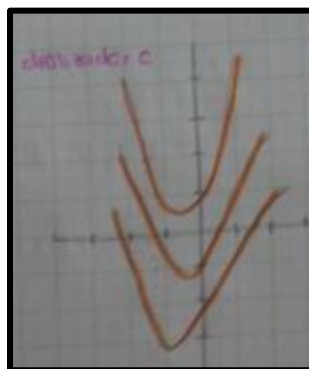


Figura 15: traslación vertical. Grupo 8

Reflexión: los estudiantes desarrollan la argumentación y el razonamiento como procesos ligados a la actividad matemática, en este caso, los estudiantes relacionan el parámetro c con el vértice, argumentando que el vértice de coordenadas (x, y) puede llegar a ser de coordenadas (x, c) .

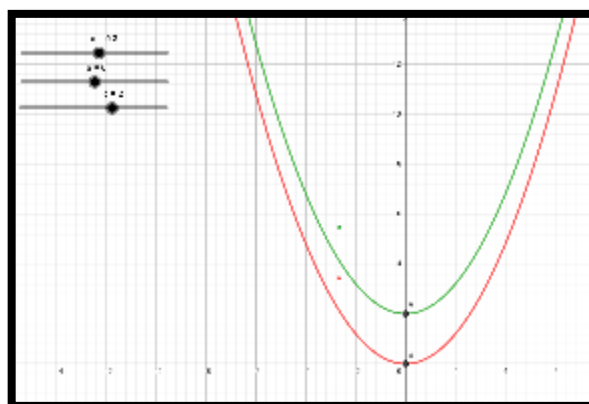


Figura 16: Elaboración propia. Translación vertical. Geogebra

Durante la socialización de esta parte de la tarea, se necesitó de la intervención del docente para puntualizar y formalizar las observaciones realizadas por los estudiantes. Cabe mencionar que a medida que las tareas aumentaban su demanda cognitiva, a los estudiantes se les dificultaba llegar a la reflexión. Así mismo, se presenta a continuación algunas de las conclusiones debatidas en la socialización de la tarea y representados en GeoGebra.

- Un grupo de estudiantes realiza la siguiente afirmación, si la parábola tiene vértice en el origen, es cóncava hacia arriba siendo $c = 0$.
- Otro caso, si la parábola es cóncava hacia arriba y $c > 0$ la parábola no tiene intersección con el eje x .
- De igual manera, si la parábola es cóncava hacia arriba y $c < 0$, la parábola tiene dos intersecciones con el eje x .

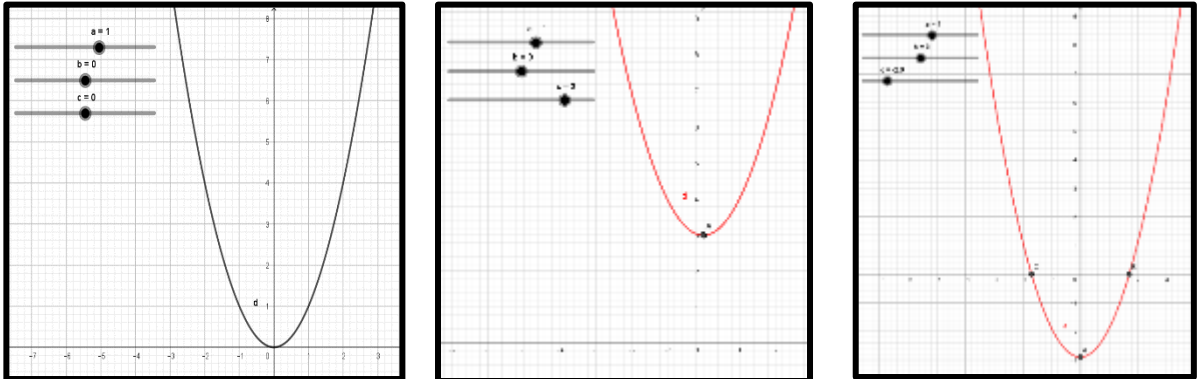


Figura 17: Posibles soluciones gráficas de una ecuación cuadrática. Grupo 6

También se tuvo en cuenta las siguientes situaciones:

- Si la parábola tiene vértice en el origen, es cóncava hacia abajo y $c = 0$, la parábola tiene un solo punto de intersección con eje x .
- Si la parábola es cóncava hacia abajo y $c > 0$, la parábola tiene dos intersecciones con el eje x .
- En el último caso, si la parábola es cóncava hacia abajo y $c < 0$, la parábola no tiene intersección con el eje x .

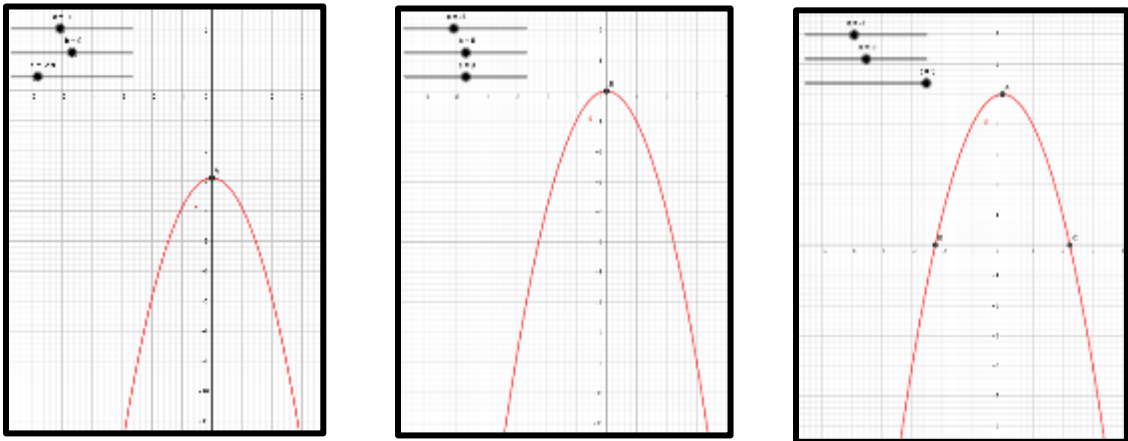


Figura 18: Posibles soluciones de una ecuación cuadrática. Grupo 2

4.1.4 Análisis Tarea 4: Expresiones Equivalentes

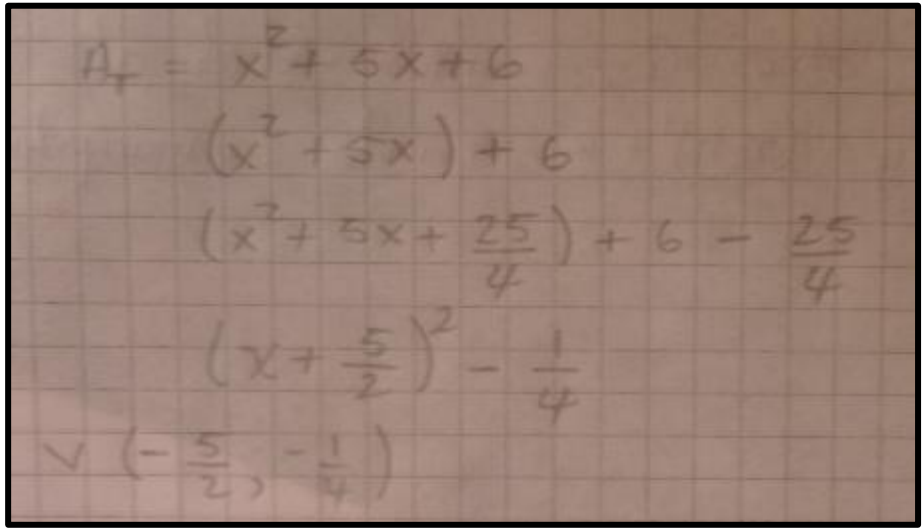
El propósito de esta tarea, es que los estudiantes realicen tratamiento en un mismo sistema, en este caso es transformar la expresión $g(x) = ax^2 + bx + c$ en la expresión $h(x) = (x - h)^2 + k$, utilizando el método de la completación a trinomio cuadrado perfecto. Seguidamente establecer la relación entre los parámetros h, k y el vértice de la parábola y los movimientos de traslación en el plano cartesiano; hay que mencionar que los estudiantes tienen mucha disposición para el trabajo propuesto con la mediación del software de geometría dinámica.

Reproducción: para este momento, los estudiantes realizan tratamiento al transformar la expresión $g(x) = ax^2 + bx + c$ en una equivalente $h(x) = (x - h)^2 + k$ ya que lo realizan dentro del mismo sistema algebraico. Los grupos de estudiantes, toman como base la expresión algebraica $y = x^2 + 5x + 6$ que representa el área del rectángulo de dimensiones *base* $(x + 2)$ y *altura* $(x + 3)$, realizan el producto, representan en el ambiente gráfico la función.

Este proceso de tratamiento es considerado en el nivel de reproducción debido a que los procedimientos aritméticos y algebraicos son algorítmicos. Además, este procedimiento permite identificar el vértice, el cual no está ubicado en el origen del sistema de coordenadas. Sin embargo, en el desarrollo de esta parte de la tarea, se presentaron algunas dificultades en los procedimientos que los estudiantes deben realizar para hacer el tratamiento en la transformación de la función $g(x)$. Es decir, en esta primera parte de la tarea 4, se vio la necesidad de la intervención del docente en puntualizar en algunos casos de factorización y operaciones entre números racionales. Se puede considerar que este fue un obstáculo de aprendizaje en el desarrollo de la tarea, donde solo 4 grupos de los 16 lograron resolver esta parte sin ayuda del orientador de la clase.

En relación con el manejo del ambiente gráfico no se presentaron dificultades en la construcción del ambiente de trabajo, se puede decir que, los estudiantes

aceptaron y asimilaron de forma positiva la incorporación de la tecnología en el proceso de aprendizaje de los parámetros de la función cuadrática.



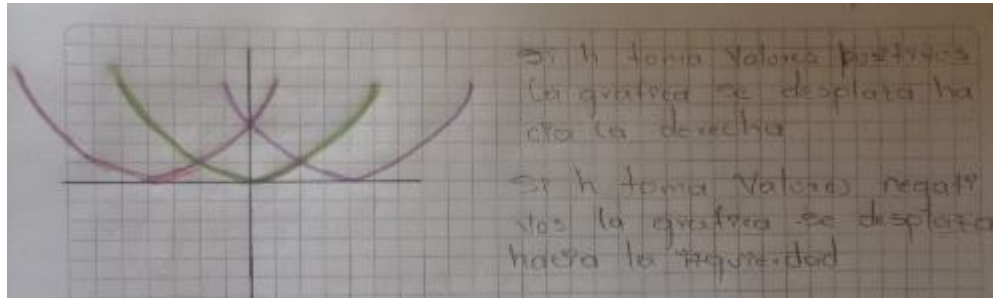
$$\begin{aligned}
 A_T &= x^2 + 5x + 6 \\
 &= (x^2 + 5x) + 6 \\
 &= \left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 6 - \frac{25}{4} \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
 v &= \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Figura 19: tratamiento de una expresión algebraica. Grupo 1

Conexión: siguiendo con el desarrollo de la tarea 4, los estudiantes observan que surgen nuevas constantes dentro del marco de los parámetros de la función cuadrática, ellas son las letras h, k las cuales tienen relación con las ya mencionadas a, b y c , y donde se establece la relación de $h = \frac{b}{2}$ y $k = c - \frac{b^2}{4}$.

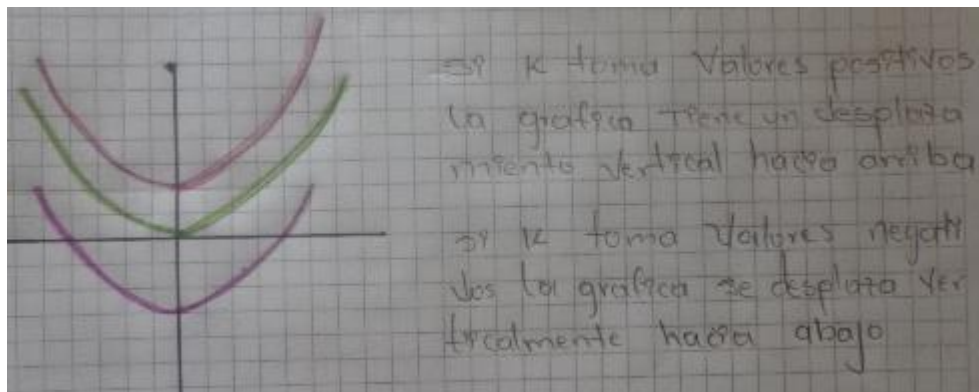
De otra parte, los grupos de estudiantes evidencian la conexión al determinar algunas características de la función $g = (x - h)^2 + k$ de acuerdo con el rango de valores asignados a los parámetros h y k . Es decir, los estudiantes, establecieron

una expresión algebraica equivalente a la función cuadrática inicial, una vez representada en el plano cartesiano por medio del ambiente gráfico, lograron identificar algunas características de la expresión algebraica y su representación gráfica. Teniendo en cuenta los literales a y b de la pregunta 1 en la tarea 4, los aprendices escribieron las siguientes observaciones:



Si h toma valores positivos la gráfica se desplaza hacia la derecha.

Si h toma valores negativos la gráfica se desplaza hacia la izquierda.



Si k toma valores positivos la gráfica tiene un desplazamiento vertical hacia arriba.

Si k toma valores negativos la gráfica tiene un desplazamiento vertical hacia abajo.

Figura 20: descripción punto 1, tarea 4. Grupo 3

De acuerdo con lo anterior, el grupo de estudiantes que en este caso fue la mayoría, identificó la influencia de los parámetros h, k en la función cuadrática de la forma $y = (x - h)^2 + k$, una de esas características que los estudiantes identifican en primera instancia es el desplazamiento horizontal de la gráfica variando el parámetro h , de igual manera el desplazamiento vertical de la gráfica al variar el parámetro k . Cabe mencionar, que estos procesos de codificación y decodificación son más evidentes en los estudiantes cuando tienen la mediación de un ambiente gráfico dinámico como GeoGebra; logrando establecer una comunicación con el estudiante de tipo visual sin la intervención del docente.

Reflexión: los aprendices identificaron el vértice de una parábola de coordenadas (x, y) y la relacionaron con los puntos h, k . De otra parte, se establece que los estudiantes presentaron dificultades al tratar de realizar procesos de razonamiento y argumentación en la formalización de los desplazamientos horizontales y verticales de la función $y = (x - h)^2 + k$, solo se limitaron a determinar que parámetro determinaba el movimiento vertical u horizontal.

Por lo tanto, se vio la necesidad por parte del docente de hacer una intervención y poder clarificar la intencionalidad y los puntos clave de la realización de la tarea. Aludiendo que, la intencionalidad es, que los estudiantes con ayuda del ambiente gráfico establecieran los diferentes movimientos, considerando unas situaciones específicas. Entre ellas se tiene:

Estudiantes:

- Si $h = 0$ entonces $y = (x - 0)^2 + k$ y moviendo el deslizador k el vértice de la función se desplaza de manera vertical.

Estudiantes después de intervención.

Si $h = 0$ entonces $y = (x - 0)^2 + k \rightarrow y = x^2 + k$ al manipular el parámetro k se puede presentar las siguientes posibilidades:

- Si $k > 0$ el vértice de la parábola se desplaza verticalmente hacia arriba
- Si $k = 0$ el vértice se ubica en el origen de un sistema de coordenadas.
- Si $k < 0$ el vértice de la parábola se desplaza verticalmente hacia abajo.

Estudiantes

Si $k = 0$ en la expresión algebraica $y = (x - h)^2 + 0$ y al mover el deslizador k el vértice de la función se desplaza horizontalmente.

Estudiantes después de intervención

Si $k = 0$ en la expresión algebraica $y = (x - h)^2 + k \rightarrow y = (x - h)^2 + 0 \rightarrow$

$y = (x - h)^2$ Al manipular el parámetro h se presentan las siguientes posibilidades:

- Si $h > 0$ el vértice (h, k) se desplaza hacia la derecha.
- Si $h = 0$ el vértice (h, k) se ubica en el origen de un sistema de coordenadas.
- Si $h < 0$ el vértice (h, k) se desplaza hacia la izquierda.

En conclusión, el proceso matemático en el cual los estudiantes presentaron mayor dificultad en la tarea 4, en el nivel de reflexión fue el de la comunicación, se presentó un obstáculo, el no poder utilizar el lenguaje apropiado para dar a conocer sus observaciones dentro del proceso de desarrollo de las tareas.

5 Conclusiones

En esta parte del trabajo de intervención pedagógica, las conclusiones se vislumbrarán desde los objetivos trazados para esta propuesta de trabajo, además, el poder determinar si los mismos fueron suficientes, coherentes y pertinentes, si se presentaron obstáculos de aprendizaje y cuál fue la actitud de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

En relación con el objetivo de: Adaptar una situación de tareas donde se haga evidente los niveles de complejidad creciente (reproducción, conexión, reflexión). De manera puntual, se refiere, al diseño de las tareas, pero, no a unas tareas donde se den unas respuestas y el esfuerzo de los estudiantes sea mínimo. En palabras de García (2013), una tarea comprende un amplio rango de cosas que hacer, entre ellas, ejercicios, construcción de objetos, resolución de problemas, proyectos, entre otros. Por lo tanto, se plantea una serie de tareas matemáticas, que invitan al estudiante a realizar interacciones, manipulaciones y observaciones con el fin de poder comunicar a sus compañeros lo establecido en el desarrollo de las tareas.

Además, para Penalva y LLinares (2011) citado por García (2013), las tareas son consideradas como unas propuestas de acción planteada por los docentes a sus estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, una de las condiciones de las tareas, es que estas deben ser situadas, es decir que relacionen al estudiante con algunos contextos como: la realidad sociocultural, situaciones de la vida real y dentro de la matemática misma. Para este caso, el objeto matemático función cuadrática se ubica dentro de una situación de la misma matemática, como lo es, determinar el área de un cuadrilátero donde los estudiantes mostraron fortalezas y debilidades en la medida que avanzaban en su proceso de aprendizaje.

Hay que mencionar también que, el nivel de menor dificultad que presentaron los estudiantes fue el de reproducción, recordemos que este nivel exige al estudiante procedimientos rutinarios para resolver tareas con las cuales esté familiarizado y realizar operaciones sencillas, los estudiantes realizan procesos conocidos, algorítmicos sin una alta demanda cognitiva. Pero, al mismo tiempo, se hace necesario que los estudiantes realicen este tipo de procesos en la medida que aporten en el desarrollo de las tareas de mayor complejidad.

También hay que mencionar que, en el desarrollo de tareas matemáticas intervienen los procesos afectivos (voluntad, decisión, deseo e inclinación cultural) y procesos de tendencia de acción (persistencia, continuidad, disciplina, trabajo). Conviene subrayar, que la voluntad de los estudiantes se refleja en la participación activa en el desarrollo de las actividades, en la disposición para la organización del material y la presentación de los talleres y en el respeto a la palabra en la socialización al finalizar cada tarea. También hay que decir, que los alumnos mostraron persistencia en el momento que se presentaron alguna dificultad con el manejo del software, en la argumentación de sus observaciones y en la disciplina frente al trabajo propuesto. Es decir, la organización de las tareas matemáticas no solo aporta al conocimiento, también, a la interacción entre sujetos y motiva al trabajo cooperativo.

Con respecto a la implementación de una situación de tareas de complejidad creciente articulado con GeoGebra en el aprendizaje de los parámetros de una función cuadrática. Es decir, que la incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje, son de carácter complementario y además, se debe organizar una planeación coherente y pertinente para saber en qué momento se articula la tecnología con el trabajo en el aula, en este caso, la aplicación de GeoGebra es utilizada como técnica didáctica en la planeación de los trabajos de aula para el desarrollo de los procesos generales de la actividad matemática en los estudiantes.

En conclusión, se convierte en un reto interesante desde el punto de vista de articular la tecnología a la enseñanza de la matemática, de entrada, a los estudiantes les causa dudas, incertidumbre, pero al mismo tiempo expectativo de cuál será el desarrollo de la clase y qué es lo que se quiere conseguir. Hay que mencionar que, el impacto en los estudiantes fue positivo desde una percepción de la innovación, recordando que los estudiantes de la I.E.L en su clase de matemáticas no habían interactuado con la tecnología en ninguno de los años anteriores. Se debe agregar que, las nuevas tecnologías se han presentado de forma revolucionaria e innovadora y que inevitablemente toca y afecta a la sociedad en conjunto (Ferrer, 2007). Las posibilidades que ofrecen los recursos tecnológicos hacen evidente dos de sus características esenciales, la visualización y la interactividad. Es decir, los estudiantes interactúan con el medio en tiempo real, colocándolo a disposición de sus intereses, enfrentando así situaciones o ambientes de aprendizaje donde se representa gráficamente una situación particular. De otra parte, la visualización en matemáticas constituye un aspecto importante, la imagen como medio de comunicación puede transmitir ideas, conceptos, abstracciones, fórmulas leyes, entre otras (Ferrer, 2007).

En este caso, los estudiantes interactuaron con el medio, el cual les permitió construir, modelar y realizar comparaciones que resultan de gran dificultad sin un ambiente gráfico, la variación de las constantes o parámetros permitió a los alumnos visualizar características y propiedades de la representación gráfica del objeto matemático función cuadrática. Es decir, los recursos tecnológicos permiten la creación de ambientes de aprendizaje en el que los estudiantes pueden producir el conocimiento matemático de forma alternativa, donde se resalten conceptos no tan explícitos como en el modelo tradicional presentado de forma expositiva.

Por otro lado, Determinar el impacto de la implementación de una situación de tareas de complejidad creciente articulado con GeoGebra, a través de la observación, entrevistas y resultados. La disposición de los estudiantes es asertiva frente al trabajo, en primer lugar, en el momento de explicarles lo conceptos básicos

del programa y después de realizar algunas construcciones, los estudiantes no logran encontrar un sentido lógico del porqué se trabaja en un ambiente gráfico. Después al proponer la situación de tareas de complejidad creciente, los estudiantes comprendieron la utilidad del programa y cómo se convertía en parte fundamental para poder establecer las relaciones de los parámetros de una función cuadrática con el comportamiento de la función en un sistema de coordenadas

Desde esta perspectiva, el objeto matemático que sirvió de estudio para esta propuesta fue el de función cuadrática enfocada al estudio de sus parámetros. Teniendo en cuenta que, la temática abordada es compleja. Durante el desarrollo de la intervención pedagógica, por medio de la observación participante se logró establecer fortalezas y debilidades que deben ser tenidos en cuenta en la elaboración de futuros procesos pedagógicos.

Así, por ejemplo, dentro de las debilidades que se detectaron en el desarrollo de la propuesta pedagógica se tiene: en primer lugar, la dificultad de los estudiantes en realizar tratamiento. Es decir, teniendo como referente la teoría sobre registros de representación semiótica de Duval (1996) citado por Guzmán (1998), el tratamiento de una representación es la transformación de la representación en el registro mismo donde ha sido formada. Es decir, en la función $y = ax^2 + bx + c$ que pertenece a un sistema algebraico debía ser transformada a la forma $y = a(x - h)^2 + k$ dentro del mismo sistema algebraico. Solo algunos estudiantes lograron realizar ese tratamiento de forma correcta y coherente, basándose en operaciones algebraicas, técnicas de factorización y operaciones aritméticas.

Hay que mencionar, además, que la comunicación de las observaciones de cada grupo de estudiantes durante el desarrollo de la propuesta pedagógica no presentó mayor dificultad cuando se socializó utilizando un lenguaje natural, pero, en el momento de realizar la conversión de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico o algebraico se presentaron dificultades, lo cual quiere decir que los estudiantes no interpretan el lenguaje algebraico de forma fluida en la comunicación

del conocimiento. De igual manera, en el marco de los parámetros de una función cuadrática el que más causó confusión fue parámetro b , ya que la variación de este parámetro causaba un comportamiento compuesto de dos movimientos al tiempo.

De igual manera, la práctica de aula se ve afectada en relación con la planeación de las clases. Es decir, el docente se ve casi que obligado a reestructurar su proceso de planeación y organización de las clases teniendo en cuenta que debe proponer espacios donde el estudiante sea partícipe de su proceso de aprendizaje y con la mediación tecnológica pueda reconstruir o construir su saber. Por lo tanto, la pertinencia de la utilización de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje lo convierte en un reto de transformación de la práctica de aula, se debe saber en qué momento y cuál es el objetivo que debe cumplir para no convertirse en una de las tantas herramientas utilizables, pero, sin mayor influencia en el aprendizaje. Así mismo, el maestro aporta su conocimiento disciplinar en función de los objetivos establecidos para el desarrollo de habilidades, procesos y competencias matemáticas en los estudiantes para afrontar las demandas actuales de la sociedad.

Por otra parte, una fortaleza durante el proceso de desarrollo de la propuesta pedagógica, fue la conversión entre dos sistemas de representación. En términos de Duval (1996) citado por Guzmán (1998) , la conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro sistema conservando la totalidad de la representación inicial. Es decir, los estudiantes tabulan la función $y = x^2$ perteneciente a un sistema algebraico y lo representan en un sistema numérico por medio de una tabla de valores y con la utilización de un sistema de coordenadas lo representan gráficamente. De otro lado, el concepto de los parámetros de la función cuadrática y la intervención de la tecnología fueron un aporte valioso para la consecución del objetivo general.

Bibliografía

- Alderete, M. V., & Formychella, M. M. (2016). Efecto de las TIC En El Rendimiento Educativo. *CEPAL*, 89-107.
- Barrio, I. d., González, J. J., Padín, L. M., Peral, P. S., Sánchez, I. M., & Tarín, E. L. (2010). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: UAM.
- Basurto, E. (2013). *Uso de Tecnología Digital en la Comprensión de Parámetros en Funciones Polinomiales*. Santo Domingo .
- Cabero, J., Roy-Vila, R., & Memgual-Andres, S. (2017). Conocimientos tecnológicos, pedagógicos y disciplinares de los futuros docentes según el modelo TPACK. *Digital EDUACTION* , 73-84.
- Carranza Rodriguez, M. A. (2011). Exploración del Impacto Producido por la Integración del Ambiente de Geomtría Dinámica (AGD) en la Enseñanza de los Cursos de Matemática Básica (Tesis de Posgrado). Universidad Nacional. Palmira, Valle del Cauca, Colombia.
- Ceballos H, F. A. (2009). Informe de Investigación con Estudio de Casos. *Magis*, 413-423.
- Cotic., N. S. (2014). Geogebra Como Puente Para Aprender Matemáticas. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.
- Díaz - Barriga, A. (2013). Guia Para La Elaboración de una Secuencia Didáctica. México.
- Diaz, F., & Barriga, A. (2002). *Técnicas e Instrumentos de Evaluación* . México: McGraw Hill.
- Durkheim, É. (1999). *Educación y Sociología* . Barcelona: Altaya S.A. .
- Fedesarrollo. (2016). *Construcción de Metodologías Comparativas e Indicadores para Medir el Uso de las TIC y sus Impactos*.
- Ferrer, M. D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Fidas, G. A. (2012). *El Poryecto a la Investigación - Introducción a la Metodología Científica* . Caracas: Episteme .

- Figuroa Vera, R. E. (9 de Septiembre de 2013). Resolución de Problemas con Sistemas de Ecuaciones, (Tesis de Posgrado) Universidad Católica. Lima. Peru.
- García, B. a. (2013). *Competencias Matemáticas y Actividad Matemática de Aprendizaje*. Florencia: Universidad de Amazonia.
- García, B., Coronado, A., & Giraldo, A. (2015). *Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas*. Florencia: Universidad de Amazonia.
- Gobernación de Antioquia . (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín : Artes y Letras Ltda.
- Guzman, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 5-21.
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5-22.
- Insuasty, O. E. (2014). Cambios Producidos en el Aprendizaje de las Familias de Funciones Cuadráticas en Estudiantes de Grado Noveno A Través de Situaciones Didácticas Utilizando Geogebra (Tesis de Posgrado). Universidad Icesi . Cali, Valle del Cauca, Colombia.
- Macias, F. D. (2007). Las Nuevas Tecnologías y el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 4-20.
- Medina, R. A., & Salvador, F. M. (2009). *Didáctica General (Segunda Edición)* . Madrid: Pearson Educación .
- MEN . (2016). *Resumen Ejecutivo de Colombia en Pisa*. Bogotá.
- MEN - ICFES . (Abril de 2017). Guía Orientación Saber 11. Bogotá , Colombia .
- MEN. (2015). *Aterrizando los Resultados al Aula*. Bogotá.
- MEN. (2016). *Aterrizando Los Resultados al Aula*. Bogotá .
- Mesa, Y. M., & Villa Ochoa, J. A. (2007). *Elementos Históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática*. Medellín .

- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Innovación Educativa en Colombia*. Bogotá : Universidad Nacional .
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares* . Bogotá.
- Novembre, A., Nicodemo, M., & Coll, P. (2015). *Matemática y TIC*. Buenos Aires.
- Palacios, G. J. (1984). *La Cuestión Escolar - Críticas y alternativas*. Barcelona: LAIA.
- Pizzorno, R., & Miranda, M. (2016). *Juego de los Parámetros*. Santiago de Chile.
- Porlán, R. (2002). Cosntructivismo y Escuela. En R. Porlán, *Cosntructivismo y Escuela* (págs. 144-160). Díada Editorial S.L.
- Rodriguez, D. G., & Valdeoriola, J. R. (2011). *Metodología de la Investigación* . Barcelona: UOC.
- Sampieri, R. H., Fernandez, C. C., & Baptista, M. d. (2010). *Metodologia de la Investigación (Quinta Edición)* . Ciudad de México: McGrawHill.
- Sastre V, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). Concepto de Función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 141 - 155.
- Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la Investigación Caulitativa. Técnicas y Procedimientos Para Desarrollar Teoría Fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia .
- Tobón, S., Pimiento, J., & Garcia, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias*. Ciudad de México: Pearson Education.
- Vargas N, M. E. (2011). Concepto de Función. *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenomenos fisicos, que conducen a un modelo caudrático, una propuesta para trabajar en grado noveno*. Bogotá , Cundinamarca, Colombia .
- Varon, C., Hernandez, S., & Posada, F. (2010). *Parametros Algebraicos en el Contexto de la Modelación Matemática*. Medellín .
- Zabala, V. A. (2000). *La Practica Educativa: Como Enseñar*. Barcelona: Grao.

ANEXOS

ANEXO A Horario de Actividades

Grupo	Fecha	Horario	Actividad
10-4	Febrero 12	7:25 – 8:20	Socialización del plan de trabajo
	Febrero 14	6.30 – 8:20	Inducción a GeoGebra
	Febrero 19	7:25 – 8:20	Taller actividades previas
	Febrero 21	6.30 – 8:20	Inducción GeoGebra
	Febrero 26	7:25 – 8:20	Introducción función cuadrática Plan de aula
	Febrero 28	6.30 – 8:20	Aplicación tarea 1
	Marzo 5	7:25 – 8:20	Socialización tarea 1
	Marzo 7	6.30 – 8:20	Aplicación tarea 2
	Marzo 12	7:25 – 8:20	Socialización tarea 2
	Marzo 14	6.30 – 8:20	Aplicación tarea 3 y 4
	Marzo 21	7:25 – 8:20	Socialización tarea 3 y 4
	Marzo 26	6.30 – 8:20	Revisión de informes.

ANEXO B Trabajo Diagnóstico

Actividades previas

Evidencias de aprendizaje:

- Resuelve ecuaciones de primer grado con una variable.
- Factoriza expresiones algebraicas.
- Tabula y representa en el plano cartesiano funciones lineales y afines.
- Interpreta graficas de funciones lineales o cuadráticas en situaciones de la vida real.

Recordemos algunos temas para adentrarnos al contenido de función cuadrática:

1. Resolver las siguientes ecuaciones

a. $4x = 60$ b. $5x - 15 = 65$ c. $\frac{3x-7}{9} = 21$

2. Factorizar los trinomios

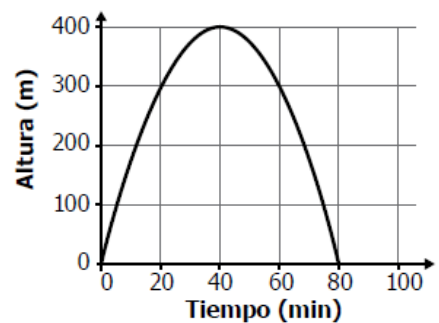
a. $x^2 + 4x + 4$ b. $6x^2 - 11x - 10$ c. $x^2 + 9x + 20$

3. Tabular y graficar la siguiente función $y = 2x - 1$

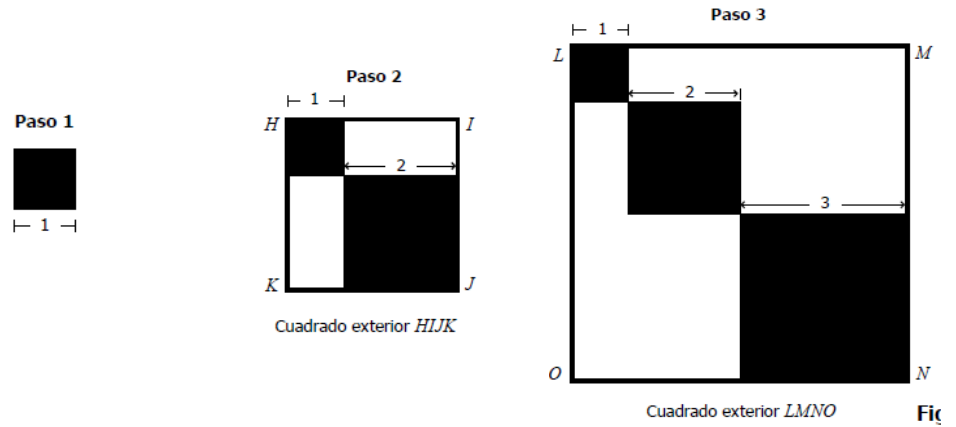
- Determinar la variable independiente y la variable dependiente.
- ¿Cuál es el grado de la función y qué nombre recibe su gráfica?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

4. La gráfica muestra la altura de un globo respecto al tiempo de elevación.

- ¿Cuáles son las variables que se relacionan en la gráfica?
- ¿En qué intervalo de tiempo el globo asciende?
¿Qué intervalo de tiempo el globo desciende?
- ¿En qué instante el globo alcanza la mayor altura?
- ¿Duración del recorrido del globo?
- ¿La grafica que representa el movimiento del globo es lineal? (consultar)

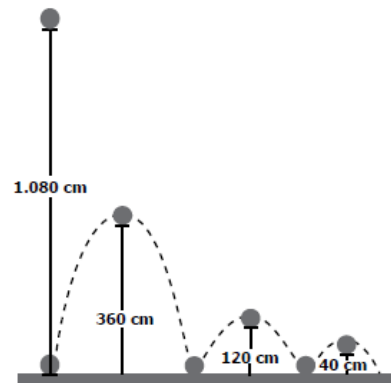


5. La figura muestra los pasos de la construcción de cuadrados. Si continúa la secuencia



- ¿Cuánto mide el lado del cuadrado exterior en el paso 4?
- ¿En la construcción de los cuadrados se puede determinar un patrón entre un paso y otro?
- Calcular las áreas de los cuadrados construidos y representarlos en una tabla de valores con su respectiva gráfica.

6. Una pelota se deja caer desde una altura de 1.080 cm. ¿Cuál es la razón de la altura en cada uno de los rebotes? (registrar los datos en una tabla)



ANEXO C Diseño de Tarea

Tarea 1

Aproximación al concepto de Función Cuadrática.

Evidencias de Aprendizaje

- Relaciona los registros de la tabla resultante y determina la correlación entre magnitudes.

1. Dibuja un cuadrado en cada caso, teniendo en cuenta la longitud del lado.

$$l_1 = 1 \text{ cm}; \quad l_2 = 2 \text{ cm}; \quad l_3 = 3 \text{ cm}; \quad l_4 = 4 \text{ cm}; \quad l_5 = 5 \text{ cm}$$

- Determinar el área de cada cuadrado.
- Relacionar los datos en la siguiente tabla.
- ¿Cuáles son las variables? ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cuál es la variable independiente?
- En el plano cartesiano ubicar los puntos y trazar la línea que representa la relación anterior. Describe la gráfica que resulta. ¿es una función?
- Si la relación anterior es una función, escríbala en términos de función del lado.
- ¿Qué expresión representa el área de un cuadrado de lado x ?

Longitud lado	Área del Cuadrado

Consideremos ahora la expresión que representa el área de un cuadrado en el conjunto de los números racionales, completa la tabla y realiza la gráfica correspondiente. Escriba sus conclusiones.

Lado de un cuadrado	x	0,5		1,2				2,5	
Área									

Tarea 2

Evidencias de Aprendizaje

- Establece relaciones entre el coeficiente del término cuadrático y el sentido de abertura de la gráfica de la función.

Variación del Parámetro a

¿Qué expresión representa el área de un cuadrado de lado x ? representa gráficamente.

1. Considerando la función “cuadrado”. Utilizar GeoGebra para graficar las siguientes funciones.
 - a. $y = x^2$
 - b. $y = -x^2$
2. ¿Cuál es el coeficiente del término cuadrático?
3. Escribe los comportamientos de las funciones y comenta con tus compañeros. ¿Cuáles son las conclusiones?
4. Representar en el ambiente gráfico la función $y = ax^2$
 - a. Escoge tres valores positivos del parámetro a , ordénelos de forma ascendente y escriba lo que observa.
 - b. Escoge tres valores negativos del parámetro a , ordénelos de forma ascendente y escriba lo observado.
 - c. ¿Qué sucede cuando variamos el parámetro a en la ecuación $y = ax^2$?
 - d. Tomando como referencia la función $y = ax^2$; seleccionar el ícono de extremos de la barra de herramientas para localizar el vértice de la parábola. ¿Cómo se puede relacionar el parámetro a con el punto que representa el vértice en una parábola?
 - e. Socializar las conclusiones en el salón de clases.

Tarea 3

Cambio y Observo

Evidencia de Aprendizaje

- Establece características de la función cuadrática a partir de diferentes tipos de representaciones: Gráfico, tabular, algebraico.
- Utiliza GeoGebra para graficar y visualizar el comportamiento de la función cuadrática.

Actividad 1

1. Si a uno de los cuadrados de lado x se le agrega 2 unidades en uno de su par de lados paralelos. ¿Cuál es la nueva figura resultante? ¿Cuál es la expresión que representa el área de esa nueva figura? ¿Cuáles son los coeficientes del término al cuadrado x^2 y el término lineal x ?
2. Represente la expresión algebraica del punto anterior en la aplicación de GeoGebra y compárela con la función $y = ax^2$.
3. Grafica en Geogebra la función $y = ax^2 + bx$ y con el parámetro a constante, cambie los valores del parámetro b y escriba lo que observa.
4. Escriba las conclusiones y realiza la socialización en clase.

Actividad 2

1. Si tenemos un cuadrado de lado x y se le agrega 2 unidades a la base y 3 unidades a la altura. Represente la nueva figura. ¿Cuál es la expresión que representa el área de la figura? ¿Cuáles son los coeficientes de cada uno de los términos? (término cuadrático, lineal y el término independiente).
2. Represente la expresión algebraica del punto 1 en la aplicación de GeoGebra y compárela con la función $y = ax^2$.
3. Graficar la función $y = ax^2 + bx + c$ y con los parámetros a y b constantes, cambie los valores de c y escriba el comportamiento de la gráfica.
4. Socialice con sus compañeros y escriba las conclusiones.

Tarea 4

Expresiones equivalentes

Teniendo en cuenta la expresión de la actividad 2 de la forma $ax^2 + bx + c$ se propone los siguientes puntos:

- Transformar la expresión algebraica en una equivalente utilizando la factorización para completar el cuadrado.
- Analizar las constantes que aparecen en la nueva expresión equivalente.

Dada la expresión $y = (x - h)^2 + k$ y el valor del parámetro como $a = 1$ realizar:

1. Variar el valor del parámetro h y el parámetro k
 - a. ¿Qué sucede si $h = 0$? ¿Qué expresión algebraica resulta?
 - b. Si $k = 0$ ¿Qué expresión algebraica resulta?
 - c. ¿Cuál es la relación entre los valores de h y k , y el vértice de la parábola?
 - d. ¿Qué relación existe entre los parámetros h, k y los puntos de corte de la gráfica con el eje x ?
 - e. ¿Qué relación existe entre el eje de simetría de la parábola y los valores de h y k ?
 - f. Comentar con sus compañeros de grupo y escriba las conclusiones de la actividad.

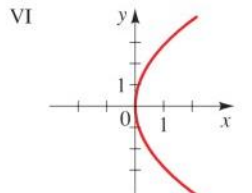
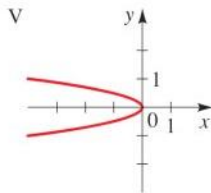
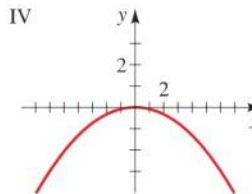
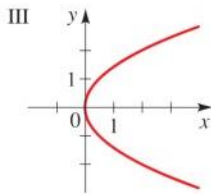
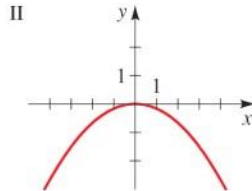
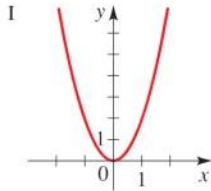
Conclusiones y Precisiones

Realizar un mapa mental en el cual se consigne las características de la función cuadrática.

10.1 Ejercicios

1–6 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I–VI. Dé razones para sus respuestas.

1. $y^2 = 2x$ 2. $y^2 = -\frac{1}{4}x$ 3. $x^2 = -6y$
 4. $2x^2 = y$ 5. $y^2 - 8x = 0$ 6. $12y + x^2 = 0$



7–18 ■ Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola, y bosqueje su gráfica.

7. $y^2 = 4x$ 8. $x^2 = y$
 9. $x^2 = 9y$ 10. $y^2 = 3x$
 11. $y = 5x^2$ 12. $y = -2x^2$
 13. $x = -8y^2$ 14. $x = \frac{1}{2}y^2$
 15. $x^2 + 6y = 0$ 16. $x - 7y^2 = 0$
 17. $5x + 3y^2 = 0$ 18. $8x^2 + 12y = 0$

19–24 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar la parábola.

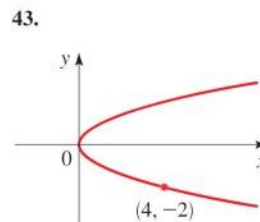
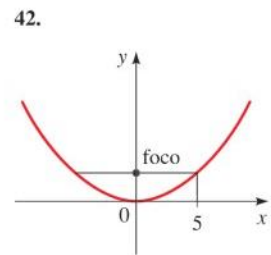
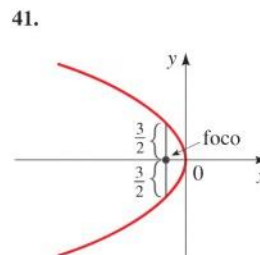
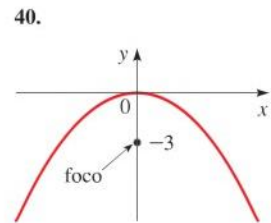
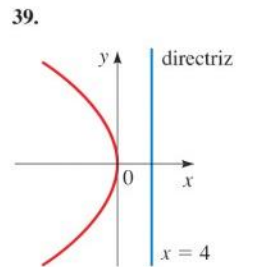
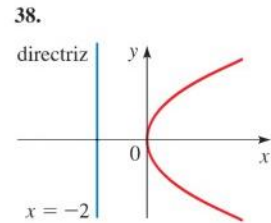
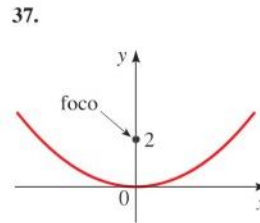
19. $x^2 = 16y$ 20. $x^2 = -8y$
 21. $y^2 = -\frac{1}{3}x$ 22. $8y^2 = x$
 23. $4x + y^2 = 0$ 24. $x - 2y^2 = 0$

25–36 ■ Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface la condición dada o condiciones.

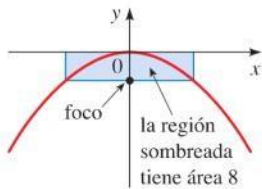
25. Foco $F(0, 2)$ 26. Foco $F(0, -\frac{1}{2})$

27. Foco $F(-8, 0)$ 28. Foco $F(5, 0)$
 29. Directriz $x = 2$ 30. Directriz $y = 6$
 31. Directriz $y = -10$ 32. Directriz $x = -\frac{1}{3}$
 33. El foco está en el eje x positivo a 2 unidades de la directriz
 34. La directriz tiene ordenada 6
 35. Abre hacia arriba con foco a 5 unidades del vértice
 36. El diámetro focal es 8 y el foco está sobre el eje y negativo

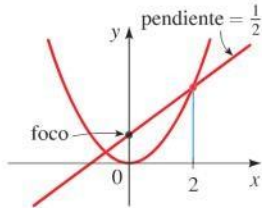
37–46 ■ Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.



45.



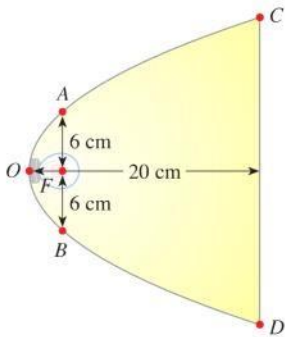
46.



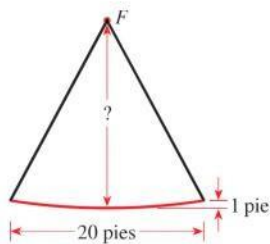
47. a) Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen y con directrices $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$ y $y = 8$.
 b) Dibuje las gráficas. ¿Qué concluye?
48. a) Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen, foco en el eje y positivo y con diámetros focales 1, 2, 4 y 8.
 b) Dibuje las gráficas. ¿Qué concluye?

Aplicaciones

49. **Reflector parabólico** En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla se coloca en el foco y el diámetro focal es 12 cm.
- a) Encuentre una ecuación de la parábola.
 b) Encuentre el diámetro $d(C, D)$ de la abertura a 20 cm del vértice.



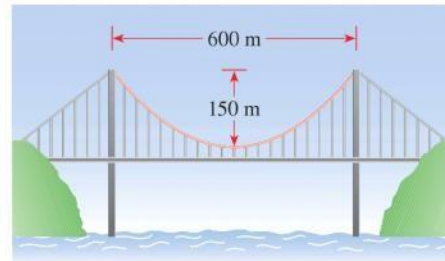
50. **Plato de satélite** Un reflector para un plato de satélite es una sección transversal parabólica, con el receptor en el foco F . El reflector tiene un pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (véase la figura). ¿Qué tan lejos está el receptor del vértice del reflector parabólico?



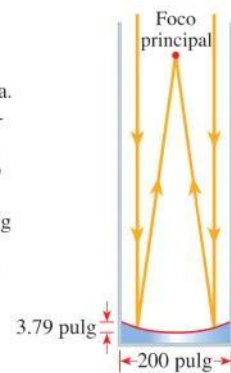
51. **Puente suspendido** En un puente suspendido la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente mostrado en la figura tiene torres que están apartadas 600 m, y el punto

más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la parte superior de las torres. Encuentre la ecuación de la parte parabólica de los cables, con el origen del sistema de coordenadas en el vértice.

NOTA Esta ecuación se emplea para hallar la longitud del cable necesaria en la construcción del puente.

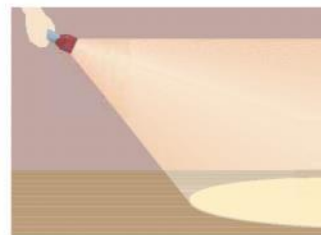


52. **Telescopio reflector** El telescopio Hale en el observatorio de Monte Palomar tiene un espejo de 200 pulgadas, como se muestra. El espejo se construye en una forma parabólica que colecta luz de las estrellas y la enfoca en el **foco principal**, es decir, el foco de la parábola. El espejo mide 3.79 pulg de profundidad en su centro. Encuentre la **longitud focal** de este espejo parabólico, es decir, la distancia del vértice al foco.



Descubrimiento • Debate

53. **Parábolas en el mundo real** En el texto se dan varios ejemplos de los usos de las parábolas. Encuentre otras situaciones de la vida real donde ocurren parábolas. Consulte una enciclopedia científica en su biblioteca o investigue en la Internet.
54. **Cono de luz de una linterna** Se sostiene una linterna para formar un área iluminada sobre el suelo, como se muestra en la figura. ¿Es posible orientar la linterna de manera que el límite del área sombreada sea una parábola? Explique su respuesta.



ANEXO E Instrumento de Validación

Un instrumento de medida, es una técnica o conjunto de técnicas que permite una asignación numérica que cuantifique las manifestaciones de un constructo, que es medible solo de manera indirecta (Herrera, 1998). Por lo tanto, constituye una visión del mundo compartida por una comunidad y por ende posee un carácter socializador. Además, la teoría también orienta de cómo los datos serán recolectados, organizados, analizados y presentados. En ese orden de ideas, en la elaboración de instrumentos de medición hay que tener en cuenta, la claridad de los conceptos sobre el constructo teórico. Según Gras (1980), un constructo es la representación sobre algún aspecto sobre el objeto que será observado, medido y relacionado con otros constructos.

Desde el punto de vista empírico, el enfoque está en las respuestas observables, ya sea a través de un cuestionario autoadministrado, observación directa o las respuestas obtenidas a través de una entrevista. La medición se enfoca en la relación entre los indicadores que son las respuestas observadas y los conceptos observables. Si la relación entre los indicadores empíricos y los conceptos no observables (teoría) es fuerte, se establece una inferencia entre estos. En cambio, si la relación entre el análisis de los indicadores y los conceptos no observables es débil, significa que el modelo de medición es inadecuado y falta entendimiento y comprensión del fenómeno estudiado.

Así mismo, las principales propiedades de una medición son: la confiabilidad y la validez (Carminez y Zeller, 1987). De acuerdo con Baibe (2000), la confiabilidad se refiere a que un objeto de estudio medido repetidamente con el mismo instrumento siempre dará los mismos resultados, sin embargo, la confiabilidad no garantiza exactitud. De otra parte, la validez de un instrumento, la definición tradicional se refiere a la tautología, es válida, si decide medir lo que quiere medir.

Por lo tanto, para Mesick (1989 – 1996), la validez se entiende como un concepto unificado del cómo y para qué los resultados del Test sean utilizados, fue adoptada por las organizaciones internacionales. Es decir, recolectar evidencia de diferentes tipos con base en el uso y objetivos y su valor predictivo. Además, la validez no es una propiedad intrínseca de los instrumentos, si no que depende del objetivo de la medición, la población y el contexto de aplicación, lo que un instrumento puede ser válido para un grupo en particular para otros, no.

De otra parte, la unidimensionalidad se refiere a que la medición del instrumento se centrará en un atributo o característica. Los constructos educativos deben ser unidimensionales, condición que debe cumplir para proceder con la validación psicométrica.

CUESTIONARIO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN DE LA PROPUESTA DE TRABAJO EN UNA SITUACIÓN DE TAREAS DE COMPLEJIDAD CRECIENTE CON LA ARTICULACIÓN DE UN AMBIENTE GRÁFICO DINÁMICO.

El siguiente cuestionario hace parte de una estrategia en la recolección de los datos en un trabajo de investigación que, tiene como objetivo describir el proceso de aprendizaje de los estudiantes en una propuesta de clase, pensada para los aprendices adaptando tareas matemáticas de complejidad creciente articulado con la tecnología. De otra parte, su colaboración contribuye a un mejor conocimiento de lo que sucede en realidad dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, además, la herramienta de evaluación pretende identificar las fortalezas y las debilidades de la propuesta de trabajo sobre el estudio y así mismo, realizar una reestructuración de la misma.

En lo relacionado con la escala de valoración, se propone tres niveles: bajo, medio y alto, en ese orden, la puntuación asignada a la respuesta bajo será de 1, medio 3 y alto 5.

Nivel Bajo:

- No se puede establecer criterios de valoración.
- No existe una coherencia y pertinencia en las actividades propuestas
- No es necesario el ambiente gráfico dinámico en el desarrollo de las actividades.
- La propuesta no determina los roles del maestro y el estudiante.

Nivel Medio:

- Existen unos criterios de valoración básicos.
- Existe una coherencia, mas no, una pertinencia en las actividades propuestas.
- Existe pertinencia, mas no, coherencia en las actividades propuestas.
- Se hace necesario un ambiente gráfico dinámico en desarrollo de las propuestas
- Se establecen los roles de maestro y estudiantes, pero no es suficiente en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Nivel alto:

- Los criterios son claros y aportan a la consecución de los objetivos.
- Existe una coherencia y una pertinencia en las actividades propuestas.
- La utilización del ambiente gráfico dinámico es de gran impacto en el estudio del objeto matemático.
- Los roles de maestro y estudiante son claros y se asumen dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Objetivo General

Establecer el impacto de la adaptación de una situación de tareas de complejidad creciente articulada con ambiente gráfico dinámico (GeoGebra) en el aprendizaje de los parámetros de una función cuadrática en los estudiantes del grado 10-4 de I.E.L.

Objetivos Específicos

- Adaptar una situación de tareas donde se haga evidente los niveles de complejidad creciente.
- Implementar una situación de tareas de complejidad creciente articulado con un ambiente gráfico dinámico (GeoGebra) en el aprendizaje de los parámetros de una función cuadrática.
- Analizar e Interpretar las observaciones realizadas en el desarrollo de las tareas de complejidad creciente articulado con GeoGebra.

Tareas Matemáticas

A través de los siguientes ítems y los indicadores asociados se busca determinar si una situación de tareas de complejidad creciente impacta el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Tareas Matemáticas	Niveles		
	Bajo	Medio	Alto
1. La situación de tareas matemáticas propone una participación activa del estudiante.			
2. La situación de tareas matemáticas está orientada hacia el objeto de estudio.			
3. En la tarea matemática se evidencia los niveles de complejidad creciente.			
4. La tarea matemática aporta al desarrollo de las competencias en los estudiantes			
5. La tarea matemática aporta al desarrollo de procesos (codificar, decodificar, tabular, razonar, argumentar)			
6. La tarea matemática de complejidad creciente cambia la perspectiva del docente.			
7. El diseño de la tarea es coherente con el estudio del objeto matemático.			
8. El diseño de las tareas promueve el trabajo cooperativo			
Total			

Ambiente Gráfico Dinámico

Este campo, evalúa la influencia y el impacto de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Ambiente Gráfico Dinámico	Niveles		
	Bajo	Medio	Alto
1. La implementación de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje contribuye a alcanzar los objetivos propuestos.			
2. Es conveniente que los estudiantes creen los ambientes virtuales para el desarrollo de las tareas.			
3. Con la implementación de GeoGebra en las tareas matemáticas, los estudiantes desarrollan habilidades en la creatividad y la innovación.			
4. Considera que los estudiantes tienen una motivación extra con la utilización de la tecnología en la clase de matemática.			

Práctica de Aula

Para este caso, se trata de visualizar si la práctica de aula tiene características propositivas frente al trabajo del estudiante en su proceso de aprendizaje.

Práctica de Aula	Niveles			
	Bajo	Medio	Alto	
1. La metodología de la propuesta de aula aporta en el desarrollo de las habilidades, procesos y/o competencias propuestas en el plan de aula.				
2. La práctica de aula tiene en cuenta los elementos o herramientas que hacen parte de la propuesta pedagógica				
3. El nivel de la propuesta de trabajo tiene una perspectiva de innovación pedagógica.				
4. La propuesta pedagógica tiene como base los referentes curriculares (Lineamientos, Estándares, DBA) del área.				
5. La práctica de aula determina los roles del docente y el estudiante.				

Opinión de aplicabilidad

Aplicable ()

Aplicable después de corregir ()

No aplicable ()

Nombre y Apellido del juez evaluador

Especialidad del evaluador

Identificación del evaluador

Observaciones Generales:

ANEXO F Encuesta de Satisfacción

Encuesta de Satisfacción

Con el objetivo de mejorar en la organización y planeación de las clases de matemáticas, es muy importante conocer su opinión acerca del desarrollo de la propuesta de trabajo enfocada en las tareas matemáticas de complejidad creciente articulado con Geogebra. Por lo tanto, lo invitamos a que tome unos minutos de su tiempo para responder nuestra encuesta de satisfacción.

Indicador	Muy de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo
1. Considera la propuesta de la tarea matemática como innovadora			
2. La mediación de Geogebra es útil para comprender los parámetros de una función cuadrática.			
3. El trabajo cooperativo es de vital importancia en el en el desarrollo de la tarea matemática.			
4. A través de la tarea matemática y el trabajo en equipo se aumenta la participación de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.			
5. La planeación de la clase y la utilización de herramientas tecnológicas (computadores) motiva el interés en los estudiantes.			
6. Consideras que al realizar la tarea matemática se desarrollan habilidades matemáticas (comunicar, codificar y decodificar) en los estudiantes.			
7. La motivación en el desarrollo de las tareas genera persistencia ante los obstáculos presentados.			

8. Consideras la organización de la clase adecuada para alcanzar las metas propuestas.			
--	--	--	--

Gracias por la atención prestada.