Orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros

Gustavo Adolfo Cardona Muñoz

Universidad ICESI

Escuela de Ciencias de la Educación

Maestría en Educación

2018

Orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros

Tesis de Maestría

Gustavo Adolfo Cardona Muñoz

Directora:

Gloria Milena Londoño Sepúlveda

Universidad ICESI

Escuela de Ciencias de la Educación

Maestría en Educación

2018

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación a mis padres, Reinel Cardona y Pilar Muñoz, por su amor, ejemplo, orientación y apoyo en cada proyecto y momento de mi vida; a mis hermanos, Robert Cardona y Valentina Cardona, por su amor y complicidad; a mi suegra, María del Socorro Gallego, por su apoyo desinteresado; y a mi esposa, Angelica Findlay, por su amor, comprensión y apoyo durante cada instante compartido. Más que la conquista de un logro personal, la culminación de este proyecto de formación representa el triunfo de mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar el más sincero agradecimiento a todas las personas que de forma directa o indirecta contribuyeron a la realización de este trabajo y a la culminación de este proceso de formación académica.

A mi directora Gloria Milena Londoño Sepúlveda por su amabilidad y sus oportunas correcciones y sugerencias durante la realización de este trabajo.

A la profesora Mariana Alejandra Arévalo Lozano, por sus desinteresadas sugerencias durante el desarrollo de este trabajo.

A la Universidad ICESI, por los ambientes y docentes idóneos que dispuso para una formación académica integral con altos estándares de calidad.

A la Institución Educativa Ateneo y en su representación a la Hermana María Dolly Mora Roa, por la confianza y el apoyo manifestado durante este proceso de formación académica.

Finalmente, un agradecimiento especial a mi familia, por la confianza, la comprensión y el apoyo demostrado durante este proceso de formación académica.

CONTENIDO

I. ÍNDICE DE FIGURAS

II. ÍNDICE DE TABLAS

III. RESUMEN

En esta investigación se establecen orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros. A partir de diversas posturas teóricas sobre el aprendizaje, la visualización, el razonamiento, las representaciones semióticas y las situaciones didácticas se elaboran dos tipos de guías de trabajo para los estudiantes que constituyen los instrumentos de recolección de datos de la investigación, uno que hace uso exclusivo del lápiz y el papel y otro que integra un software de geometría dinámica (SGD). Para el análisis e interpretación de datos se utiliza un enfoque metodológico de carácter mixto que conjuga aspectos de los métodos de análisis cuantitativo y cualitativo. No obstante, el análisis cualitativo tiene preponderancia sobre el cuantitativo, por tal motivo los datos cuantitativos se analizan con base en categorías cualitativas procedentes de la teoría. La investigación permite concluir que la escasez de representaciones semióticas espaciales conlleva: i) la persistencia de representaciones bidimensionales para percibir y nombrar correctamente objetos espaciales y ii) la dificultad para realizar cambios entre los registros de representación tridimensional y bidimensional. Sin embargo, también demuestra que a través de la mediación de un SGD es posible incrementar el número de representaciones espaciales de los estudiantes.

Palabras clave: visualización espacial, habilidades de visualización espacial, representaciones semióticas, representaciones mentales, registros de representación semiótica, obstáculos epistemológicos, situaciones didácticas, poliedros.

IV. ABSTRACT

In this research are established didactic orientations for the development of spatial visualization through didactic situations focused on the change between the three-dimensional and two-dimensional representation registers around the polyhedrons. Based on various theoretical positions on learning, visualization, reasoning, semiotic representations and didactic situations, two types of work guides are prepared for the students that constitute the data collection instruments of the research, one that makes use of exclusive pencil and paper and another that integrates an dynamic geometry software. For the analysis and interpretation of data is used a methodological approach of a mixed character that combines aspects of the methods of analysis quantitative and qualitative. However, the qualitative analysis has a preponderance over the quantitative one, for this reason the quantitative data are analyzed based on qualitative categories from the theory. The investigation allows to conclude that the scarcity of spatial semiotic representations entails: i) the persistence of two-dimensional representations to correctly perceive and name spatial objects and ii) the difficulty to make changes between the registers of three-dimensional and two-dimensional representation. However, it also shows that through the mediation of an SGD it is possible to increase the number of spatial representations of students.

Key words: spatial visualization, spatial visualization abilities, semiotic representations, mental representations, semiotic representation registers, epistemological obstacles, didactic situations, polyhedrons.

V. INTRODUCCIÓN

En el contexto escolar existe una frecuente inclinación a privilegiar la enseñanza de la geometría plana sobre la geometría espacial (Villani, 2001; MEN, 1998). En este sentido, Lappan y Winter (citados por MEN, 1998) afirman que la mayoría de las experiencias geométricas proporcionadas a los estudiantes son bidimensionales a pesar de que vivimos e interactuamos en un mundo tridimensional. Al parecer, esta escasez de experiencias en el espacio está ligada a la dificultad para manipular, visualizar y representar objetos geométricos tridimensionales en ambientes tradicionales que hacen uso exclusivo del lápiz y el papel. Por tal motivo, diversas investigaciones sugieren que la visualización constituye un proceso cognitivo inherente a la actividad geométrica que juega un papel determinante en el desarrollo del pensamiento espacial.

Sin embargo, Marmolejo y Vega (2012) señalan que aún son incipientes las investigaciones que utilizan la visualización como objeto central de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En particular, la revisión literaria llevada a cabo durante esta investigación demostró que no existen investigaciones que proporcionen orientaciones didácticas para superar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros. Más aún, ninguna investigación examinada se enfoca al menos en evidenciar estos obstáculos. No obstante, un gran número de investigaciones relaciona de algún modo el desarrollo de la visualización con la mediación de un software de geometría dinámica.

Por estos motivos, este trabajo de investigación se propone revelar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel. Así también, se proyecta determinar si estos obstáculos son superados luego de la interacción de los estudiantes con un software de geometría dinámica (SGD). Todo esto con el fin de proponer orientaciones didácticas que contribuyan al desarrollo de la visualización espacial.

Esta investigación se justifica a partir de dos aspectos: i) las competencias y saberes matemáticos que exige la propuesta curricular vigente y ii) los bajos niveles de los estudiantes de la Institución Educativa Ateneo en las competencias Razonar y Resolver Problemas evidenciados en los resultados de la Prueba Saber 9° realizada por el ICFES. Sobre el primer aspecto, es posible afirmar que esta investigación comprende las competencias matemáticas de representación de objetos matemáticos y de uso de herramientas para la actividad matemática propuestas por Niss (2002), por cuanto involucra el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional y la mediación de un SGD. Sobre el segundo aspecto, es posible asegurar que tanto las directrices curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) establecidas en los Estándares Básicos de Competencias y en los Derechos Básicos de Aprendizaje, como la Prueba Saber 9° diseñada y aplicada por el ICFES, exige la competencia de los estudiantes para relacionar representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos.

Ahora bien, de acuerdo con los resultados previamente descritos que arrojó la revisión literaria llevada a cabo durante la elaboración del estado del arte, es posible afirmar que esta investigación presenta rasgos exploratorios, descriptivos y explicativos, ya que se propone: i) examinar un fenómeno poco estudiado, ii) describir cómo se manifiesta y cuáles son sus características y iii) explicar las causas que lo originan (Hernández et al., 2014).

Para llevar a cabo el análisis y la interpretación de los datos se ha optado por un enfoque metodológico de carácter mixto que conjuga análisis cuantitativos y cualitativos para establecer las inferencias. En particular, el análisis cuantitativo realizado utiliza elementos propios de la estadística descriptiva, como la creación de tablas de frecuencias y elaboración de diagramas de barras y circulares, para determinar y comparar los porcentajes de acierto de los estudiantes en cada una de las tareas propuestas antes y después de su interacción con el SGD. Por otro lado, el análisis cualitativo se utilizó para revelar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros. Es preciso señalar que en esta investigación el análisis cualitativo tiene preponderancia sobre el cuantitativo, por tal motivo los datos cuantitativos fueron analizados con base en categorías cualitativas procedentes de la teoría.

Esta investigación se compone de 4 capítulos cuyas características y propósitos generales se presentan a continuación:

El Capítulo 1 se refiere propiamente a la descripción del problema de investigación, por tal motivo se presentan la delimitación, el estado del arte, la justificación y los objetivos del problema en cuestión.

En el Capítulo 2 se presentan los referentes teóricos que fundamentan la investigación. Este capítulo ha sido dividido en dos dimensiones: la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. La dimensión cognitiva da cuenta de todos aquellos aspectos teóricos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje, de visualización y razonamiento y de representación. Mientras tanto, la dimensión didáctica se enfoca en establecer los conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas que orientan la construcción y aplicación de los instrumentos de investigación.

En el Capítulo 3 se presentan los referentes metodológicos que orientan la investigación. De tal manera, se define el tipo y enfoque de investigación, se delimitan la población y la muestra y se establecen las técnicas, los instrumentos y el procedimiento para realizar la recolección de datos.

El Capítulo 4 presenta el análisis de los datos obtenidos tras finalizar la aplicación de los instrumentos de recolección descritos en el capítulo 3. Para realizar esta tarea se tiene en cuenta que los lineamientos metodológicos de esta investigación privilegian el análisis cualitativo de los datos sobre el cuantitativo, siendo este último solo un medio de aproximación a la información. Por tal razón, se han utilizado algunos elementos del procesamiento de datos propios de la estadística descriptiva para evidenciar regularidades que posteriormente son confrontadas con los referentes teóricos que orientan esta investigación.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la investigación obtenidas a partir del análisis y la interpretación de los datos propuesta en el capítulo 4. Estas conclusiones se fundamentan en los referentes teóricos de la investigación y responden a sus objetivos.

CAPÍTULO 1: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Problema de investigación

El Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998) señala que la exploración activa del espacio y la representación de objetos sólidos en el espacio son aspectos necesarios para el desarrollo del pensamiento espacial. Más aún, sugiere que esta exploración debe partir desde un sistema intuitivo o sensoriomotor que se manifiesta en la habilidad de actuar en el espacio mediante la manipulación y localización de objetos y el cálculo de, hasta un sistema conceptual o abstracto que se manifiesta en la habilidad de representar internamente el espacio mediante el razonamiento de las propiedades geométricas de los objetos, el uso de variados sistemas de referencia y la predicción del resultado de la manipulación mental de un objeto (MEN, 1998). En este sentido, Gonzato, Godino y Neto (2011) señalan que diversos investigadores han sugerido empezar la enseñanza de la geometría por el espacio, considerando que este sistema de referencia es más intuitivo y concreto que el plano ya que constituye la realidad en la que viven e interactúan los niños.

Sin embargo, Villani (2001) señala que en el contexto escolar es posible observar una tendencia recurrente a relegar la enseñanza de la geometría al plano. Así también, Lappan y Winter (citados por MEN, 1998) advierten que la mayor parte de experiencias matemáticas proporcionadas a los estudiantes son bidimensionales a pesar de que vivimos e interactuamos en un mundo tridimensional. De igual manera, Gutiérrez (1996) señaló que la mayoría de las investigaciones referentes a la visualización en la educación matemática están enfocadas a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, otro gran número en el álgebra, algunas en la geometría plana y tan solo unas pocas en la geometría espacial. En todo caso, la realidad planteada por diversos investigadores sugiere que el sistema de referencia tridimensional no es el privilegiado para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, entonces se establecen automáticamente limitantes metodológicos que dificultan el desarrollo de procesos cognitivos como la visualización y el razonamiento espacial.

Puede ser que la escasez de experiencias relacionadas con la geometría espacial se encuentre ligada con la dificultad para manipular, visualizar y representar objetos geométricos tridimensionales en ambientes bidimensionales que hacen uso exclusivo del lápiz y el papel en donde los objetos presentan un carácter estático. No obstante, existen programas informáticos especializados en geometría que permiten dinamizar los objetos geométricos. Este tipo de programas informáticos se denominan Softwares de Geometría Dinámica [SGD] y su característica más importante es la posibilidad de manipulación de los objetos geométricos, acción que da lugar a múltiples vistas de los objetos desde diferentes ángulos, la verificación de propiedades y relaciones mediante el arrastre y el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional.

Sin embargo, es preciso tener en cuenta que el carácter innovador y transformador de las herramientas tecnológicas no reside en sus propias características, sino en las actividades llevadas a cabo por profesores y estudiantes en función de las posibilidades de comunicación, intercambio, acceso y procesamiento de la información que ofrecen estas herramientas (Coll, 2009). En este sentido, es coherente suponer que la integración arbitraria de un SGD en el aula no es suficiente para provocar el desarrollo de los procesos cognitivos de visualización y razonamiento espacial, sino que también es necesario tener en cuenta el conjunto de reflexiones a priori y a posteriori sobre las actividades propuestas para tal fin a partir de la mediación del SGD. Por lo tanto, toda práctica pedagógica diseñada reflexivamente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial por medio de herramientas tecnológicas tiene validez en el contexto escolar.

En consecuencia, dado que las mayores dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría son la carencia de experiencias relacionadas con la geometría espacial y la integración irreflexiva de los SGD en el aula, entonces esta investigación se planea determinar *¿qué orientaciones didácticas permiten el desarrollo de la visualización espacial cuando se resuelven problemas geométricos que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros?*.

1.2. Estado del arte

En este apartado se presenta la revisión literaria relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y con el desarrollo del pensamiento espacial. Para ello se han analizado 29 investigaciones cuyos tópicos de mayor relevancia se refieren a la visualización, el razonamiento, las representaciones semióticas, el modelo Van Hiele, el uso de material manipulable y de SGD, la formación de profesores y el grado de escolaridad de los estudiantes (ver Blanco, 2013; Fernández, 2013; Moreno, 2015; Rondan, 2016 ; Merma, 2015; Gonzato, Fernández y Díaz, 2011; Godino, Gonzato, Contreras, Estepa, y Díaz 2016; Gonzato, Godino y Neto, 2011; Ramírez, 2013; Guillén, 2010; Ortega y Pecharomán, 2015; Ramírez y Suárez, 2011; Gutiérrez, Adela y Alba, 2014; Díaz, 2014; Zapata 2014; Moya, 2016; Gisele, Verbanek y Goldoni, 2013; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010; Almeida, 2010; Almeida y Silva, 2012; Silva, 2012; Silva y Salazar, 2012; Martín, 2014; Perea, 2016; Advíncula, 2013; Gutiérrez y Jaime, 2015; Hernández y Bastidas, 2014; Campos y Joaqui, 2014, Marmolejo y Vega, 2012). En conjunto, estos estudios constituyen un ejemplo de la realidad asociada a la presente investigación.

La visualización como proceso cognitivo inherente a la actividad geométrica constituye un tópico de especial importancia para la mayoría de los estudios analizados, de hecho, 26 de las 29 investigaciones revisadas la asumen como objeto central de estudio (ver Blanco, 2013; Fernández, 2013; Moreno, 2015; Rondan, 2016 ; Merma, 2015; Gonzato *et al.*, 2011; Godino, Gonzato *et al.*, 2016; Godino *et al.*, 2011; Ramírez, 2013; Guillén, 2010; Ortega y Pecharomán, 2015; Ramírez y Suárez, 2011; Gutiérrez *et al.*, 2014; Zapata 2014; Moya, 2016; Gisele *et al.*, 2013; Torregrosa *et al.*, 2010; Almeida, 2010; Almeida y Silva, 2012; Silva, 2012; Silva y Salazar, 2012; Martín, 2014; Gutiérrez y Jaime, 2015; Hernández y Bastidas, 2014; Campos y Joaqui, 2014, Marmolejo y Vega, 2012). Estas investigaciones coinciden en sus referentes teóricos, siendo Alan Bishop, Norma Presmeg, Raymond Duval y Ángel Gutiérrez los autores de mayor referencia.

Sobre este tópico, Fernández (2013) pone de manifiesto que la visualización constituye actualmente un tema de interés para futuras investigaciones en el campo de la geometría y el razonamiento espacial. Para ello, presenta algunos antecedentes investigativos en el campo mencionado señalando los tópicos que han sido objeto de estudio y las líneas de investigación vigentes. Finalmente, termina exponiendo las carencias de los futuros maestros en este tema y la importancia de planificar y desarrollar acciones formativas. No obstante, pese a la creciente producción literaria sobre la importancia del papel de la visualización para el desarrollo del pensamiento espacial, Marmolejo y Vega (2012) sostienen que aún son incipientes los estudios enfocados en la pertinencia y necesidad de establecer la visualización como objeto de la enseñanza, además, resaltan que si este proceso cognitivo no se orienta adecuadamente puede llegar a constituir un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, ha sido posible apreciar que un gran número de investigaciones, 19 de las 26 referidas a la visualización, relacionan el desarrollo de la visualización con el uso de un SGD (ver Blanco, 2013; Ortega y Pecharomán, 2015; Ramírez y Suárez, 2011; Gutiérrez *et al.*, 2014; Díaz, 2014; Moya, 2016; Gisele, *et al.*, 2013; Almeida, 2010; Almeida y Silva, 2012; Silva, 2012; Silva y Salazar, 2012; Martín, 2014; Perea, 2016; Advíncula, 2013; Gutiérrez y Jaime, 2015; Hernández y Bastidas, 2014; Campos y Joaqui, 2014). Estos estudios sugieren que las dificultades asociadas a la visualización y representación de objetos geométricos, especialmente la representación bidimensional de configuraciones tridimensionales, pueden ser superadas a través de la mediación de un SGD. Sobre este hecho, Silva y Salazar (2012) resaltan las bondades de un SGD como Cabri 3D en virtud del arrastre y la manipulación que permiten sobre la representación de los objetos construidos. Sin embargo, también señalan que los softwares para la enseñanza de las matemáticas todavía están lejos de ser integrados efectivamente en la práctica docente. Por tal motivo, Blanco (2013) destaca la importancia del aprovechamiento en el aula de todos los recursos a nuestra disposición que favorezcan la visualización de los cuerpos geométricos.

En esta línea, Perea (2016) comprende que la apatía por el estudio de la geometría, el bajo rendimiento académico y las altas tasas de reprobación de los estudiantes en un determinado grado son producto de una escasa utilización de recursos didácticos y poca aplicabilidad de conceptos a la vida cotidiana. Para enfrentar este problema, se propone aplicar una estrategia didáctica mediada por las TIC para el aprendizaje de poliedros regulares. Este proyecto fue desarrollado en dos etapas. La primera etapa se enfocó en los estudiantes e implico la realización de actividades de manipulación y construcción de poliedros a través de los SGD Poly Pro y Cabri 3D, además, paralelamente se llevó a cabo el registro y evaluación de las actividades con la herramienta That Quiz. La segunda etapa se centró en los docentes, aquí se buscaba la apropiación de las TIC implementadas en la investigación de modo que los docentes las incorporen en sus prácticas pedagógicas. Finalmente, el autor concluye que SGD como Poly Pro y Cabri 3D constituyen herramientas idóneas para el estímulo de la creatividad, el desarrollo de competencias y la apropiación de conocimientos. Además, resalta la importancia del trabajo en equipo y la correcta motivación como facilitadores del aprendizaje en términos de la teoría sociocultural de Lev Vigotsky.

De manera similar, Martín (2014) advierte que la resistencia de los docentes para trascender de la enseñanza tradicional de la geometría que no contempla la implementación de herramientas tecnológicas ha ocasionado un retroceso en la enseñanza del Álgebra y la Geometría en España según los resultados de las pruebas PISA y TIMSS. Para contribuir a la mejora de esta situación, Martín desarrolla dos tareas. Primero, realiza un estudio de campo mediante la aplicación de una serie de cuestionarios a varios docentes de Matemáticas de centros de la Comunidad de Madrid, cuyos resultados dan cuenta tanto de los conocimientos de los docentes sobre las dificultades de los estudiantes en matemáticas y geometría, como de la resistencia al uso y uso no reflexivo de las TIC en la enseñanza de geometría en las aulas. Segundo, se fija el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la geometría en 2º de ESO empleando el SGD Cabri 3D. Dado que el trabajo de campo permitió establecer que el área y el volumen eran los contenidos temáticos de mayor dificultad para los estudiantes, entonces las actividades propuestas en la secuencia giraron en torno a ello, específicamente al área y el volumen de diversos sólidos como el prisma, la pirámide, el cono, la esfera y los poliedros truncados. Al final, Martín concluye que las propuestas didácticas que integran TIC desarrollan la visualización y mejoran la comprensión de los objetos geométricos estudiados.

Mientras tanto, Hernández y Bastidas (2014) se cuestionan en su investigación sobre cómo se complementan el uso de materiales manipulativos y Cabri 3D en la actividad matemática de los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, de tal manera que les permita comprender las propiedades geométricas del cubo. Al respecto, diseñaron y ejecutaron una secuencia de situaciones didácticas de acuerdo con la Teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau la cual desarrollaron por medio de la metodología que plantea Michele Artigue denominada micro-ingeniería didáctica. Las actividades de la secuencia didáctica exploran en su generalidad las propiedades y elementos del cubo integrando materiales manipulables como el papel, la plastilina, los palillos y Cabri 3D. Hernández y Bastidas lograron concluir que mediante el uso de materiales manipulables y Cabri 3D captaron rápidamente la atención de los estudiantes motivando su participación voluntaria. Así también, se demostró que en cada una de las actividades de la secuencia los estudiantes construyeron un conocimiento particular que posteriormente, mediante la conjugación de todos ellos, permitió la comprensión general de las propiedades del cubo.

Por otra parte, es importante señalar que tan solo 11 de las 26 investigaciones relacionadas con visualización establecen un vínculo teóricamente explicito con el razonamiento (ver Blanco, 2013; Fernández, 2013; Moreno, 2015; Merma, 2015; Ramírez, 2013; Guillén, 2010; Moya, 2016; Gisele *et al.*, 2013; Torregrosa *et al.*, 2010; Gutiérrez y Jaime, 2015, Marmolejo y Vega, 2012). Sobre esta relación, Duval (1998) advierte que en el razonamiento geométrico se distinguen tres tipos de procesos cognitivos entre los cuales se encuentra la visualización. Torregrosa *et al.* (2010) coindice con esta declaración, pero agrega que el razonamiento representa cualquier procedimiento que permite al sujeto obtener nuevo conocimiento a partir de sus conocimientos previos y del problema que se le propone. Así también, Battista, Presmeg, Phillips et al. y Rivera (citados en Fernández, 2013) añaden que el papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas no atiende exclusivamente a un asunto ilustrativo, sino que se reconoce como un componente fundamental del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración. Mientras tanto, Merma (2015) advierte que la falta de visualización no permite a los estudiantes realizar un adecuado procesamiento de la información visual para describir sólidos y deducir relaciones geométricas.

En esta línea, el Modelo Van Hiele resulta ser la estrategia utilizada por 7 investigaciones para establecer una conexión entre visualización y razonamientos (ver Merma, 2015; Ramírez, 2013; Díaz, 2014; Perea, 2016; Gutiérrez y Jaime, 2015). En particular, este modelo comprende la visualización como el primer nivel de razonamiento. Más aún, permite analizar los distintos niveles de razonamiento geométrico y ofrece orientaciones didácticas para avanzar de un nivel a otro. Al respecto, Jaime y Gutiérrez (citados por Merma, 2015) afirman que el modelo Van Hiele presenta dos componentes: uno descriptivo, dirigido a las características de los niveles de razonamiento geométrico que van desde el razonamiento intuitivo que integra la visualización hasta los razonamientos formal y abstracto; y otro operativo, que se refiere a las particularidades de las fases de aprendizaje asociadas a cada nivel de razonamiento geométrico para que el estudiante alcance niveles de razonamiento cada vez mayores.

Ahora bien, Duval (1999) manifiesta que no puede existir comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, sin embargo, tan solo 8 de las 29 investigaciones examinadas toman en consideración la relación entre visualización y representación (ver Blanco, 2013; Fernández, 2013; Ortega y Pecharomán, 2015; Ramírez y Suárez, 2011; Ramírez (2013), Moya, 2016; Gisele *et al.*, 2013; Torregrosa *et al.*, 2010). Al respecto, Ramírez y Suárez (2011) concuerdan con Duval en que "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (p. 40).

Por otro lado, la revisión literaria ha permitió establecer que los poliedros constituyen un objeto de estudio recurrente. De hecho, 19 de las 28 investigaciones analizadas en este apartado presentan esta característica (ver Blanco, 2013; Moreno, 2015; Rondan, 2016; Godino *et al.* 2016; Godino *et al.*, 2011; Ramírez, 2013; Guillén, 2010; Ramírez y Suárez, 2011; Zapata, 2014; Moya, 2016; Gisele *et al.*, 2013; Almeida, 2010; Almeida y Silva, 2012; Silva, 2012; Silva y Salazar, 2012; Martín, 2014; Perea, 2016; Advíncula, 2013; Campos y Joaqui, 2014). La mayor parte de las actividades propuestas en estas investigaciones giran en torno a las propiedades de los poliedros, a sus elementos constitutivos (vértices, aristas y caras), al área y al volumen. Pocas son las que establecen un vínculo entre las representaciones tridimensionales y bidimensionales de los poliedros.

Entre tanto, 13 de las 20 investigaciones centradas en los poliedros utilizan un SGD como instrumento de mediación para llevar a cabo la construcción y manipulación de estos objetos (ver Blanco, 2013; Ramírez y Suárez, 2011; Moya, 2016; Gisele *et al.*, 2013; Almeida, 2010; Almeida y Silva, 2012; Silva, 2012; Silva y Salazar, 2012; Martín, 2014; Perea, 2016; Advíncula, 2013; Hernández y Bastidas, 2014; Campos y Joaqui, 2014). Por el contrario, tan solo 4 investigaciones utilizan material manipulable para llevar a cabo estas tareas (ver Hernández y Bastidas, 2014; Zapata, 2014; Ramírez y Suárez, 2011; Blanco, 2013). Más aún, Hernández y Bastidas (2014) son los únicos que formulan una propuesta de análisis distinta y se cuestionan sobre la manera en que el uso de materiales manipulativos y un SGD como Cabri 3D se complementan en la actividad matemática de los estudiantes.

Finalmente, es importante señalar la población de interés en las 29 investigaciones orientadas al desarrollo del pensamiento espacial. En este sentido, 7 investigaciones se refieren a la formación de profesores (ver Silva y Salazar, 2012; Torregrosa *et al.*, 2010; Gisele *et al.*, 2013; Gonzato *et al.*, 2011; Godino *et al.*, 2016; Godino *et al.*, 2011; Fernández, 2013), 8 se desarrollan con estudiantes de bachillerato (ver Blanco, 2013; Moreno, 2015; Merma, 2015; Ramírez, 2013; Ramírez y Suárez, 2011; Moya, 2016; Martín, 2014; Perea, 2016) y 8 se llevan a cabo con estudiantes de primaria (ver Rondan, 2016; Ortega y Pecharomán, 2015; Díaz, 2014; Almeida, 2010; Almeida y Silva, 2012; Silva, 2012; Hernández y Bastidas, 2014; Campos y Joaqui, 2014). Al parecer, el número de investigaciones sugiere cierta simetría en torno a las poblaciones mencionadas, por tal motivo, no es posible afirmar que exista alguna tendencia investigativa hacia un tipo determinado de población.

En conclusión, aunque las investigaciones referidas previamente subrayan la importancia del proceso de visualización para el desarrollo del pensamiento espacial y otras sugieren algún tipo de relación entre el uso de un SGD y el desarrollo de este proceso cognitivo, no es posible apreciar investigaciones que evidencien los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven problemas geométricos que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional, ni las implicaciones de la representación mental para llevar a cabo este tipo de tareas. En este sentido, es importante que las futuras investigaciones produzcan, no solo recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial y el desarrollo de la visualización espacial, sino también orientaciones didácticas que permitan superar los obstáculos que tienen lugar durante estos procesos, así como la integración reflexiva de los SGD.

1.3. Justificación

1.3.1. Pertinencia del estudio de la geometría espacial mediada por softwares de geometría dinámica

La geometría es la rama de las matemáticas más cercana a la realidad, ya que gran parte de sus objetos de estudio se constituyen a partir de abstracciones de objetos del mundo físico. Lang y Ruane (1981) sostienen que este carácter intuitivo y concreto de la geometría es la causa para que diversos autores propongan que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría empiece por el espacio. Al respecto, Bishop (1992) sugiere que para llevar a cabo esta tarea es necesario extender las ideas espaciales que tienen los niños cuando llegan a la escuela, aquellas que provienen de su propia experiencia espacial construida a partir de su interacción con el mundo real, para luego procurar introducir las habilidades básicas de matematización, clasificación, descripción y relación.

No obstante, la realidad planteada por Villani (2001) difiere de estas ideas y pone de manifiesto la escaza presencia de la geometría espacial en el currículo de matemáticas de muchos países. Sobre este hecho, el MEN (1998) sostiene que la exclusión de la geometría intuitiva tuvo lugar gracias a la introducción de la “matemática moderna” en los currículos escolares. No obstante, en la actualidad se ha dispuesto recuperar el sentido espacial intuitivo de la geometría. Por lo tanto, resulta relevante la producción de recursos didácticos cuyas orientaciones teóricas y metodológicas contribuyan al fortalecimiento de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría por medio del desarrollo de la visualización espacial.

El carácter concreto de la geometría que se pretende rescatar implica emular las posibilidades de manipulación y transformación que tienen los objetos físicos en la realidad. Por este motivo, la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial deben contemplar la mediación de una herramienta que permita manipular y transformar los objetos geométricos. En la actualidad, los SGD constituyen una herramienta idónea para realizar esta tarea.

Un SGD constituye un entorno virtual de simulación de la realidad que provee representaciones manipulables de los objetos geométricos. Arcila, Bonilla y Cardona (2013) afirman que este tipo de programas informáticos constituyen un instrumento de valiosa utilidad para el desarrollo de la visualización y el razonamiento espacial, ya que amplían la experiencia sensorial del estudiante por medio de las representaciones tridimensionales manipulables de los objetos geométricos y permiten establecer conjeturas y proponer argumentos sobre los objetos y los procedimientos o construcciones realizadas. Más aún, sostienen que la construcción de nuevo conocimiento se da en virtud de las retroacciones que el alumno establece con el SGD a partir de la manipulación de los objetos geométricos en la pantalla del computador.

El uso de herramientas informáticas como los SGD ha sido contemplado y sugerido por diversos investigadores para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En particular, Niss (2002) propone el uso de herramientas para la actividad matemática como una de las ocho competencias de su enfoque. Estas competencias se dividen en dos grupos. El primer grupo de competencias presentado en la *tabla 1* se relaciona con la capacidad de hacer y responder preguntas en y con las matemáticas:

Tabla 1. Primer grupo de competencias matemáticas propuesto por Niss (2002).

Competencia matemática	**Acciones que evidencian la competencia**
Pensar matemáticamente (dominio de modos matemáticos de pensamiento).	• Plantear preguntas que son la característica de las Matemáticas, y saber las clases de respuestas (no necesariamente dar las respuestas ellos mismos o decir cómo obtenerlas) que las Matemáticas pueden ofrecer; • Entender y manejar el alcance y limitaciones de un concepto dado. • Ampliar el alcance de un concepto abstrayendo algunas de sus propiedades. • Generalizar resultados a clases más amplias de objetos. • Distinguir entre clases diferentes de afirmaciones matemáticas (incluso aseveraciones condicionadas ('si-entonces'), afirmaciones basadas en cuantificadores, asunciones, definiciones, teoremas, conjeturas, casos).
Plantear y solucionar problemas matemáticos.	• Identificar, plantear, y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos (puros o aplicados, abiertos o cerrados). • Solucionar por distintos métodos diferentes tipos de problemas matemáticos (puros o aplicados, abiertos o cerrados), ya sea planteados por otros o por sí mismo.

Modelar matemáticamente (analizar y construir modelos).	• Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de su rango y validez. • Decodificación de modelos existentes, es decir, traducción e interpretación de elementos modelo en términos de la 'realidad' modelada. • Realizar modelado activo en un contexto dado: estructurar el campo, matematizar, trabajar con (en) el modelo, incluyendo resolver los problemas que genera, validar el modelo, interna y externamente, analizar y criticar el modelo, en sí mismo y frente a las posibles alternativas, comunicar sobre el modelo y sus resultados, monitorear y controlar todo el proceso de modelado.
Razonar matemáticamente.	• Seguir y evaluar cadenas de argumentos, presentadas por otros. • Saber qué es una prueba matemática (no) y cómo se diferencia de otros tipos • de razonamiento matemático, p. heurística • Descubrir las ideas básicas en una línea de argumentación dada (especialmente una prueba), incluyendo la distinción de líneas principales de razonamientos e ideas por tecnicismos. • Idear argumentos matemáticos formales e informales, y transformar los argumentos heurísticos en pruebas válidas, es decir, en probar afirmaciones.

Fuente: Niss (2002), pp. 7-8.

El segundo grupo de competencias propuesto por Niss (2002) en la *tabla 2* se relaciona con la habilidad de utilizar el lenguaje matemático y las herramientas:

Tabla 2. Segundo grupo de competencias matemáticas propuesto por Niss (2002).

Competencia matemática	Acciones que evidencian la competencia
Representar entidades matemáticas (objetos y situaciones).	• Comprender y utilizar (decodificar, interpretar, distinguir entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones. • Comprender y utilizar las relaciones entre las diferentes representaciones de • misma entidad, incluido el conocimiento de sus fortalezas y limitaciones relativas. • Elegir y cambiar entre representaciones.
Manejar de símbolos matemáticos y formalismos.	• Decodificar e interpretar el lenguaje matemático formal y formal, y • entendiendo sus relaciones con el lenguaje natural. • Comprender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos formales (sintaxis y semántica). • Traducir del lenguaje natural al lenguaje formal/simbólico. • Manejar y manipular declaraciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas.

Comunicar dentro de, con, y sobre las Matemáticas	• Comprender los "textos" escritos, visuales u orales de los demás, en una variedad de registros lingüísticos, sobre asuntos que tienen un contenido matemático. • Expresarse, en diferentes niveles de precisión teórica y técnica, en forma oral, visual o escrita, sobre tales asuntos.
Utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las TIC).	• Conocer la existencia y las propiedades de diversas ayudas y herramientas para la actividad matemática, conociendo su alcance y limitaciones. • Poder usar reflexivamente tales ayudas y herramientas.

Fuente: Niss (2002), pp. 8-9.

De acuerdo con Barrantes y Araya (2010), este enfoque ha influenciado el marco teórico del proyecto internacional PISA propuesto por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE], en particular, en las pruebas realizadas en los años 2003 y 2006. Cabe señalar que la prueba PISSA tiene como objetivo evaluar las competencias en lectura, matemáticas y ciencias de los estudiantes en la etapa final de la enseñanza obligatoria. Más aún, la prueba ha sido concebida como un recurso para suministrar información abundante y detallada que permita orientar las decisiones y políticas públicas necesarias de los países miembros de la OCDE en aras de mejorar los niveles educativos.

En particular, comprende las competencias matemáticas de representación de objetos matemáticos y de uso de herramientas para la actividad matemática propuestas por Niss (2002), por cuanto involucra el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional y la mediación de un SGD. De este modo, se procura establecer una conexión entre lo que tradicionalmente se privilegia durante el estudio de la geometría, el plano, y aquello que frecuentemente se ha relegado en el contexto escolar, el espacio. a partir de la mediación de un SGD.

1.3.2. Relación entre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y la Prueba Saber 9°

El MEN (2003) define el pensamiento geométrico como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p. 61). De acuerdo con esta definición, la geometría constituye un instrumento para la exploración y representación del espacio, por lo tanto, no es coherente restringir su estudio exclusivamente a las propiedades y relaciones que se dan en el plano.

En consecuencia, la propuesta curricular vigente a nivel nacional pretende que la enseñanza de la geometría relacione las representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos. Prueba de ello se evidencia en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas concernientes al pensamiento espacial y sistemas geométricos desde el grado primero hasta el grado noveno (ver tabla 3).

Tabla 3. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas concernientes al Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos que hacen referencia a la relación entre representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos.

Conjuntos de Grados	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas
Primero a Tercero	• Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales. • Dibujo y describo cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños. • Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. • Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales. • Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas

	tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.
Cuarto a Quinto	• Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. • Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.
Sexto a Séptimo	• Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. • Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
Octavo a Noveno	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
Décimo a Undécimo	• Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas • propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

Fuente: MEN, 2003, pp. 80-86.

Como complemento a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, el MEN propone los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (DBA). Los DBA constituyen el listado de saberes fundamentales que deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados del sistema educativo. En los DBA también se evidencia la relación entre las representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos (ver tabla 4).

Tabla 4. Derechos Básicos de Competencias en Matemáticas y Evidencias concernientes al Pensamiento Espacial en los cuales se hace referencia a la relación entre las representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos durante la educación básica.

Grado	Derechos Básicos de Aprendizaje	Evidencias
Primero	Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros).	• Crea, compone y descompone formas bidimensionales y tridimensionales, para ello utiliza plastilina, papel, palitos, cajas, etc. • Describe de forma verbal las cualidades y propiedades de un objeto relativas a su forma. m Agrupa objetos de su entorno de acuerdo con las semejanzas y las diferencias en la forma y en el tamaño y explica el criterio que utiliza. Por ejemplo, si el objeto es redondo, si tiene puntas, entre otras características. • Identifica objetos a partir de las descripciones verbales

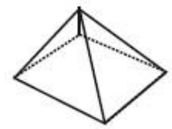
Grado	Derechos Básicos de Aprendizaje	Evidencias
		que hacen de sus características geométricas.
Segundo	Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales.	• Reconoce las figuras geométricas según el número de lados. • Diferencia los cuerpos geométricos. m Compara figuras y cuerpos geométricos y establece relaciones y diferencias entre ambos.
Tercero	Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas.	• Relaciona objetos de su entorno con formas bidimensionales y tridimensionales, nombra y describe sus elementos. • Clasifica y representa formas bidimensionales y tridimensionales tomando en cuenta sus características geométricas comunes y describe el criterio utilizado. • Interpreta, compara y justifica propiedades de formas bidimensionales y tridimensionales.
Cuarto	Identifica, describe y representa figuras bidimensionales y tridimensionales, y establece relaciones entre ellas.	• Arma, desarma y crea formas bidimensionales y tridimensionales. • Reconoce entre un conjunto de desarrollos planos, los que corresponden a determinados sólidos atendiendo a las relaciones entre la posición de las diferentes caras y aristas.
Quinto	Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas.	• Relaciona objetos tridimensionales y sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos. • Reconoce relaciones intra e interfigurales. • Determina las mediciones reales de una figura a partir de un registro gráfico (un plano). • Construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de medidas establecidas. • Utiliza transformaciones a figuras en el plano para describirlas y calcular sus medidas.
Sexto	Utiliza y explica diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos.	• Construye plantillas para cuerpos geométricos dadas sus medidas. • Selecciona las plantillas que genera cada cuerpo a partir del análisis de su forma, sus caras y sus vértices. • Utiliza la regla no graduada y el compás para dibujar las plantillas de cuerpos geométricos cuando se tienen sus medidas.
Séptimo	Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.	• Establece relaciones entre la posición y las vistas de un objeto. • Reconoce e interpreta la representación de un objeto. • Representa objetos tridimensionales cuando se transforman.
Octavo	Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las	• Utiliza criterios para argumentar la congruencia de dos triángulos.

Grado	Derechos Básicos de Aprendizaje	Evidencias
	formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.	• Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas. • Resuelve problemas que implican aplicación de los criterios de semejanza. • Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruente o semejantes entre sí.
	Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.	• Describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos (Software, tangram, papel, entre otros). • Argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto. m Reconoce relaciones geométricas al utilizar el teorema de Pitágoras y Thales, entre otros. m Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo. m Resuelve problemas utilizando teoremas básicos.
Noveno	Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.	• Reconoce regularidades en formas bidimensionales y tridimensionales. • Explica criterios de semejanza y congruencia a partir del teorema de Thales. • Compara figuras geométricas y conjetura sobre posibles regularidades. • Redacta y argumenta procesos llevados a cabo para resolver situaciones de semejanza y congruencia de figuras.

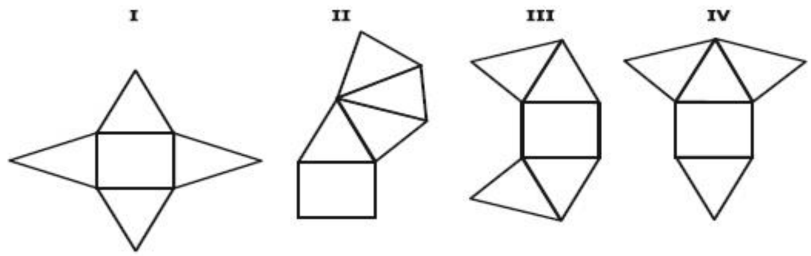
Fuente: MEN, 2016, pp. 11-69.

Coherentemente, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES] ha evaluado en la Prueba Saber 9°, desde el año 2012 hasta el 2015, el nivel de competencia de los estudiantes que cursan grado noveno para establecer relaciones entre objetos tridimensionales y bidimensionales, específicamente, entre los poliedros y sus desarrollos planos (figuras 1 a 4).

38. Observa la siguiente pirámide.



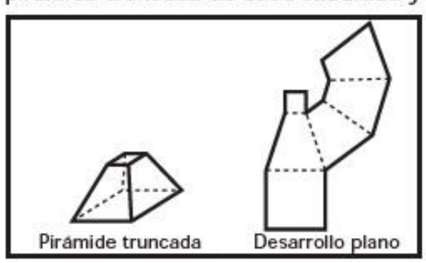
¿Con cuáles de los siguientes desarrollos planos se puede formar la pirámide?



A. Con I y con III solamente.
B. Con I, II y IV solamente.
C. Con II y con IV solamente.
D. Con II, con III y con IV solamente.

Figura 1. Pregunta del Cuadernillo de la la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2012. Fuente: ICFES, 2016-a, p. 126.

11. *La figura presenta una pirámide truncada de base cuadrada y uno de sus desarrollos planos.



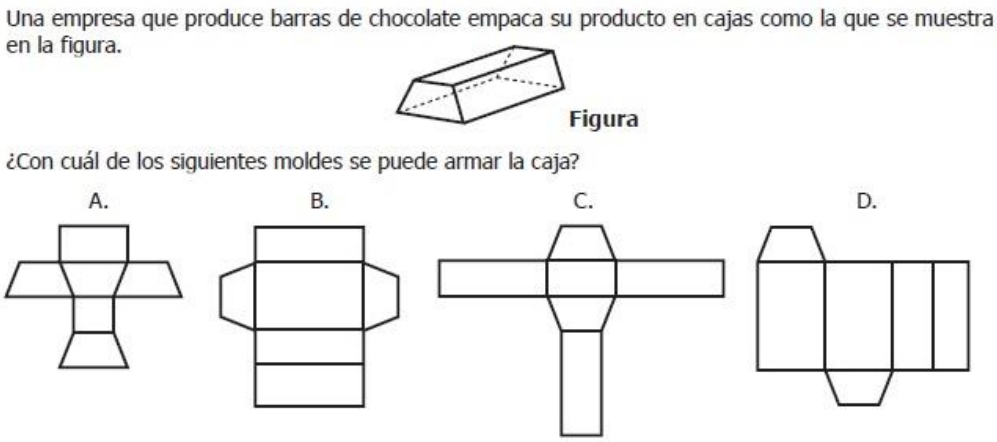
Figura

I. Los 6 cuadriláteros que lo componen deben ser congruentes con las caras correspondientes de la pirámide truncada.
II. Los 6 cuadriláteros que lo componen deben ser semejantes entre sí.
III. La disposición de los 6 cuadriláteros debe permitir armar la pirámide sin traslapar.

¿Cuál o cuáles de las anteriores condiciones debe cumplir el desarrollo plano para poder armar la pirámide truncada?

A. I solamente.
B. II solamente.
C. II y III solamente.
D. I y III solamente.

Figura 2. Pregunta del Cuadernillo de la la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2013. Fuente: ICFES, 2016-b, p. 45.

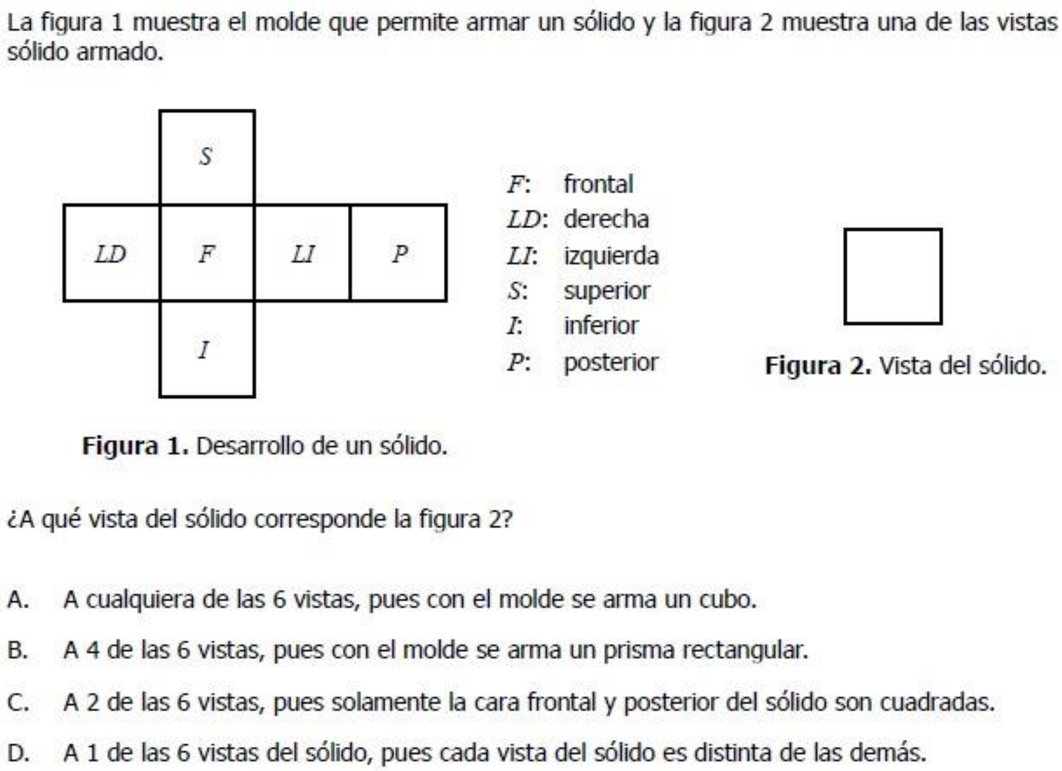

Una empresa que produce barras de chocolate empaca su producto en cajas como la que se muestra en la figura.

Figura

¿Con cuál de los siguientes moldes se puede armar la caja?

A. B. C. D.

Figura 3. Pregunta del Cuadernillo de la la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2014. Fuente: ICFES, 2016-c, p.88.


La figura 1 muestra el molde que permite armar un sólido y la figura 2 muestra una de las vistas sólido armado.

S
LD *F* *LI* *P*
I

F: frontal
LD: derecha
LI: izquierda
S: superior
I: inferior
P: posterior

Figura 1. Desarrollo de un sólido.

Figura 2. Vista del sólido.

¿A qué vista del sólido corresponde la figura 2?

A. A cualquiera de las 6 vistas, pues con el molde se arma un cubo.

B. A 4 de las 6 vistas, pues con el molde se arma un prisma rectangular.

C. A 2 de las 6 vistas, pues solamente la cara frontal y posterior del sólido son cuadradas.

D. A 1 de las 6 vistas del sólido, pues cada vista del sólido es distinta de las demás.

Figura 4. Pregunta del Cuadernillo de la la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2014. Fuente: ICFES, 2016-d, p. 5.

Como se puede observar, tanto las directrices curriculares del MEN establecidas en los Estándares Básicos de Competencias y en los Derechos Básicos de Aprendizaje, como la Prueba

Saber 9° diseñada y aplicada por el ICFES, sugieren que los estudiantes deben ser competentes para relacionar representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos. En este sentido, este proyecto de investigación pretende establecer algunas orientaciones pedagógicas y didácticas que permitan superar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven problemas geométricos que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel.

1.3.3. Realidad institucional de la competencia razonar y del pensamiento espacial

A nivel institucional, los informes del Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) de los años 2015 y 2016 para la Institución Educativa Ateneo presentan los siguientes resultados en torno a las competencias Razonar y Resolver Problemas:

Tabla 5. Comparación entre los informes del ICSE de los años 2015 y 2016 para la Institución Educativa Ateneo sobre las competencias Razonar y Resolver Problemas en Geometría.

Competencia / **Año**	**Razonar**	**Resolver Problemas**
2015	El 55% de los estudiantes no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.	El 60% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas usando modelos geométricos.
2016	El 38% de los estudiantes no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos	El 16% de los estudiantes no resuelve y formula problemas usando modelos geométricos

Fuente: Elaboración propia.

La comparación entre los informes del ICSE de los años 2015 y 2016 para la Institución Educativa Ateneo refleja, no solo un aumento en el porcentaje de estudiantes que alcanzaron habilidades concernientes a las competencias Razonar y Resolver Problemas, sino también la relación que guardan estas competencias entre sí, ya que, al parecer, un bajo desempeño para Razonar implica un bajo desempeño para Resolver Problemas y viceversa.

Ahora bien, en comparación con otras instituciones educativas adscritas a la entidad territorial Valle del Cauca, los resultados obtenidos por los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo[1] en la Prueba Saber 9 desde el año 2012 hasta el año 2016 ° reflejan una debilidad persistente en las competencias Comunicar y Resolver Problemas. Generalmente, los resultados en la competencia Razonar se sitúan sobre el promedio departamental en la mayoría de los años analizados, mientras que los resultados en las competencias Comunicar y Resolver Problemas se ubican por debajo de la media (ver figuras 5 a 9)

Figura 5. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2012. Fuente: ICFES, 2016-e, p. 7.

[1] Para acceder al análisis de los resultados institucionales obtenidos por los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo es necesario utilizar el siguiente código DANE: 176563000024.

Figura 6. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2013. Fuente: ICFES, 2016-e, p. 7.

Figura 7. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2014. Fuente: ICFES, 2016-e, p. 7.

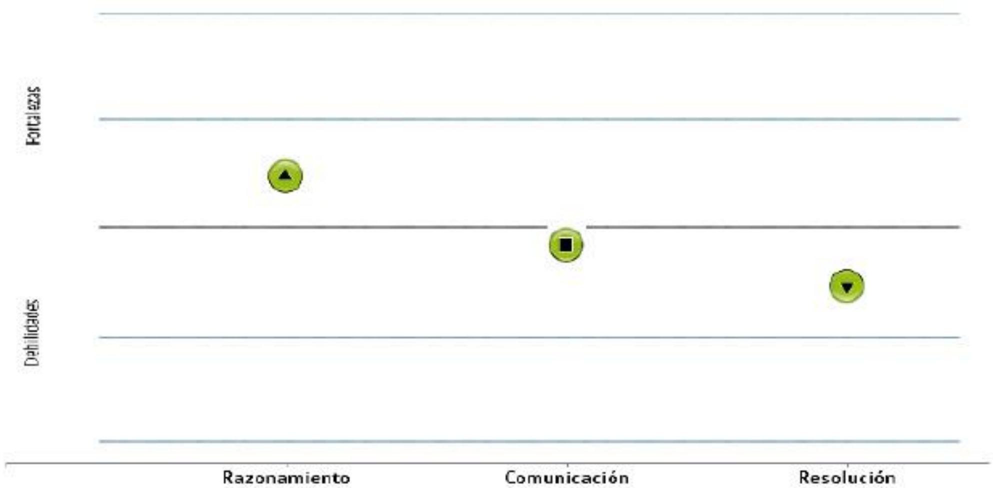


Figura 8. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2015. Fuente: ICFES, 2016-e, p. 7.

Figura 9. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2016. Fuente: ICFES, 2016-e, p. 7.

Ahora bien, los resultados obtenidos por los estudiantes desde el año 2012 hasta el año 2016 en la Prueba Saber 9° también demuestran que la Institución Educativa Ateneo, en comparación con otras instituciones educativas adscritas a la entidad territorial Valle del Cauca, presenta resultados similares en el pensamiento numérico-variacional, levemente superiores en el pensamiento aleatorio e inferiores en el pensamiento geométrico-métrico (ver figuras 10 a 14).

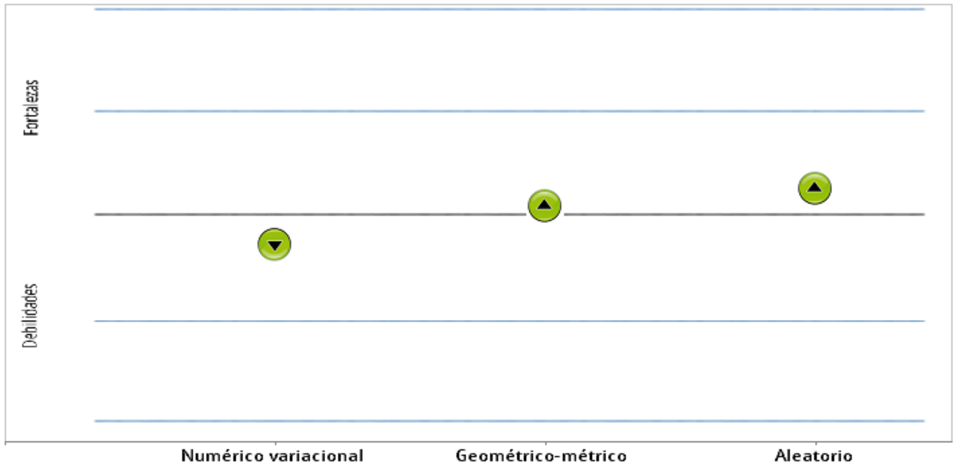


Figura 10. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2012. Fuente: ICFES, 2016-e, p.

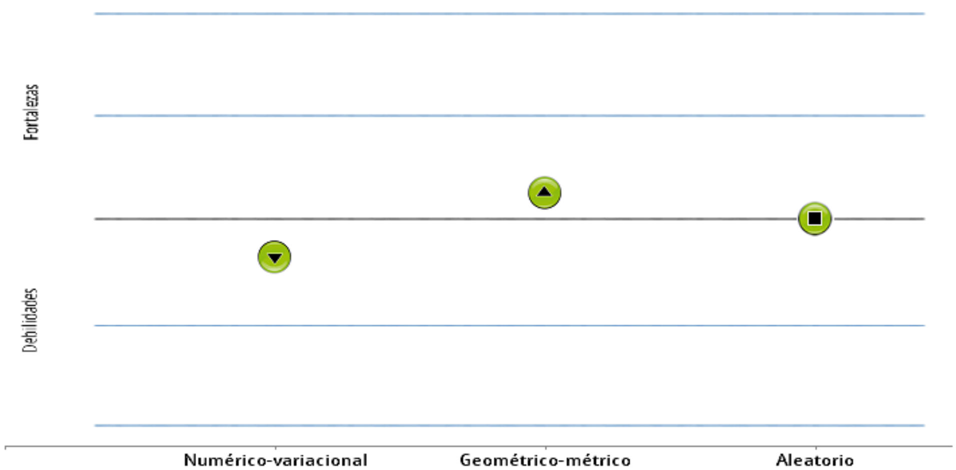


Figura 11. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2013. Fuente: ICFES, 2016-f, p.

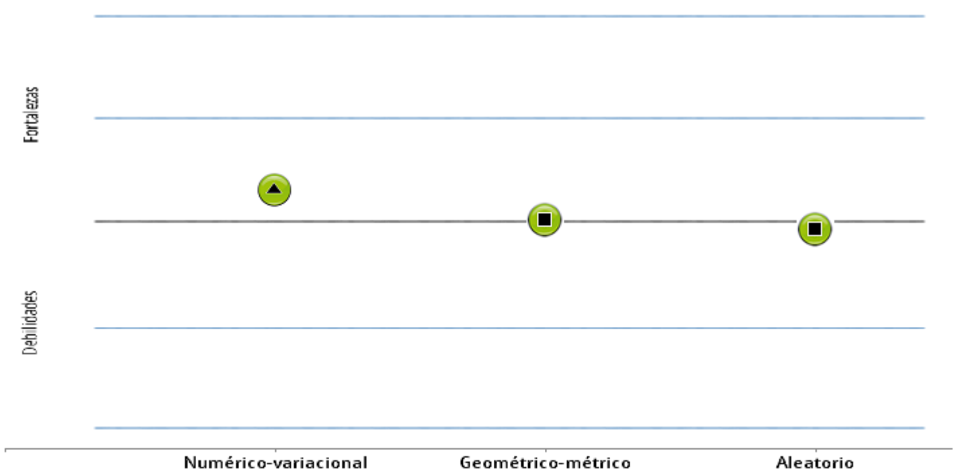


Figura 12. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2014. Fuente: ICFES, 2016-g, p.

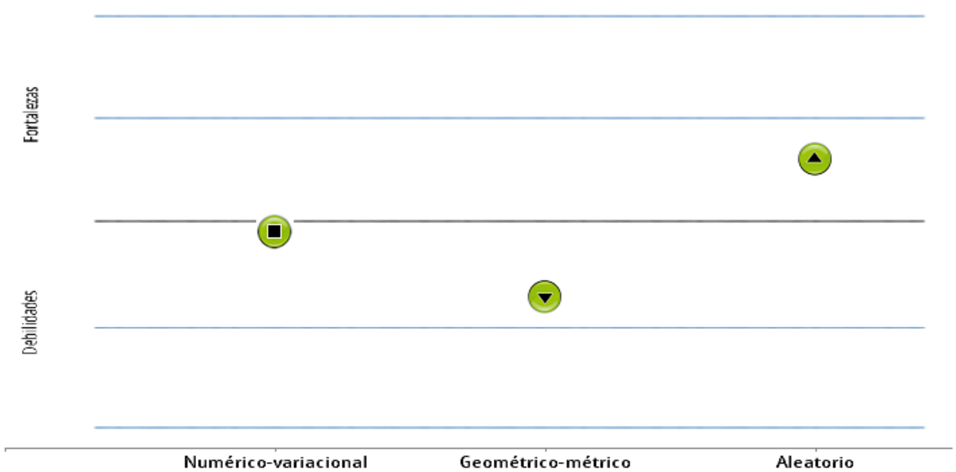


Figura 13. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2015. Fuente: ICFES, 2016-h, p.

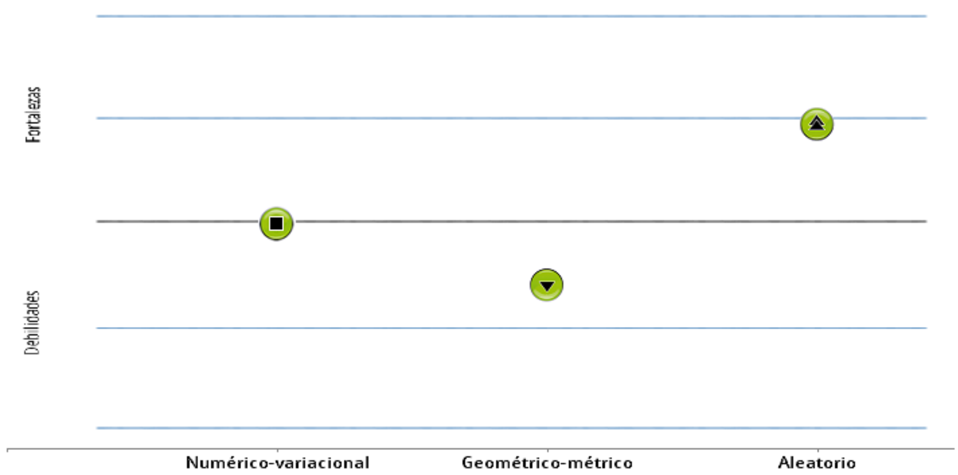


Figura 14. Resultados globales de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2016. Fuente: ICFES, 2016-i, p.

En conclusión, si bien el informe del ICSE del demuestra una mejoría a nivel institucional en las competencias Razonar y Resolver Problemas para la Institución Educativa Ateneo del año 2015 al 2016, el análisis de los resultados emanados por las pruebas censales evidencia una debilidad en torno al desarrollo del pensamiento espacial en comparación con otras instituciones educativas adscritas a la entidad territorial Valle del Cauca. Aunque los resultados no son sobresalientes, esta realidad constituye una oportunidad para justificar y promover la creación de nuevos recursos didácticos que permitan desarrollar el pensamiento espacial de los estudiantes y mejorar posteriormente los resultados de las Pruebas Saber a nivel institucional e interinstitucional.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Proponer orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros.

1.4.2. Específicos

- Revelar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel.
- Examinar el estado de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes antes y después de su interacción con un software de geometría dinámica.
- Analizar si los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel son superados luego de la interacción con un SGD.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. Dimensión cognitiva

2.1.1. Concepto de aprendizaje y roles del profesor y el estudiante según la teoría sociocultural

El presente trabajo de investigación se inscribe en un amplio campo de estudio donde convergen diversas teorías psicológicas y educativas denominado *constructivismo.* De acuerdo con Fairstein y Carretero (2007), en el constructivismo "el conocimiento y el aprendizaje no constituyen una copia de la realidad sino una construcción activa del sujeto en interacción con un entorno sociocultural" (p. 179). En este sentido, el aprendizaje se puede concebir como un proceso mediado que resulta de las relaciones interpersonales. Conforme a esta concepción de aprendizaje, esta investigación asume la teoría sociocultural del aprendizaje y el desarrollo cognitivo planteada por el psicólogo soviético Lev Vigotsky como marco de referencia.

Uno de los postulados más importantes de la teoría sociocultural sugiere que el aprendizaje puede inducir saltos evolutivos en el desarrollo cognitivo (Vigotsky, 1979). Esta afirmación contradice los planteamientos piagetianos en donde el aprendizaje se ve condicionado por el desarrollo cognitivo del sujeto en un momento determinado. Así mismo, esta teoría propone dos tesis intrínsecamente relacionadas con los lineamientos metodológicos y procedimentales de esta investigación: la primera, que los procesos psicológicos superiores se desarrollan a partir de los procesos psicológicos elementales en virtud de las relaciones interpersonales, y la segunda, que los procesos psicológicos superiores son mediados por herramientas y signos (Delgado, 2003).

En efecto, la teoría sociocultural consigue establecer un vínculo entre los procesos de aprendizaje y de desarrollo cognitivo del sujeto a partir de la comprensión de la conducta humana. Para alcanzar este cometido Vigotsky se basa en el método genético aludiendo a tres dominios de análisis: el ontogenético, el filogenético y el sociogenético. De acuerdo con Luria y Vigotsky (1992), el dominio filogenético asume el proceso de adaptación darwiniano como principio explicativo de las transformaciones evolutivas de la especie humana. El dominio sociogenético o histórico-cultural se refiere a la evolución del ser humano, no en el sentido biológico, sino como integrante de un grupo social y como transmisor de la herencia cultural. Finalmente, en el dominio ontogenético, que atiende al desarrollo cognitivo individual, es posible apreciar dos líneas de desarrollo: una *natural*, relacionada con los procesos psicológicos elementales, y otra *cultural*, asociada a los procesos psicológicos superiores. En este sentido, es correcto afirmar que Vigotsky realiza una integración de los procesos biológicos y los histórico-culturales para formular una teoría genética e histórico-cultural que da cuenta del desarrollo de la conducta humana.

Ahora bien, es evidente que la teoría sociocultural sugiere una relación entre los *procesos psicológicos elementales* (percepción, atención, memoria y pensamiento) y los *procesos psicológicos superiores* del ser humano (percepción verbalizada, atención voluntaria, memoria cultural-mediata y pensamiento lógico mediado por el lenguaje). En efecto, Vigotsky (1979) establece que los procesos psicológicos elementales se pueden desarrollar hasta conformar procesos psicológicos superiores a partir de la incorporación y dominio de herramientas y signos.

Al respecto, Vigotsky establece cierto paralelismo entre las herramientas materiales y las psicológicas en función del carácter mediador y el origen social que ambas presentan. No obstante, sostiene que la herramienta material está dirigida hacia fuera produciendo cambios en el objeto de la operación, mientras que la herramienta psicológica está orientada hacia adentro y no modifica el objeto sino la conducta del sujeto. Algunas de las herramientas psicológicas son "el lenguaje, diversos sistemas de contar, técnicas nemotécnicas, sistemas simbólicos de álgebra, obras de arte, escritura, diagramas, mapas, dibujos; en definitiva, todo tipo de sistemas convencionales" (Vigotsky, 1981, p. 137).

Este planteamiento refuerza la idea de que todo sujeto accede a las herramientas y signos propios de su cultura por medio de la interacción social para más tarde interiorizarlos de manera individual y hacerlos parte de su funcionamiento intrapsicológico. Así, Vigotsky (1978) señala que "el signo siempre es inicialmente un medio de vinculación social, un medio de acción sobre los otros y solo luego se convierte en un medio de acción sobre sí mismo" (p. 141). De esta manera, el desarrollo de los procesos psicológicos superiores implica la transformación de un proceso de carácter interpersonal en otro de índole intrapersonal cuando los procesos psicológicos elementales del sujeto se tornan procesos psicológicos superiores en virtud de la interacción social y del uso de las herramientas y signos propios de su cultura. Vigotsky (1979) denomina a este de transformación como *internalización*.

Para Vigotsky, la significación, en tanto creación y uso de signos, es la responsable del paso de las funciones psicológicas elementales a las superiores (Vila, 2007). De esta manera, los signos no constituyen una copia de la realidad, sino que conllevan en sí mismos la modificación de la conducta humana. Más aún, Vigotsky concibe el lenguaje como la principal herramienta psicológica de mediación y señala que:

> El lenguaje en origen es social y aparece en el ámbito de la relación con los demás como instrumento privilegiado para regular y controlar los intercambios sociales. Pero, a medida que se va dominando su uso, comienza a emplearse como instrumento auxiliar para la resolución de problemas. Así, del lenguaje social, del lenguaje para la comunicación, se desgaja una parte que, subjetivamente, la criatura lo emplea como si comunicara con alguien, pero, objetivamente, sirve para regular y planificar su propia conducta. Ciertamente, dicho *alguien* es ella misma o, en otras palabras, la criatura habla consigo mismo y se *dice* la manera de afrontar o resolver un problema. En una primera fase, este lenguaje tiene una forma externa —el lenguaje egocéntrico— y, con el tiempo, se va interiorizando —el lenguaje interior— y deja de escucharse porque su forma es interna. Lenguaje egocéntrico y lenguaje interior cumplen la misma función: mediar y amplificar la mente humana, pero se distinguen en que el primero es audible y el segundo no. (Vila, 2007, pp. 220-221)

La trasformación del lenguaje externo en lenguaje interno pone de manifiesto el carácter mediado del proceso de interiorización, no solo por los signos mismos, sino también por la acción externa de un sujeto sobre el aprendiz. En este sentido, la enseñanza de los signos propios de una cultura está a cargo de los sujetos que ya los han incorporado y dominado (Vila, 2007). Esta afirmación incide directamente sobre el contexto escolar ya que permite la democratización del proceso de enseñanza, es decir, ya no concibe la dirección de este proceso como exclusivo del maestro, sino que admite la acción de otros actores como los compañeros de clase más capaces para provocar avances en el aprendizaje de aquellos con mayores dificultades. Por esta razón Vigotsky sostiene que la conducta humana es un producto social emanado de las relaciones interpersonales, relaciones en donde los menos capaces aprenden porque los más capaces les enseñan (Vila, 2007).

Es precisamente la acción de enseñanza de los más capaces sobre los menos capaces a partir de la cual Vigotsky establece una relación entre los funcionamientos interpsicológico e intrapsicológico del sujeto y formula otra de las nociones más importantes de su teoría: la *zona de desarrollo próximo*. Vigotsky (1979) señala que la zona de desarrollo próximo se refiere a la distancia entre el nivel real o efectivo del aprendiz (aquello que puede hacer por sí solo) y su nivel de desarrollo potencial (aquello que puede alcanzar a través de la mediación de otro sujeto más capaz o especializado). En otras palabras, la zona de desarrollo próximo explica que un sujeto puede resolver una tarea específica con la guía de otra persona más capaz que le enseñe el uso de los signos asociados a su actividad, signos que posteriormente interiorizará y podrá utilizar de manera autónoma para la solución de tareas futuras. De este modo, la zona de desarrollo próximo sintetiza varias de las ideas fundamentales de la teoría de Vigotsky ya que pone de manifiesto la relación existente entre los funcionamientos interpsicológico e intrapsicológico porque es en el ámbito de las relaciones sociales donde el sujeto aprende aquello que necesita para actuar autónomamente (Vila, 2007).

En conclusión, Vigotsky ha logrado evidenciar la relación de dependencia existente entre aprendizaje y desarrollo por cuanto ha demostrado que la incorporación de signos modifica la conducta y desarrolla las funciones psicológicas del sujeto. En este sentido, es correcto afirmar que para Vigotsky el aprendizaje constituye un producto de la interacción social ya que es a partir de esta como el sujeto incorpora distintos tipos signos, esquemas de conocimientos y habilidades que más tarde podrá emplear individualmente y a voluntad para la solución de una tarea determinada.

2.1.2. La visualización y el razonamiento en el aprendizaje de la geometría espacial

En la actualidad una gran de variedad de investigaciones consideran que la geometría constituye un campo de acción propicio para el desarrollo de procesos cognitivos como la visualización y el razonamiento. Particularmente, esta investigación se fundamenta en una selección de propuestas teóricas que evidencian la relación existente entre estos procesos en el marco de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Duval (2004) señala que el aprendizaje de los objetos matemáticos implica el uso articulado y simultaneo de variados sistemas de representación ligado a actividades cognitivas trascendentales como la representación, la conceptualización, el razonamiento, la visualización, la comprensión de textos y la resolución de problemas. Además, indica que para asegurar el aprendizaje de la geometría es necesario coordinar por lo menos tres actividades cognitivas: la *construcción* mediada por instrumentos geométricos, el *razonamiento* asociado a las formas discursivas y la *visualización* centrada en las representaciones semióticas (Duval, 1998). Así mismo, señala que cada una de estas actividades tiene funciones epistemológicas diferentes y puede ser enseñada o aprendida de manera independiente de las otras, sin embargo, es posible privilegiar la visualización para que sirva de punto de partida, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción (Marmolejo y Vega, 2012).

Duval (2003) define la visualización como la acción de producir una representación que permita observar un objeto en total ausencia de cualquier percepción visual del objeto representado como si verdaderamente estuviera delante de los ojos. Más aún, la visualización permite distinguir e identificar, ya sea a primera vista (aprehensión inmediata) o en segunda instancia (aprehensión simultánea) lo que se representa. En este sentido, la visualización es un proceso por medio del cual se asocian formas a los objetos (representación). Sin embargo, es preciso señalar que la representación actúa como un instrumento de acceso cognitivo al objeto más no lo sustituye, por tal razón no se debe confundir el objeto con su representación.

Duval (1999) asegura que la visualización utiliza representaciones semióticas para exhibir la organización de las relaciones entre las unidades de representación que conforman un objeto. Estas unidades de representación pueden ser formas 1D o 2D (figuras geométricas), coordenadas cartesianas (gráficos), palabras (redes semánticas), entre otras. Por ejemplo, un cubo está constituido por cuadrados (formas 2D) y segmentos (formas 1D) perpendiculares entre sí. Estas unidades deben estar bidimensionalmente conectadas, ya que no es posible visualizar ningún tipo de organización en unidades discretas (Duval, 1999). De esta manera, visualizar en geometría implica la relación entre los registros de representación tridimensional y bidimensional.

Duval (1999) propone los siguientes niveles de aprehensión de las figuras geométricas relacionados con la visualización:

- **Aprehensión perceptiva.** En este primer nivel se reconocen las unidades figurales que son distinguibles en una figura dada, es decir, se discriminan las partes del todo.
- **Aprehensión operatoria.** En este segundo nivel se efectúan las posibles modificaciones de la figura dada a partir de sus unidades figurales. Cabe señalar que toda figura puede modificarse de varias formas, por ejemplo, mediante la separación y reorganización de sus

unidades figurales para generar nuevas figuras (reconfiguración), a través de ampliación o reducción para modificar su tamaño (modificaciones ópticas), por movimiento (traslación y rotación), etc.

- **Aprehensión discursiva.** En este tercer nivel las figuras por sí solas no constituyen un registro semiótico independiente, sino que sus propiedades están definidas discursivamente, es decir, que se determinan por el enunciado y no por la percepción. En este sentido, una figura representa geométricamente solo lo que ha sido explicitado en términos de sus unidades figurales y de sus relaciones.

De acuerdo con la caracterización propuesta por Duval (1999) sobre los niveles de aprehensión de las figuras geométricas, Castiblanco et al. (2004) formula los siguientes niveles de visualización espacial:

- **Nivel global de percepción visual.** En este primer nivel, los objetos físicos se perciben como un todo y es posible relacionarlos con figuras bidimensionales. La percepción global actúa durante el reconocimiento de formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas. En la percepción de estas formas prototípicas se destacan aspectos no matemáticos como la posición del objeto (boca arriba, boca abajo) o el tipo de trazo utilizado (grueso, delgado). Este es el nivel más elemental de visualización ya que no considera el reconocimiento de relaciones y propiedades.
- **Nivel de percepción de elementos constitutivos.** En este segundo nivel, además de percibir el objeto como un todo, también es posible identificar los elementos de menor dimensión que lo componen. En este nivel, la posición o el tamaño del objeto no son aspectos relevantes para

construir conceptos y relaciones geométricas, sino la identificación de los elementos constitutivos del objeto y las relaciones entre ellos.

- **Nivel operativo de percepción visual.** En este tercer nivel, además de percibir los elementos constitutivos del objeto y las relaciones entre ellos, es posible manipularlos mentalmente para obtener transformaciones visuales del objeto dado. De esta manera, los elementos constitutivos de un objeto se mueven como piezas de un rompecabezas para lograr una nueva configuración relevante para la solución de un problema.

Por otra parte, Gutiérrez (1996) comprende la visualización como un tipo de razonamiento basado en el uso de información visual (*imágenes*) utilizada para resolver problemas o probar propiedades, teniendo en cuenta que la información visual puede ser física (figuras o diagramas) o mental (*imágenes mentales*). Más aún, Gutiérrez (2006) define la visualización como "el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos" (p. 29). En este sentido, la visualización comprende tres aspectos: las imágenes visuales (físicas o mentales), los procesos de visualización y las habilidades de visualización.

Bishop (1989) afirma que una *imagen visual* representa el objeto que se manipula en la actividad de visualización. Estas imágenes visuales pueden ser mentales o físicas, de modo que, una *imagen mental* es la representación mental de un concepto o propiedad relativo a las matemáticas construida a partir de elementos visuales o espaciales, mientras que una *imagen física* es cualquier tipo de representación semiótica (verbal o gráfica) de conceptos o propiedades, que permite la creación o transformación de las imágenes mentales y posibilita efectuar razonamiento visual (Gutiérrez, 1996).

Presmeg (1986) (citada en Gutiérrez, 2006) asegura que las imágenes mentales más utilizadas por los estudiantes al resolver problemas geométricos son:

- *Imágenes concretas* (fotos en la mente): Se trata de imágenes mentales figurativas de objetos reales.
- *Imágenes cinéticas:* Se trata de imágenes mentales que llevan asociada una actividad muscular, como movimiento de una mano, la cabeza, etc. Por ejemplo, cuando un estudiante está describiendo una figura con segmentos paralelos, coloca las manos estiradas paralelas y las mueve de arriba a abajo.
- *Imágenes dinámicas:* Se trata de imágenes mentales en las que imaginamos el objeto visualizado (o alguno de sus elementos) moviéndose. A diferencia de las imágenes cinéticas, en estas imágenes no hay movimiento físico, sino sólo visualizado en la mente. Por ejemplo, podemos crear una imagen mental de una pirámide apoyada en su base y visualizarla girando hasta ponerse apoyada en el ápice. (p. 30)

En esta línea, Zimmermann & Cunningham (1990) señalan que "la visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento" (p. 3). Mientras tanto, Presmeg (1997) define la visualización como el proceso asociado a la construcción, manipulación y transformación de imágenes mentales visuales tanto en la mente como a través de una herramienta informática. Este tipo de posturas sugieren que la visualización es un proceso de funcionamiento externo e interno a la vez, ya que está presente en la creación y manipulación de representaciones mentales y virtuales de los objetos geométricos. Así también, permiten entrever la importancia de las nuevas tecnologías para el desarrollo de la visualización y en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Ahora bien, Gutiérrez (2006) define los *procesos de visualización* como aquellas acciones mentales o físicas que involucran imágenes mentales. Al respecto, Bishop (citado en Gutiérrez, 2006) define dos tipos de procesos que tienen lugar cuando se trabaja con imágenes visuales (mentales o físicas):

- *El procesamiento visual de la información* (VP). Proceso por medio del cual se transforma información no visual en imágenes visuales o una imagen visual ya formada en otras.
- *La interpretación de la información figurativa* (IFI). Proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen.

De acuerdo con Del Grande (citado en Gutiérrez, 2006), las habilidades de visualización necesarias para llevar a cabo los procesos con imágenes mentales descritos previamente son:

- *Percepción de figura y contexto:* Es la habilidad de reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos. Es imprescindible, por ejemplo, para identificar las caras de sólidos transparentes, en los que se ven todas las aristas.
- *Conservación de la percepción:* Es la habilidad de reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, etc.) aunque cambie de posición y deje de verse por completo. Esta habilidad es imprescindible en geometría espacial para manejar sólidos opacos, ya que sólo vemos parte de su superficie. Con frecuencia los niños de Primaria son capaces de hacer descripciones de la parte visible de un poliedro opaco, pero no saben describir esa misma región después de quedar oculta al girar el poliedro.
- *Reconocimiento de relaciones espaciales:* Es la habilidad de identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.). Es necesaria, por ejemplo, para identificar los tipos de caras de un poliedro, su cantidad, su distribución alrededor de los vértices, etc.

- *Discriminación visual:* Es la habilidad de comparar dos imágenes (o dos objetos en la misma imagen) e identificar sus semejanzas y diferencias visuales. (pp. 31-32)

Gutiérrez (2006) sugiere que una manera de mejorar las habilidades necesarias para llevar a cabo los procesos de visualización es relacionar las representaciones tridimensionales de los objetos geométricos con sus representaciones bidimensionales. Por tal razón, propone abordar el aprendizaje de la geometría espacial a través del estudio de los desarrollos planos de sólidos que son un tipo de representación bidimensional de objetos tridimensionales. No obstante, cuando se aborda la geometría espacial a partir de un medio tradicional que hace uso exclusivo del lápiz y el papel es inevitable el uso de representaciones planas y estáticas de objetos espaciales. Al respecto, Gutiérrez (2006) afirma que las representaciones bidimensionales de un cuerpo tridimensional poseen una dificultad intrínseca y es que pueden ocultar información que en el objeto tridimensional real aparece de manera explícita. Por ejemplo, si se dibuja un poliedro opaco no es posible para un observador identificar la parte posterior del sólido a menos que se le proporcione información adicional como el nombre o diversas representaciones desde diferentes posiciones. En la figura 15 se muestran dos representaciones de un poliedro: una opaca que deja entrever lo que podría ser un tetraedro, y otra transparente donde se evidencia que efectivamente el objeto se trata de un octaedro.

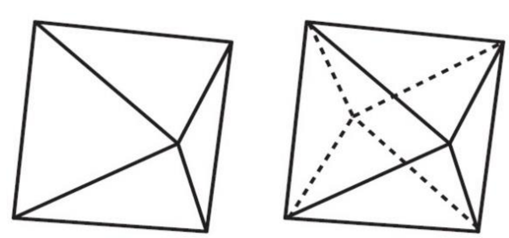


Figura 15. Representaciones opaca y transparente de un octaedro. Fuente: Gutiérrez, 2006, p. 32.

De esta manera, Gutiérrez (1998) señala que el proceso de comprensión de un objeto geométrico espacial a partir de una representación plana implica dos pasos: primero, la interpretación de la figura plana para transformarla en un objeto tridimensional, segundo, la interpretación de este objeto para otorgarle el estatus de objeto de estudio. Así también, afirma que la comprensión de un cuerpo espacial depende de la capacidad de visualización espacial de los estudiantes y de su habilidad de representación o de interpretación sobre las representaciones de otros.

Los desarrollos teóricos planteados hasta el momento sugieren que la visualización y el razonamiento son dos procesos cognitivos indisolubles en el marco del aprendizaje de la geometría, por lo tanto, resulta correcto definir la visualización como un primer nivel de razonamiento que se manifiesta en la habilidad para construir, manipular y transformar imágenes visuales (físicas, mentales o virtuales) a partir de los elementos constitutivos de un objeto y las relaciones entre ellos. De acuerdo con los lineamientos teóricos y metodológicos de esta investigación, es pertinente resaltar dos aspectos implícitos en esta definición. Primero, que la relación entre visualización y razonamiento es más evidente cuando se trata de geometría espacial debido a que en este campo es inevitable la manipulación de representaciones planas de cuerpos espaciales, por esta razón las capacidades de creación de imágenes mentales dinámicas y de interpretación de representaciones planas de cuerpos espaciales son imprescindibles para el desarrollo del pensamiento espacial. Segundo, que el uso de un SGD podría favorecer la construcción de imágenes mentales dinámicas ya que las representaciones tridimensionales de objetos espaciales que estas herramientas informáticas proporcionan son susceptibles de manipulación directa (Presmeg, 1997).

Si bien es cierto que las representaciones proporcionadas por los SGD son modelos bidimensionales de objetos tridimensionales, también es correcto que no existe una representación plana de un cuerpo espacial que suministre al observador la misma cantidad de información que el objeto tridimensional real que representa (Gutiérrez, 1998). Más aún, cualquier representación bidimensional de objetos tridimensionales conlleva la distorsión de alguna de las propiedades del objeto en el paso del espacio al plano y viceversa (Guillen, 1991). Por tal motivo, es apropiado el uso de un SGD para explicitar las transformaciones de un objeto geométrico durante un cambio de registro de representación.

2.1.3. Significado de los poliedros como objeto matemático

De acuerdo con Blumer (citado en Godino, 2002), un objeto matemático es todo aquello que se indica, señala o nombra cuando se construye, comunica o se aprende matemáticas. Estos objetos se clasifican según la función que desempeñan en la actividad matemática. De esta manera, es posible distinguir seis tipos de ellos:

- El *lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.
- Las *situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...). Son las tareas que inducen la actividad matemática.
- Las *acciones del sujeto ante las tareas matemáticas* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- Los *conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función...).
- Las *propiedades o atributos de los objetos mencionados*, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

- Las *argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo). (Godino, 2002, p. 6).

En esta investigación, los poliedros constituyen el objeto matemático sobre el cual se diseñan las situaciones dispuestas para el desarrollo de la visualización espacial. Por este motivo, es necesario precisar el significado de este objeto. Al respecto, Rico (2012) señala que la construcción del significado de un objeto matemático debe realizarse conforme a las tres dimensiones propuestas en el triángulo semántico: la fenomenología, la estructura conceptual y los sistemas de representación (figura 16).

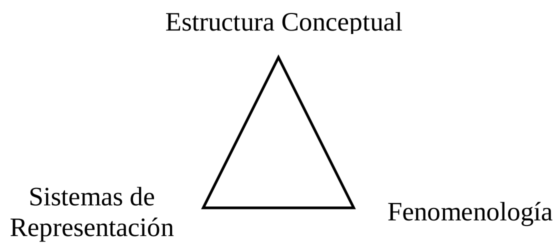


Figura 16. Triángulo semántico asociado a la construcción del significado de un objeto matemático. Fuente: Rico, 2012, p. 52

De acuerdo con Rico (2012), la *fenomenología* abarca los contextos, situaciones o problemas asociados al origen del objeto matemático que lo dotan de sentido, la *estructura conceptual* comprende los conceptos, propiedades, relaciones y argumentos en torno al objeto y los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas; exteriorizan el objeto y hacen posible su manipulación y relación con otros. A continuación, se presentan el análisis fenomenológico, la estructura conceptual y las representaciones semióticas de los poliedros.

a) Análisis fenomenológico de los poliedros

D'Amore (2005) señala que el significado de los objetos matemáticos, por un lado, se modifica a lo largo del tiempo y según las necesidades, y por lado, depende de las matemáticas mismas y de los procesos de resolución. Por esta razón es posible afirmar que el significado de un objeto matemático no es absoluto sino situado ya que está en función del uso específico del objeto en un contexto disciplinar, social, espacial y temporal determinado.

En efecto, los objetos geométricos son en su mayoría abstracciones de fenómenos presentes en la realidad, por tal motivo la pertinencia de someterlos a un análisis fenomenológico subyace en el carácter funcional que este tipo de análisis les asigna. De esta manera, es posible afirmar que los fenómenos asociados a un objeto matemático constituyen la base del conocimiento matemático ya que establecen un vínculo con la realidad en virtud de las aplicaciones de dicho objeto en contextos y campos disciplinares ajenos a las matemáticas.

Históricamente, los poliedros han sido utilizados como fuente de inspiración para interpretar el universo y en diversos campos que hacen uso de las matemáticas como el arte, la arquitectura, la ingeniería y las ciencias naturales. Díaz y Canino (2012) realizan un exhaustivo recorrido histórico para dar cuenta de las aplicaciones más sobresalientes de los poliedros. Según estos autores, el vestigio más antiguo relacionado con los poliedros se trata de unas piedras talladas en el neolítico en las cuales se pueden apreciar regularidades asociadas a los sólidos platónicos (figura 16). Actualmente estas piedras se exhiben en el Museo Ashmolean que está situado en Beaumont Street, Oxford, Inglaterra.

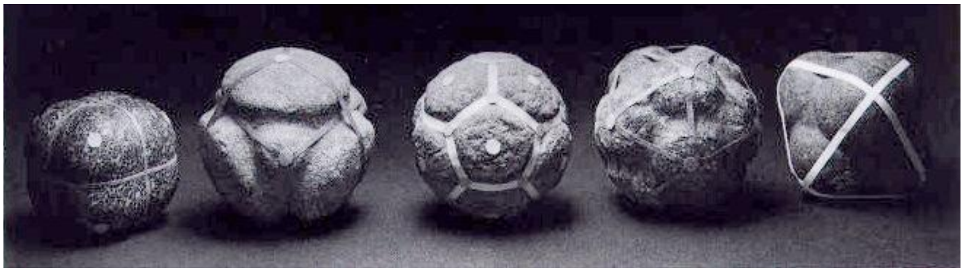


Figura 17. Poliedros de neolítico. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 60.

Filósofos como Platón conciben los poliedros desde un sentido cosmológico, místico y teológico. Platón (citado por Díaz y Canino, 2012, p. 61) plantea en el "Timeo" que el fuego está formado por tetraedros, el aire por octaedros, el agua por icosaedros, la tierra por cubos y que Dios ha utilizado el dodecaedro pentagonal para que sirva como límite de la creación. Johannes Kepler plasmo esta asociación en uno de sus dibujos (figura 18).

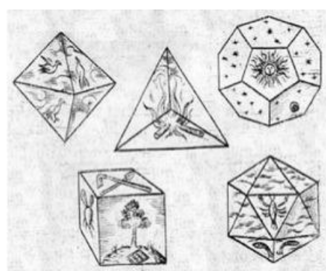


Figura 18. Asociación entre los sólidos platónicos y los elementos fundamentales del Universo. Representación poliédrica visual realizada por Johannes Kepler de la cosmogonía pitagórico-platónica. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 61.

Según Platón, la tierra es el elemento más firme por ello se representa con el cubo que es el sólido con la base más estable. Con respecto al fuego, el agua y el viento el criterio de asignación de poliedros es el siguiente: "*cuanto menor sea el número de bases del poliedro, mayor movilidad posee*". En este sentido, el fuego por ser el elemento de mayor movilidad se representa con el tetraedro (4 caras) que es el poliedro regular con menos caras, el agua por ser el elemento de menor movilidad se representa con el icosaedro (20 caras) que es el poliedro regular con mayor número de caras representa y el aire, que ocupa un estado de movilidad intermedio entre estos tres elementos, se representa con el octaedro (8 caras). Por último, Díaz y Canino (2012) afirman que el dodecaedro pentagonal podría entenderse como el modelo que Dios da al universo. No obstante, los autores también señalan la posibilidad de interpretar el dodecaedro, no como el modelo del universo, sino como el quinto elemento del cual están compuestos los cuerpos celestes (figura 19).

Figura 19. Dalí: El Sacramento de la Eucaristía en la Última Cena, 1955. Colección Chester Dale. Galería Nacional de Arte en Washington. La Última Cena tiene lugar bajo la quinta esencia del dodecaedro cósmico, el símbolo pitagórico-platónico del Universo. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 62.

En el contexto artístico, Díaz y Canino (2012) señalan que artistas como Gaudí, Escher, Durero y Dalí han dotado de un carácter estético a la geometría y, específicamente, a los poliedros (figura 20).

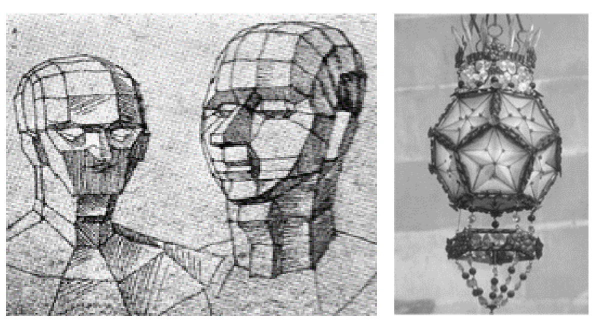


Figura 20. De izquierda a derecha: cabeza de hombre de Durero y la lampara de forma dodecaédrica de la cripta de la Sagrada Familia. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 60.

En arquitectura, el uso de los poliedros es diverso y abarca desde su presencia en construcciones usuales como casas y edificios con forma ortoédrica (figura 21), pasando por las casas de cúpula geodésica (figura 22), hasta otras de mayor complejidad como las pirámides egipcias o de mayor contenido artístico como la pirámide de cristal del Museo del Louvre en Francia y la biblioteca con forma rombicuboctaédrica de Bielorrusia (figura 23).

Figura 21. Casas y edificios con forma ortoédrica. Fuente: elaboración propia.

Figura 22. Casas de cúpula geodésica. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 65.

Figura 23. De izquierda a derecha: las pirámides egipcias, la pirámide de cristal del museo del Louvre en Francia y la biblioteca con forma rombicuboctaédrica de Bielorrusia. Fuente: elaboración propia.

En Ingeniería, se destaca la estructura metálica diseñada por Alexander Graham Bell en 1907 a partir de los desarrollos planos del tetraedro y el octaedro. Esta estructura de gran firmeza, económica y sencilla de reproducir ha sido utilizada masivamente en ingeniería y arquitectura para la construcción de torres y otras redes estructurales de soporte (figura 24).

Figura 24. Arriba: torres de energía y de telefonía. Abajo: reticulados de soporte estructural. Fuente: elaboración propia.

En el ámbito científico, resalta la teoría sobre la estructura poliédrica de los virus propuesta por Crick y Watson en 1956 (Díaz y Canino, 2012). Esencialmente, esta teoría consistía en señalar que la cápsula o conjunto de proteínas que envuelven el material genético (ADN o ARN) de un virus presenta una estructura poliedral determinada por el propio virus. La codificación de la construcción de la cápsula se logra utilizando el mismo tipo de moléculas una y otra vez y siguiendo un patrón de simetría geométrica (figura 25).

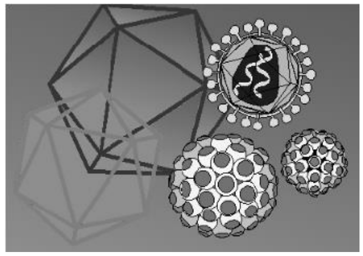


Figura 25. Estructuras poliédricas de los virus propuestas por Crick y Watson en 1956. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 66.

Las configuraciones poliédricas también son observables en el campo de la Geometría Molecular. En este campo se estudian la manera en que los átomos se articulan para construir moléculas y la forma tridimensional de la estructura geométrica molecular que determinan. Un ejemplo de este tipo de configuraciones son las representaciones moleculares del Fullereno C_{60} y la Perovskita ABX_3 (figura 26).

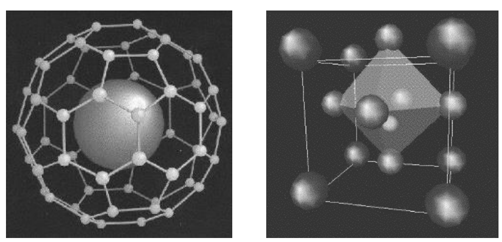


Figura 26. De izquierda a derecha: representaciones moleculares del Fullereno $\boldsymbol{C_{60}}$ y la Perovskita $\boldsymbol{ABX_3}$. Fuente: Díaz y Canino, 2012, p. 66.

Como se ha podido observar, históricamente los poliedros han servido, no solo como herramientas para representar e interpretar la realidad, sino también como fuente de inspiración para llevar a cabo importantes desarrollos en las artes, la arquitectura, la ingeniería y la ciencia. De esta manera, se resalta su importancia funcional para la humanidad y la pertinencia de su presencia en los currículos de matemáticas.

b) Estructura conceptual de los poliedros

Euclides (300 a.c.) define los poliedros como cuerpos sólidos provistos de longitud, anchura y profundidad. Más aún, Godino y Ruiz (2002) sostienen que un poliedro constituye un "sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas" (p. 482). Aquí, cada región poligonal se dice que es una cara del poliedro, los lados de estas regiones poligonales se denominan aristas y los puntos de intersección de las aristas son llamados vértices.

Godino (2002) afirma que la clasificación de los poliedros puede atender a diversos criterios como la regularidad de sus caras, el número de caras y vértices, la forma, la inclinación, entre otros. De acuerdo con la regularidad de sus caras, los poliedros pueden clasificarse en regulares e irregulares. Un poliedro regular es aquel cuyas caras son todas polígonos regulares congruentes, es decir, tienen caras con la misma forma, tamaño y medida en sus ángulos internos. Existen sólo cinco tipos de poliedros regulares (figura 27):

- **Tetraedro regular**: compuesto por cuatro triángulos equiláteros congruentes.
- **Cubo** (o **hexaedro regular**): formado por seis cuadrados congruentes.
- **Octaedro regular**: constituido por ocho triángulos equiláteros congruentes.
- **Dodecaedro regular**: compuesto por doce pentágonos regulares congruentes.
- **Icosaedro regular**: formado por veinte triángulos equiláteros congruentes.

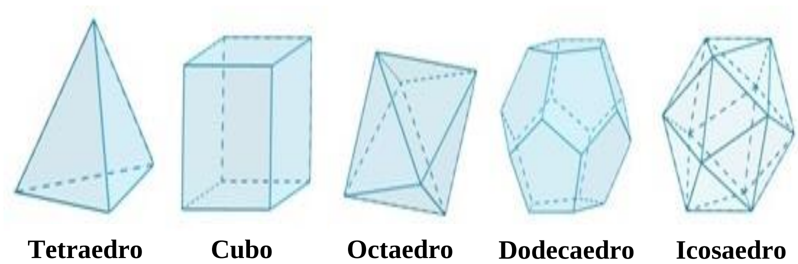


Figura 27. Poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

Por el contrario, un poliedro irregular presenta caras que no son necesariamente congruentes. En general, este tipo de poliedros está compuesto por más de un tipo de caras (figura 27**).**

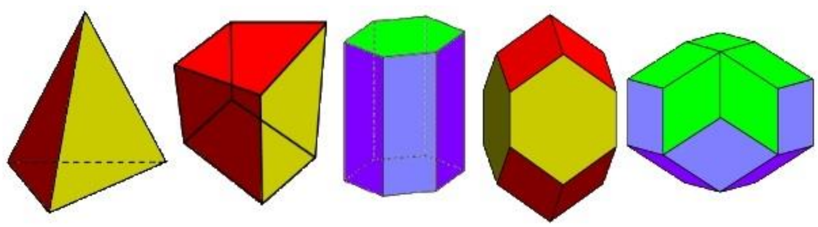


Figura 28. Poliedros irregulares. Fuente: elaboración propia.

Los poliedros irregulares se nombran generalmente por el número de caras que tiene su superficie como se muestra en la tabla 6:

Tabla 6. Nombres de algunos poliedros irregulares.

Nombre	**Número de caras**	**Nombre**	**Número de caras**
Tetraedro	4	Nonaedro	9
Pentaedro	5	Decaedro	10
Hexaedro	6	Undecaedro	11
Heptaedro	7	Dodecaedro	12
Octaedro	8	Tridecaedro	13

Fuente: Elaboración propia.

Los poliedros regulares e irregulares pueden clasificarse como pirámides o prismas. Las pirámides tienen solo una base, sus caras laterales son triángulos y todas las aristas de estas caras tienen un vértice común (figura 29). Por su parte, los prismas tienen dos bases paralelas y sus caras laterales son paralelogramos (figura 30).

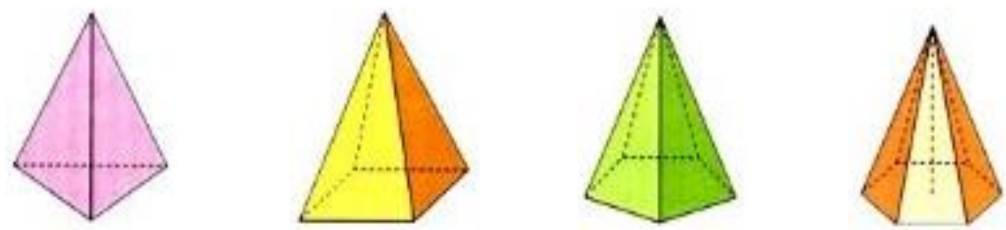


Figura 29. Tipos de pirámides. Fuente: elaboración propia.

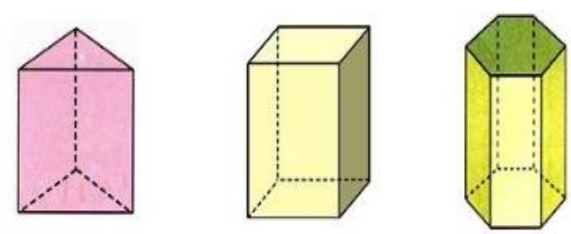


Figura 30. Tipos de prismas. Fuente: elaboración propia.

Según su forma los poliedros pueden ser clasificados como convexos o cóncavos. Un poliedro es convexo si todo segmento que una un par de vértices está contenido dentro del poliedro. Por el contrario, un poliedro es cóncavo si existe al menos un segmento que una un par de vértices y no esté contenido dentro del poliedro (figura 31).

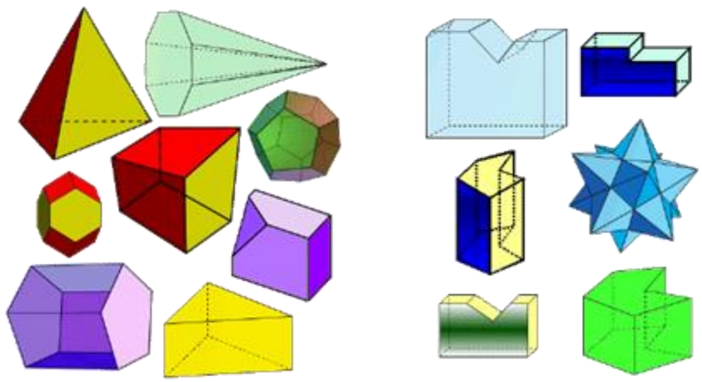


Figura 31. Poliedros convexos y cóncavos. Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con su inclinación los poliedros pueden ser rectos u oblicuos. En los poliedros rectos las aristas laterales son perpendiculares a la base, mientras que en los poliedros oblicuos esta condición no se cumple (figura 32).

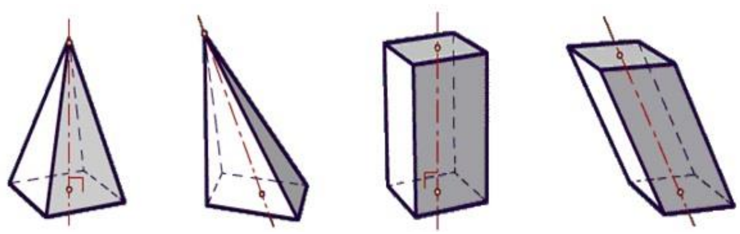


Figura 32. Poliedros rectos y oblicuos. Fuente: Elaboración propia.

Po otra parte, el matemático y físico Leonhard Euler expresó que "*en cualquier poliedro se cumple que la suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas más 2*". Algebraicamente, el teorema de Euler se expresa mediante la siguiente formula:

$$\boxed{\boldsymbol{C + V = A + 2}}$$

En donde $\boldsymbol{C}$ es el número de caras del poliedro, $\boldsymbol{A}$ el número de aristas **y** $\boldsymbol{V}$ el número de vértices.

Por ejemplo, el cubo tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas. En este caso tenemos $\boldsymbol{C = 6}$, $\boldsymbol{V = 8}$ **y** $\boldsymbol{A = 12}$, y es fácilmente apreciable la igualdad:

$$\boxed{\boldsymbol{6 + 8 = 12 + 2}}$$

Ahora bien, si se realiza un corte en una esquina del cubo se obtiene un nuevo poliedro como se muestra en la figura 32:

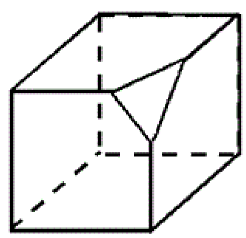


Figura 33. Cubo con corte en una de sus esquinas. Fuente: elaboración propia.

Aunque este nuevo poliedro irregular tiene 7 caras, 10 vértices y 15 aristas, guarda la misma relación entre sus caras, aristas y vértices, así:

$$\boxed{\boldsymbol{7 + 10 = 15 + 2}}$$

En conclusión, la fórmula de Euler permite deducir el número de caras, vértices o aristas de cualquier poliedro si se conocen al menos dos de estos valores.

c) Representaciones semióticas de los poliedros

Platón consideraba los objetos matemáticos como entes abstractos que no pertenecían al mundo real, por tanto, no se podían comprender exclusivamente por la vía de la percepción. En este sentido, surge la necesidad de representarlos estos objetos en un sistema definido que permita su comunicación y manipulación. Al respecto, Duval (2004) sostiene que la actividad matemática, resumida en actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión textual, implica el uso de distintos sistemas de signos (múltiples sistemas de escritura para los números, notación simbólica, escrituras algebraica y lógica) que actúan como lenguajes paralelos al uso del lenguaje natural para expresar relaciones, operaciones, objetos geométricos, gráficos, diagramas, etc. En consecuencia, la noción de *representación* parece ostentar un lugar importante en el aprendizaje de las matemáticas.

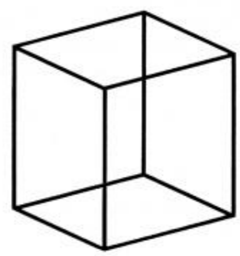
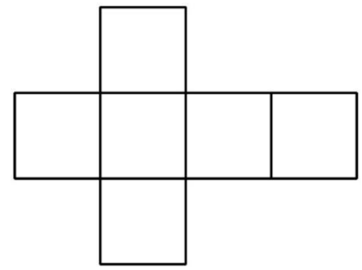
Históricamente existen diferentes evocaciones de la noción de representación[2], sin embargo, este proyecto de investigación resalta la relación de reciprocidad entre las *representaciones semióticas* y las *representaciones mentales*. Según Duval (2004), las representaciones semióticas en matemáticas son aquellas representaciones externas constituidas mediante signos (lenguajes natural, algebraico y lógico, objetos geométricos, gráficos, etc.) que le permiten al sujeto interactuar con el conocimiento matemático. Por otra parte, las representaciones mentales son representaciones internas conformadas por todo el conjunto de imágenes mentales o concepciones que un sujeto puede tener sobre un objeto matemático.

[2] Véase Duval (2004), pp. 25-28.

Vigotsky, Piaget y Denis (citados por Duval, 2004) coinciden en que el desarrollo de las representaciones mentales se realiza a través de la interiorización de representaciones semióticas. Entretanto, Duval (2004) afirma que no puede existir comprensión en matemáticas sin representación ya que las representaciones semióticas son exteriorizaciones de las representaciones mentales del sujeto cumpliendo una función primordialmente comunicativa. En este sentido, interiorizar un objeto matemático y alcanzar la comprensión conceptual implica primero la creación y manipulación de las representaciones semióticas respectivas. Por estas razones, las representaciones mentales no pueden considerarse de manera independiente a las representaciones semióticas (Duval, 2004).

Duval (2004) señala que un objeto matemático puede tener distintas representaciones semióticas en dominios de significación específicos denominados *registros de representación semiótica*. Cada uno de estos registros comporta sus propias reglas y signos que restringen y caracterizan la producción de representaciones semióticas. Al respecto, en esta investigación los poliedros como objeto matemático pueden ser analizados desde tres registros de representación distintos: el registro del lenguaje (oral o escrito), el registro bidimensional y el registro tridimensional. En el registro del lenguaje se hace uso de la lengua natural para evocar el objeto geométrico. En el registro tridimensional (real o virtual) se presenta el poliedro dotado de sus tres cualidades unidimensionales: largo, ancho y alto. Y en el registro bidimensional se exhibe el desarrollo plano del poliedro en cuestión. Un ejemplo de esta situación se puede observar en el estudio del cubo. La tabla 7 muestra como la particularidad de cada registro condiciona el tipo de representación admitida.

Tabla 7. Representaciones semióticas usuales del cubo en los registros de representación lengua natural, tridimensional y bidimensional.

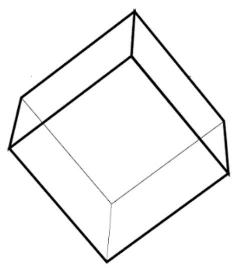
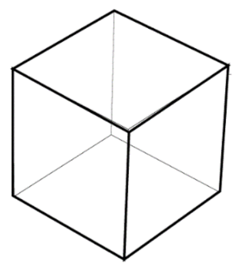
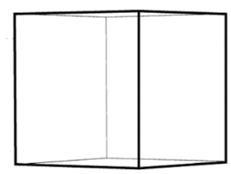
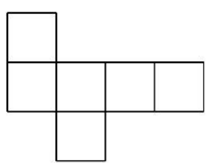
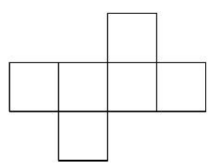
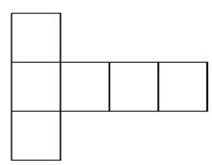
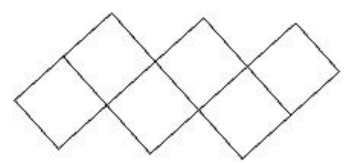
Registro Lengua Natural	**Registro Tridimensional**	**Registro Bidimensional**
El cubo es un poliedro regular definido a partir de 6 caras cuadradas no coplanares y perpendiculares entre sí. Cuenta con 8 vértices y 12 aristas.		

Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, la existencia de múltiples registros de representación semiótica implica necesariamente el estudio de los fenómenos asociados a la producción de representaciones, al cambio de representación en el interior de un mismo registro y al cambio entre distintos tipos de registros. Frente a esto, Duval (2004) afirma que existen al menos tres actividades cognitivas ligadas a la representación: la *formación*, el *tratamiento* y la *conversión*. La formación es el proceso por medio del cual se producen representaciones dentro de un registro semiótico ya se para comunicar o para evocar un objeto real. El tratamiento es la transformación de una representación inicial en otra representación final dentro de un mismo registro. Y la conversión es la transformación que produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

Para ejemplificar las transformaciones de tratamiento y conversión volvamos sobre las representaciones semióticas del cubo. En la *tabla 6* fueron presentadas las representaciones semióticas usuales del cubo en los registros lengua natural, tridimensional y bidimensional, sin embargo, existen otras representaciones de este objeto geométrico. Conforme a la transformación de tratamiento, diferentes vistas sobre el cubo dan lugar a representaciones tridimensionales distintas entre sí, mientras que en el registro bidimensional existen otros desarrollos planos del cubo como se muestra en la tabla 8.

Tabla 8. Algunas representaciones del cubo en los registros de representación tridimensional y bidimensional.

Registro	**Representaciones**			
Tridimensional				
Bidimensional				

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, toda actividad que involucre obtener el desarrollo plano de un poliedro a partir de su representación tridimensional o viceversa constituye un ejemplo de una actividad centrada en la transformación de conversión ya que comprende el tránsito entre los registros tridimensional y bidimensional que comprenden características y propiedades específicas las cuales que determinan la particularidad de sus representaciones (figura 34).

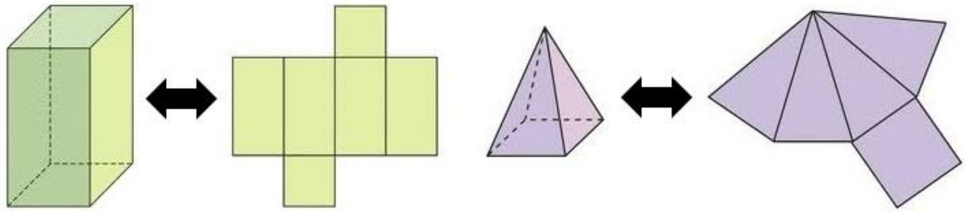


Figura 34. Correspondencia entre los registros tridimensional y bidimensional de dos poliedros. Fuente: elaboración propia.

Duval (2006) señala que la conversión conlleva en sí misma mayor complejidad que el tratamiento debido a que cualquier cambio de registro implica primero el reconocimiento de un mismo objeto matemático en dos representaciones que frecuentemente no tienen nada en común. Por ejemplo, en la *tabla 1*, el cubo se define en el registro lengua natural como un poliedro regular que cuenta con 8 vértices y 12 aristas, sin embargo, cuando se observa su representación en el registro bidimensional parece tener 14 vértices y 19 aristas. Este tipo de incongruencias entre las representaciones de un mismo objeto en registros distintos son precisamente las que deben ser superadas para favorecer el aprendizaje, ya que de no hacerlo se tendría una comprensión parcial del objeto matemático.

Consecuentemente, Duval (2006) sugiere dos cuestiones: la primera, que no resulta conveniente diseñar y ejecutar actividades de aprendizaje basadas únicamente en el tratamiento por cuanto ello constituye un obstáculo para el aprendizaje mismo ya que la mayoría de los alumnos se muestran incapaces de movilizar el conocimiento aprendido por fuera del registro donde se originó su construcción. Y la segunda, que no es suficiente proponer actividades de conversión que solo exijan la "traducción" de un registro a otro, sino más bien, actividades que le permitan al estudiante decidir por sí mismo el tipo de representación que le resulta más conveniente o eficiente para utilizar de acuerdo con las necesidades de la actividad planteada. En este sentido, la conversión constituye un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento, ya que no se reduce exclusivamente a un proceso de codificación o interpretación ni comporta reglas o asociaciones básicas o evidentes.

Duval (2006) indica que la conversión está lejos de ser un asunto espontaneo porque el cambio de sistema de representación siempre constituye un salto cognitivo. Más aún, asegura que "la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión" (Duval, 2004, p. 63). Así también, afirma que para favorecer la coordinación entre distintas representaciones semióticas procedentes de diferentes registros, es necesario diseñar un trabajo de aprendizaje centrado en la diversidad de los registros de representación semiótica más que directamente en los contenidos de enseñanza (Duval, 2004). En este sentido, el aprendizaje logrado por los estudiantes depende del grado de eficacia para realizar actividades de tratamiento y conversión.

En conclusión, la coordinación entre distintas representaciones que provienen de diferentes registros de representación semiótica tiene que ser producto de una labor reflexiva e intencionada por parte del docente que diseña las actividades de conversión. Por tal motivo, esta investigación se propone diseñar situaciones didácticas a partir de actividades de conversión que implican el cambio entre los registros tridimensional y bidimensional. Específicamente, estas actividades pretenden establecer una correspondencia entre los poliedros y su desarrollo plano.

2.2. Dimensión didáctica

2.2.1. Concepto de aprendizaje y roles del profesor y el estudiante según la teoría de situaciones didácticas

La teoría de situaciones didácticas desarrollada por el investigador francés Guy Brousseau, especialista en Didáctica de la Matemática, tiene especial importancia para esta investigación ya que justifica y orienta, tanto teórica como metodológicamente, el diseño y la elaboración de situaciones didácticas. Esta teoría se fundamenta a partir de principios constructivistas del aprendizaje en el sentido piagetiano. En este sentido, Brousseau (1993) asegura el estudiante aprende por adaptación a un medio que es factor contradicciones, dificultades y desequilibrios, de manera similar a lo realizado históricamente por la sociedad humana. Por tal motivo, es correcto afirmar que el medio representa un elemento determinante para el aprendizaje.

La teoría de situaciones didácticas permite modelar las interacciones entre alumno, profesor y saber con relación al *medio*. En consecuencia, se obtiene una nueva interpretación del sistema didáctico a partir de esta teoría (figura 35).

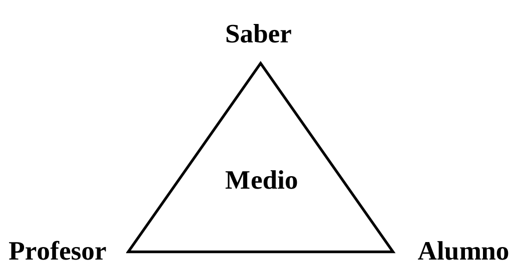


Figura 35. Sistema didáctico según la teoría de situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau. Fuente: elaboración propia.

Para Brousseau (1993), el *conocimiento* representa el conjunto de juicios que utiliza el alumno para construir, justificar, verificar y demostrar la validez de sus argumentos, mientras que el *saber* constituye un conocimiento plenamente aceptado por una comunidad científica, tal es el caso del conocimiento matemático. En consecuencia, el saber es un conocimiento institucionalizado que posee un mayor estatus cultural frente al conocimiento.

Si bien el profesor no puede recrear en la clase de matemáticas las condiciones epistemológicas que dieron lugar al saber, sí es su tarea *recontextualizar* y *repersonalizar* este saber para que el alumno reconozca su pertinencia en los contextos científico y cultural de su época y pueda iniciar su propia *reconstrucción* del conocimiento científico. Para llevar a cabo esta tarea, el profesor debe simular un entorno de investigación científica que permita a los estudiantes explorar, plantear y verificar hipótesis, hacer preguntas, formular argumentos y proponer procedimientos de solución. Más aún, debe configurar un medio en donde el conocimiento que se desea construir constituya una solución a los problemas propuestos (Brousseau, 1993).

Según Godino (1991), el medio didáctico está conformado por todas aquellas herramientas y situaciones didácticas dispuestas intencionalmente por el profesor para que el alumno desarrolle su actividad matemática y reconstruya un conocimiento especifico. No obstante, “para que el alumno *construya* el conocimiento, es necesario que se interese por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno” (Godino 1991, p. 21).

Una situación didáctica puede ser entendida en dos sentidos: como una situación utilizada con el fin didáctico de enseñar (análoga a un problema o ejercicio matemático), ya sea que provea autonomía de acción al estudiante o que precise la intervención del profesor para producir efecto; o como una situación que describe y comprende todas las características del entorno didáctico del alumno, es decir, de todo aquello inherente al proceso de enseñanza, incluyendo al profesor, sea que este intervenga o no (Brousseau, 2000). Si se conjugan estas interpretaciones es posible asumir la situación didáctica como un problema matemático intencionalmente construido por el profesor para que el alumno construya un saber determinado bajo ciertas condiciones de enseñanza.

Toda situación didáctica comporta un conjunto reglas de juego que permiten su desarrollo denominado *contrato didáctico*. Brousseau (1993) señala que este contrato no existe de manera explícita, sino que es una creación ficticia donde profesor y alumno vislumbran las acciones que cada uno espera uno del otro y cómo se llevaran a cabo. No obstante, este contrato puede explicitarse estableciendo los modos de trabajo y concretando las expectativas del docente frente al grupo y viceversa. En este sentido, es posible advertir que el contrato didáctico presenta variabilidad ya que depende de las acciones ejercidas sobre el medio por un alumno en particular y del tipo de intervenciones que realice el profesor al respecto. Así mismo, es preciso señalar que la imposibilidad de un contrato didáctico totalmente explicito radica en las paradojas que ello involucra. Por ejemplo, no se puede construir conocimiento mediante una situación a-didáctica, la cual implica el trabajo autónomo y diferenciado de cada alumno, si previamente el profesor no ha dado las indicaciones explicitas sobre lo que pretende con dicha situación. En este este caso no se podría construir conocimiento porque el mismo ya estaría dado.

Durante el desarrollo de una situación didáctica pueden existir momentos que admiten la intervención con fines de enseñanza por parte del profesor y otros que no la contemplan. De esta manera, Al respecto, Brousseau (1993) denominan *fases a-didácticas* o *situaciones a-didácticas* a aquellos momentos en los cuales el alumno posee total autonomía para desarrollar su actividad matemática (exploración, elaboración y verificación de hipótesis, formulación de argumentos, etc.) a partir de sus conocimientos previos y de manera independiente a toda acción intencionada de enseñanza del profesor. De esta manera, la fase a-didáctica se puede interpretar como una situación de aprendizaje y no de enseñanza.

Durante una fase a-didáctica el profesor debe procurar mantenerse al margen de la actividad del alumno sin ausentarse por completo del proceso de enseñanza, En este caso, las intervenciones del profesor se reducen a formular preguntas orientadoras que no expliciten ninguna estrategia de solución, sino que permitan a los alumnos construir el conocimiento por sí mismos. Aún más, el papel del profesor consiste en guiar y animar la actividad del alumno para mantenerlo enfocado en la situación. A este proceso Brousseau (citado en Panizza, 2007) lo denomina *devolución*.

Generalmente, una situación didáctica conjuga fases a-didácticas y didácticas que se pueden clasificar en:

- *Fase de acción*. Comprende el trabajo individual del estudiante sobre un problema mediante la aplicación de sus conocimientos previos para la reconstrucción de un conocimiento determinado. Aquí el estudiante interactúa individualmente con el medio didáctico con la intención de resolver un problema y adquirir un conocimiento nuevo.

- *Fase de formulación*. Constituye un trabajo de interacción grupal con el medio didáctico donde es necesaria la comunicación entre los estudiantes para compartir sus experiencias frente a la situación propuesta. En este sentido, la situación de formulación consiste básicamente en enfrentar a un grupo de estudiantes con un problema dado. No obstante, es fundamental que cada integrante del grupo participe activamente del proceso comunicando sus ideas e interactuando con el medio didáctico.
- *Fase de validación*. Se presenta una vez que los estudiantes han interactuado con el medio didáctico de manera individual o grupal. En esta fase se ponen a juicio general la validez de los argumentos o estrategias de solución frente al problema dado.
- *Fase de institucionalización*. Tiene lugar luego de que los alumnos se han enfrentado a las fases de acción, formulación y validación y corresponde al momento en el que el profesor recapitula y formaliza el conocimiento. En este punto el docente presenta los resultados de la situación a-didáctica propuesta de forma ordenada y realiza las aclaraciones conceptuales pertinentes acerca del conocimiento en cuestión. Así también, devela todas aquellas intenciones y conocimientos que no fueron explicitados al alumno antes de comenzar el desarrollo de la situación. (Chavarría, 2006)

Sin embargo, diseñar una situación didáctica no solo implica planificar cada una de sus fases, sino también anticipar la aparición de posibles *obstáculos* de diversa índole que dificultan la reconstrucción del conocimiento. Brousseau (1983) señala que estos obstáculos son reproducibles, persistentes y se manifiestan por medio de errores que no son productos del azar o de la falta de conocimiento, sino que son el resultado de un conocimiento previo mal adaptado. Estos obstáculos presentan las siguientes características:

- son un conocimiento y no una falta de conocimiento;
- el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a cierto contexto que encuentra con frecuencia,
- cuando este conocimiento se usa fuera de este contexto genera respuestas incorrectas,
- el alumno se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor,
- después de haber notado la inexactitud del conocimiento, el alumno continúa manifestándolo de forma esporádica.

Godino (2009) advierte que el éxito previo de un conocimiento es el que provoca su resistencia a la modificación o al rechazo, convirtiendo en un obstáculo para la construcción de un conocimiento posterior, razón por la cual es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber. En este sentido, los obstáculos son conocimientos que poseen un dominio conceptual que les proporciona sentido y validez en un contexto especifico, pero no por fuera de él.

Por ejemplo, la sustracción definida en el sistema de los números naturales no admite restar un número mayor a un número dado, pero en el sistema de los números enteros sí es posible realizar esta operación dando lugar a resultados negativos. En este caso, la restricción previa otorgada a la sustracción tiene validez en el sistema de los números naturales, pero constituye un obstáculo que dificulta su comprensión en el sistema de los números enteros ya que generalmente los estudiantes reproducen el algoritmo de la sustracción como inicialmente fue presentado sin tener en cuenta la ley de los signos establecida para la adición de números enteros. Al respecto, Becerra *et al* (2012) determinaron que los alumnos: **i)** interpretan la sustracción de números negativos como la acción de quitar el sustraendo al minuendo incurriendo en errores como $\mathbf{8-(-3)=5}$ y **ii)** suponen que el minuendo siempre debe ser mayor que el sustraendo como se exige en los naturales, de modo que invierten el orden de los números dados en la sustracción dada para efectuar una operación conocida, esto es, si es $\mathbf{2-5}$ cambian a $\mathbf{5-2}$.

Según Brousseau (1998), los obstáculos asociados al sistema didáctico se pueden clasificar en tres tipos de acuerdo con las condiciones de su origen: *ontogenéticos, didácticos y epistemológicos*. Los *obstáculos de orden ontogenético* se deben a las limitaciones neurofisiológicas específicas que condicionan la capacidad cognitiva y operativa de un estudiante. Los *obstáculos de orden didáctico* dependen de todas aquellas elecciones didácticas concebidas para llevar a cabo el proceso de enseñanza: proyecto educativo, modelo pedagógico y didáctico, organización curricular, medio didáctico, situaciones didácticas, entre otras. Si estos obstáculos se conocen, entonces deben ser evitados. Los *obstáculos de orden epistemológico* están relacionados propiamente con las condiciones históricas de formación del conocimiento. Si bien es cierto que este hecho no implica reproducir tales condiciones el en el aula de clase durante el proceso de enseñanza, sí es innegable que no pueden ni deben ser evitados, por el contrario, deben ser encontrados, explicitados y superados para alcanzar un salto conceptual que permita la construcción de nuevo conocimiento. Frente a este tipo de obstáculos, Godino (2009) sugiere que para superarlos se deben diseñar situaciones didácticas que permitan evidenciar los obstáculos y hacer conscientes a los estudiantes de la necesidad imperiosa de cambiar sus concepciones y estrategias.

En este punto es factible percibir que la noción de obstáculo se encuentra directamente relacionada con la concepción de aprendizaje. Al respecto, Brousseau (1983) considera que los conocimientos evolucionan, en el sentido piagetiano, por la acción de dos procesos cognitivos complementarios: uno de *asimilación*, en donde se integran nuevos esquemas de conocimiento a partir de la interacción del sujeto con un medio físico, y otro de *acomodación*, en donde los nuevos esquemas de conocimiento inducen una modificación o perfeccionamiento de los esquemas previos del sujeto hasta alcanzar un estado de equilibrio cognitivo que no presenta contradicciones entre estos esquemas. En este sentido, el aprendizaje constituye un proceso de adaptación cognitiva evidenciado por el estado de equilibrio. Por lo tanto, y dado que es posible concebir el obstáculo como un conocimiento previo inadaptado, entonces las acciones de encontrar obstáculos y ayudar al alumno a superarlos son condiciones necesarias para favorecer el aprendizaje.

Si bien es cierto que la teoría de situaciones didácticas asume las ideas principales de la teoría genética de Jean Piaget para justificar la construcción de conocimiento, también es correcto que no rechaza los postulados de la teoría sociocultural de Lev Vigotsky sobre los cuales se fundamenta esta investigación. De hecho, es posible establecer una relación entre el proceso de internalización planteado por Vigotsky y los procesos de asimilación y acomodación propuestos por Piaget. Al respecto, ambas teorías plantean que la construcción del conocimiento implica una reconstrucción permanente de esquemas internos que modifica la conducta de sujeto. No obstante, para Piaget dicha reconstrucción es un proceso individual donde el sujeto aprende a través de su interacción con el medio, y para Vigotsky, es un proceso interpersonal donde el sujeto aprende a partir de la interacción social.

De acuerdo con la teoría de situaciones didácticas, la interacción social tiene lugar durante las fases de formulación e institucionalización de una situación didáctica ya que es aquí donde el proceso de reconstrucción del conocimiento por parte del alumno se ve mediado por la acción de sus compañeros y del profesor, respectivamente. No obstante, también es preciso señalar que durante el desarrollo de una situación didáctica también existen momentos, denominados fases de acción, en las cuales el alumno puede reconstruir el conocimiento a partir de su interacción con un medio didáctico determinado independientemente de la mediación de otro sujeto que proporciona la debida retroalimentación.

En conclusión, la teoría de situaciones didácticas no solo fundamenta y sugiere el diseño de situaciones didácticas para la construcción del conocimiento, sino que también establece que el aprendizaje implica la adaptación de un alumno a un medio dado a través de su propia acción y de la mediación de otro sujeto. Dicha adaptación implica superar los obstáculos de orden epistemológico o didáctico que pueden emerger durante el desarrollo de una situación didáctica. Por tal razón, el medio didáctico debe contener elementos familiares o próximos a un entorno conocido por el alumno para que se puedan generar soluciones por adaptación a las pequeñas perturbaciones o variables didácticas intrínsecas al medio o introducidas intencionalmente por el profesor (Brousseau, 1993). De esta manera, durante el desarrollo de una situación didáctica el conocimiento aparece como solución a los problemas propuestos, el estudiante es el encargado de la reconstrucción activa de este conocimiento a partir de su interacción con agentes mediadores como sus compañeros y el docente alrededor de un medio didáctico determinado y el profesor es quien orienta la actividad del estudiante e institucionaliza del conocimiento.

En particular, esta investigación se propone revelar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel. Más aún, esta investigación permite que la actividad geométrica de los estudiantes se desarrolle en dos medios didácticos distintos: uno tradicional que hace uso exclusivo del lápiz y el papel y otro que integra un SGD. Por supuesto, las situaciones didácticas propuestas contemplan sus debidas fases didácticas, bajo la orientación directa del profesor, y a-didácticas, en las cuales el alumno debe asumir la construcción del conocimiento a partir de su propia interacción con las herramientas dispuestas en el medio dado.

2.2.2. El aprendizaje y su relación con la Teoría de Situaciones Didácticas y los Softwares de Geometría Dinámica

Este trabajo de investigación comprende las implicaciones del desarrollo de la visualización en el aprendizaje. Por tal motivo, ha sido necesario construir un marco teórico que dé cuenta de la relación entre estos dos procesos cognitivos. Al respecto, investigadores con un enfoque constructivista como Lev Vigotsky y Guy Brousseau sostienen que el aprendizaje se produce a partir de la mediación de un sujeto externo al aprendiz y en la interacción con un medio. Por otra parte, investigadores como Norma Presmeg conciben la visualización como un proceso mental y físico a la vez que contempla la mediación de herramientas computacionales. En este sentido, resulta coherente la propuesta de configurar un medio didáctico a partir de un SGD para desarrollar la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros tridimensional y bidimensional.

Un SGD es un programa informático que permite el estudio de cualquier aspecto de las matemáticas susceptible de ser interpretado geométricamente. Este tipo de herramientas constituyen instrumentos de valiosa utilidad para desarrollar, por un lado, la visualización espacial, porque proveen representaciones manipulables de objetos tridimensionales necesarias para crear imágenes mentales dinámicas, y por otro, el razonamiento, ya que permiten la creación y comprobación de hipótesis a partir de objetos geométricos estudiados. En este sentido, Arcila, Bonilla y Cardona (2013) establecen que el aprendizaje se configura a partir de las retroacciones que el estudiante establece con el SGD.

En esta investigación, el SGD Poly Pro ha sido seleccionado como la principal herramienta de uno de los medios dispuestos para que los estudiantes desarrollen su actividad matemática. Poly Pro constituye un ambiente de realidad virtual que permite la manipulación de poliedros y ofrece vistas de estos desde diversos ángulos. Cabe resaltar que el trabajo a desarrollar con Poly Pro será orientado por situaciones didácticas cuyas tareas implican el cambio entre los registros tridimensional y bidimensional.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo de investigación

La revisión literaria llevada a cabo durante la elaboración del estado del arte de esta investigación reveló importantes avances en materia de visualización, sin embargo, no fue posible observar trabajos que proporcionen orientaciones didácticas para superar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros. Más aún, ninguna investigación examinada se enfoca al menos en evidenciar estos obstáculos. En este sentido, esta investigación presenta rasgos exploratorios, descriptivos y explicativos, ya que se propone: i) examinar un fenómeno poco estudiado, ii) describir cómo se manifiesta y cuáles son sus características y iii) explicar las causas que lo originan (Hernández et al., 2014).

3.2. Enfoque de la investigación

Para alcanzar los objetivos que orientan esta investigación se ha optado por un enfoque metodológico de carácter mixto que conjuga aspectos de los métodos de análisis cuantitativo y cualitativo. De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), el método mixto representa un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos que implican la recolección, el análisis, la integración y la discusión conjunta de datos cuantitativos y cualitativos para realizar inferencias que den cuenta de toda la información obtenida. Algunas de las ventajas que ofrece este enfoque son: i) proporcionar una perspectiva integral del fenómeno de estudio, ii) permitir mayor validez interna y externa del estudio, iii) advertir relaciones o perspectivas ocultas que no pueden ser detectadas por el uso exclusivo de un método y iv) apoyar con mayor solidez las inferencias científicas (Hernández et al., 2014).

Los aportes de cada método de análisis en el enfoque metodológico mixto son distintos pero complementarios. Por una parte, el método de análisis cuantitativo permite la medición numérica y el tratamiento estadístico de los datos para establecer pautas de comportamiento que permitan validar o refutar hipótesis (Hernández et al., 2014). En esta investigación, el análisis cuantitativo utiliza elementos propios de la estadística descriptiva, como la creación de tablas de frecuencias y elaboración de diagramas de barras y circulares, para determinar y comparar los porcentajes de acierto de los estudiantes en cada una de las tareas propuestas antes y después de su interacción con el SGD.

Por otra parte, el método de análisis cualitativo permite confrontar los datos obtenidos con los elementos dispuestos en el marco teórico de referencia (Hernández et al., 2014). En esta investigación, el análisis cualitativo se utiliza para revelar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros, teniendo en cuenta que estos obstáculos se encuentran de forma implícita en las estrategias de solución y discursos de los estudiantes.

3.3. Diseño de la investigación

De acuerdo con el carácter esencialmente cualitativo de esta investigación y al tipo de datos que se proyectan obtener, esta investigación responde al diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante (DIAC). En este tipo de diseño se recolectan simultáneamente datos cuantitativos y cualitativos, pero existe un método predominante que orienta el proyecto, de modo que el método de menor prioridad se inserta dentro del que se considera central. En consecuencia, el método secundario puede responder a diferentes aspectos del método primario (Hernández et al., 2014). Particularmente, en esta investigación el método cualitativo tiene preponderancia sobre el cuantitativo, por tal motivo los datos cuantitativos se analizan con base en categorías cualitativas procedentes de la teoría. Dado que los datos recolectados por ambos métodos son comparados o mezclados en la fase de análisis, este diseño proporciona una visión más amplia del fenómeno estudiado que si empleara un solo un método (Hernández et al., 2014).

3.4. Población y muestra

Esta investigación se llevó a cabo en la jornada de la tarde de la sede central de la Institución Educativa Ateneo. La Institución Educativa Ateneo está ubicada en la zona urbana central del municipio de Pradera en el departamento del Valle del Cauca y cuenta con 5 sedes para prestar su servicio a la comunidad.

La población está constituida por 63 estudiantes del grado octavo matriculados en jornada de la tarde de la sede central de la Institución Educativa Ateneo. Dado que el propósito de esta investigación es contribuir al desarrollo de visualización espacial en un grupo determinado, entonces fue seleccionada al azar una muestra de 21 estudiantes. El número de estudiantes participantes se calculó a partir de la siguiente fórmula estadística:

$$n = \frac{N \cdot Z^2 \cdot p \cdot q}{e^2 \cdot (N-1) + Z^2 \cdot p \cdot q}$$

Donde n es el tamaño de la muestra, N es el tamaño de la población, Z es el nivel de confianza esperado sobre los resultados de la investigación, e es el margen de error permitido, p es el porcentaje de aceptación de las hipótesis y q el porcentaje de negación de estas.

Los valores utilizados para determinar el tamaño de la muestra de esta investigación son: $N = 63$, $Z = 95\% = 1.96$, $e = 5\% = 0.05$, $p = 98\% = 0.98$ y $q = 2\% = 0.02$. A partir de estos se obtiene una muestra aproximada por exceso de 21 estudiantes:

$$n = \frac{63 \cdot 1.96^2 \cdot 0.98 \cdot 0.02}{0.05^2 \cdot (63-1) + 1.96^2 \cdot 0.98 \cdot 0.02} \approx 21$$

Es preciso señalar que se definió un porcentaje de aceptación de las hipótesis de 98.1% con base en los resultados de las investigaciones analizadas para elaborar el estado del arte de este trabajo los cuales evidencian desarrollo en el proceso de visualización de los estudiantes cuando utilizan un SGD.

3.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Las técnicas seleccionadas para llevar a cabo la recolección de datos de esta investigación son la observación y el registro documental. La observación aquí referida implica la participación del investigador durante la experimentación, no para sugerir soluciones, sino para registrar aquellos sucesos que considere importantes durante la experimentación (Hernández *et al.*, 2014). En esta investigación, la observación permite dar cuenta de las particularidades asociadas al comportamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas geométricos en donde deben hacer uso de sus habilidades de visualización espacial. Por otra parte, el registro documental contiene principalmente las notas escritas de los estudiantes y las notas del investigador. Las notas de los estudiantes expresan sus estrategias de solución, resultados y las dificultades encontradas para llevar a cabo las tareas propuestas, mientras que las notas del investigador contienen las inquietudes de los estudiantes, el registro de aquellos sucesos considerados como relevantes durante la experimentación y los posibles aspectos a mejorar en las situaciones didácticas.

Ahora bien, los instrumentos dispuestos para la recolección de los datos cualitativos y cuantitativos son tres guías de trabajo para los estudiantes. Estas guías han sido diseñadas con base en la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986), de este modo cada una de las situaciones didácticas propuestas en ellas contempla sus debidas fases de acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento.

Las guías fueron nombradas utilizando el rótulo “Guía de Trabajo” seguido de un número. En consecuencia, su codificación utiliza la letra “G” y el mismo número. Los nombres y códigos de las guías son los siguientes: Guía de Trabajo 1 (G1), Guía de Trabajo 2 (G2) y Guía de Trabajo 3 (G3). Por otra parte, las situaciones propuestas en las guías han sido codificadas a partir de la letra "S", un número, un guion (-) y el código de la guía en que aparecen. Así, la situación S1-G1 es la Situación 1 de la Guía de Trabajo 1, mientras que la situación S2-G3 corresponde a la Situación 2 de la Guía de Trabajo 3.

La Guía de Trabajo 1 (G1) (ver anexo 1) ha sido diseñada para ser desarrollada en un medio que hace uso exclusivo del lápiz y el papel y está compuesta por 4 situaciones didácticas: S1-G1, S2-G1, S3-G1 y S4-G1. La situación S1-G1 ha sido diseñada con el objetivo de indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes. Específicamente, acerca del tipo de representaciones semióticas (tridimensionales o bidimensionales) con las cuales cuentan los estudiantes y sobre las posibles relaciones que establecen entre ellas. Mientras tanto, a partir de las tareas de la situación S2-G1 se pretende determinar el nivel de visualización de los estudiantes y sus habilidades de visualización espacial. Por otra parte, las situaciones S3-G1 y S4-G1, son principalmente actividades de conversión, es decir, están enfocadas al cambio de registro de representación. En particular, la situación S3-G1 implica cambiar del registro tridimensional al bidimensional y la situación S4-G1 del registro tridimensional al bidimensional. Los poliedros presentados en estas situaciones son traslucidos y opacos y con forma usualmente conocida.

La Guía de Trabajo 2 (G2) (ver anexo 2) ha sido diseñada para ser desarrollada a través de la mediación del SGD Poly Pro y está compuesta por 6 situaciones didácticas: S1-G2, S2-G2, S3-G2, S4-G2, S5-G2 y S6-G2. Cada una de estas situaciones contiene tareas de reconocimiento del tipo de figuras planas que son las caras del poliedro, de conteo de elementos constitutivos y de conversión. Las tareas de conversión implican cambiar del registro tridimensional al bidimensional mediante la generación en papel del desarrollo plano de los poliedros dados en el software. Cabe señalar que algunos de los poliedros dados es esta guía también son presentados en la Guía de Trabajo 1. En conjunto, estas situaciones tienen como principal objetivo proveer imágenes dinámicas susceptibles de manipulación virtual mediante Poly Pro para que los estudiantes elaboren sus propias imágenes mentales dinámicas.

La Guía de Trabajo 3 (G3) (ver anexo 3) también ha sido diseñada para ser desarrollada en un medio que hace uso exclusivo del lápiz y el papel y está compuesta por 3 situaciones didácticas: S1-G3, S2-G3 y S3-G3. La situación S1-G3 ha sido concebida para exponer los conocimientos previos de los estudiantes en lo que a representaciones semióticas bidimensionales o tridimensionales se refiere. Mientras tanto, las situaciones S2-G3 y S3-G3 son actividades de conversión enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional. Los poliedros presentados en estas situaciones son opacos y de forma atípica en su totalidad.

3.6. Procedimiento

El desarrollo de cada guía de trabajo implica una sesión de experimentación. Por lo tanto, se tiene un total de tres sesiones experimentales para la recolección de datos. Por disposiciones logísticas, estas sesiones fueron realizadas día de por medio en dos espacios distintos. Para la primera y tercera sesión, que respectivamente contemplaban el desarrollo de las guías G1 y G3, se utilizó un salón habitual en donde los estudiantes tenían la oportunidad de mover sus puestos a voluntad o según las indicaciones del investigador. Para la segunda sesión, se hizo uso de una de las salas de informática de la Institución Educativa Ateneo. En este espacio, los estudiantes disponían de un computador personal para desarrollar las tareas propuestas en G2. El tiempo límite para la primera sesión fue de 3 horas, mientras que la segunda y tercera sesión contaron con un tiempo máximo de 2 horas cada una.

Durante cada sesión los estudiantes tuvieron espacios de trabajo individual (fase de acción), de trabajo grupal (fase de formulación) y de validación de argumentos (fase de validación). En estos momentos el trabajo del profesor-investigador consistía, por una parte, en supervisar y orientar la actividad matemática de los estudiantes sin sugerir soluciones, y por otra, en registrar todos aquellos aspectos que consideró importantes para la investigación. Al final de cada sesión experimental, el profesor realizó las aclaraciones conceptuales pertinentes sobre el conocimiento en cuestión. Todo esto de acuerdo con los lineamientos teóricos y metodológicos de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986).

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

5.1. Análisis e interpretación de los datos obtenidos a partir del desarrollo de las situaciones de la guía G1 (anexo 1)

La información obtenida a partir del procesamiento de los datos suministrados por el desarrollo de la situación S1-G1 señala que aproximadamente el 86% de los estudiantes no relaciona una representación bidimensional con un objeto tridimensional (figura 36) siendo el cuadrado y el triángulo las representaciones utilizadas por la mayoría de los sujetos para referirse a los objetos dados.

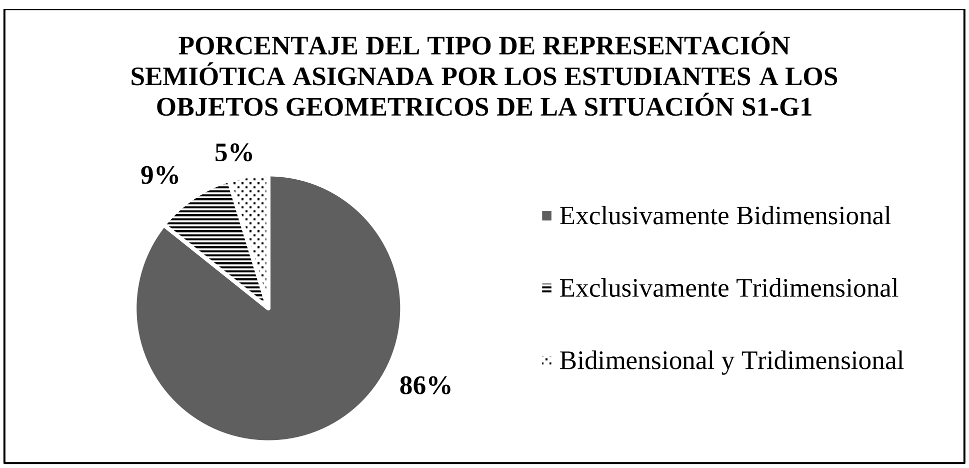


Figura 36. Tipo de representación semiótica asignada por los estudiantes a los objetos de la situación S1-G1. Fuente: elaboración propia.

Los resultados frente a la situación S1-G1 evidencian una escasez de representaciones semióticas espaciales que impide percibir un objeto tridimensional a partir de una representación bidimensional.

Por otra parte, los datos obtenidos mediante la tarea de la situación S2-G1 en donde se indaga por el tipo de figuras planas que son las caras de los objetos tridimensionales dados en papel, demuestra que los estudiantes tuvieron mayor porcentaje de acierto en los objetos 1 y 2 (figura 37). Más aún, cuando se preguntó a los estudiantes sobre el nombre de cada uno de los objetos dados, solo surgieron respuestas correctas frente a estos dos objetos. De acuerdo con los estudiantes, el nombre de los objetos 1 y 2 es de conocimiento general debido a la habitual referencia de la pirámide y el cubo en el contexto geométrico escolar y a los distintos objetos reales que poseen una forma similar a ellos.

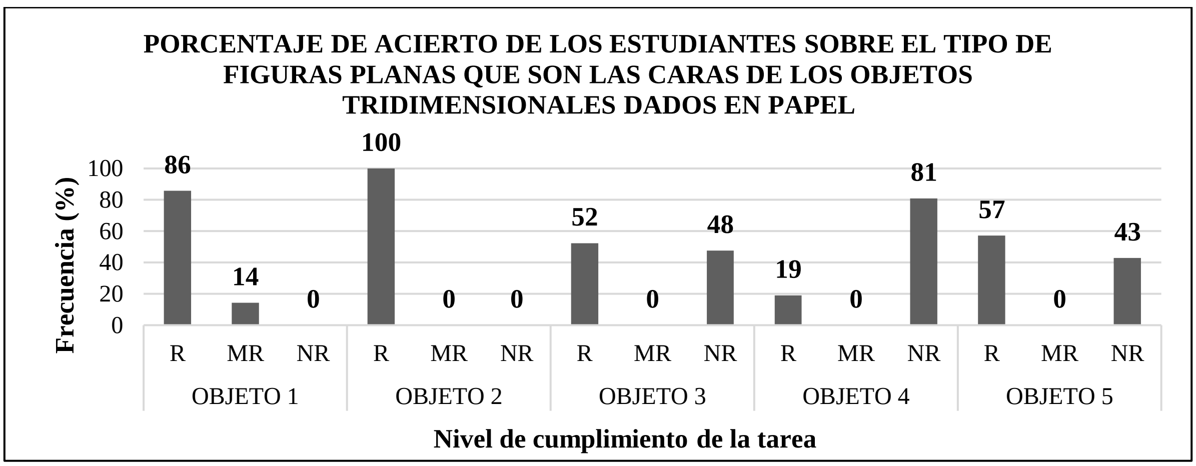


Figura 37. Porcentaje de acierto de los estudiantes sobre el tipo de figuras planas que son las caras de los objetos tridimensionales dados en papel, donde **R:** reconoce todos los tipos de figuras, **MR:** reconoce algunos tipos de figuras y **NR:** no reconoce ningún tipo de figuras. Fuente: elaboración propia.

Sin embargo, el escenario de los objetos 3, 4 y 5 presentes en la situación S2-G1 es distinto. Frente al objeto 3, un porcentaje aproximado del 48% de los estudiantes afirma que sus caras son rombos. Al parecer, esto sucede porque los estudiantes no reconocen formalmente las propiedades geométricas del rombo ni cuáles son los límites de las caras de un poliedro, por ello asumen que dos triángulos no coplanares que comparten un mismo lado constituyen una sola cara en forma de rombo. Asimismo, un porcentaje aproximado del 33% de los estudiantes relaciona las representaciones de los objetos 4 y 5 con figuras bidimensionales, por tal motivo, se refieren a ellos como decágono y hexágono respectivamente (figura 38). Este caso refuerza la idea planteada previamente a partir de los resultados de la situación S1-G1 sobre la dificultad para percibir un objeto tridimensional a partir de una representación bidimensional.

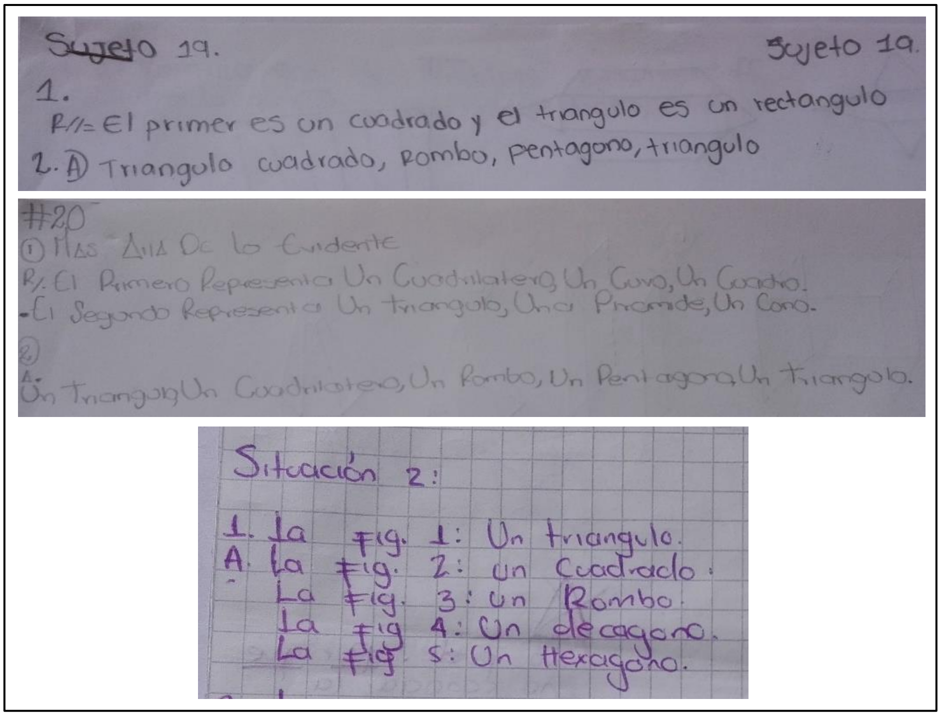


Figura 38. Respuestas de los estudiantes en la tarea 1.a de la situación S2-G1. Fuente: elaboración propia.

Hasta aquí, las situaciones S1-G1 y S2-G2 evidencian una escasez de representaciones semióticas espaciales que conlleva al error de referirse a los objetos tridimensionales dados utilizando nombres de figuras bidimensionales. Este error constituye un obstáculo de orden epistemológico para el desarrollo de la visualización espacial porque impide i) asociar representaciones bidimensionales con objetos espaciales y ii) percibir y nombrar objetos espaciales dado en el papel. En este caso, es correcto suponer que este obstáculo puede ser superado mediante la interacción con un medio didáctico que proporcione representaciones espaciales manipulables con las cuales el estudiante pueda construir posteriormente imágenes mentales dinámicas necesarias para efectuar actividades de conversión.

Así también, los resultados de las situaciones S1-G1 y S2-G2 demuestran que los estudiantes fluctúan entre el nivel global de percepción visual y el nivel de percepción de elementos constitutivos. Es preciso recordar que en el nivel de global de percepción visual los objetos se perciben como un todo y es posible relacionarlos con figuras bidimensionales, mientras que el nivel de percepción de elementos constitutivos, además de percibir el objeto como un todo, también es posible identificar los elementos de menor dimensión que lo componen (Castiblanco et al, 2004). En otras palabras, los estudiantes perciben algunos de los objetos dados como un todo, mientras que a otros los reconocen a partir de los elementos que los conforman.

Es importante señalar que el dominio de las habilidades concernientes al nivel de percepción de elementos constitutivos constituye el punto de acceso al nivel operativo de percepción visual en el cual es posible manipular mentalmente los elementos constitutivos para obtener transformaciones visuales del objeto (Castiblanco et al, 2004). Cabe señalar que la representación, manipulación y transformación mental de los objetos dados en el papel juega un papel determinante para llevar a cabo satisfactoriamente actividades de conversión enfocadas al cambio entre los registros tridimensional y bidimensional.

Por otro lado, los datos obtenidos a partir de la tarea propuesta en la situación S2-G1 sobre conteo de elementos constitutivos (caras, vértices y aristas) de un objeto tridimensional dado en el papel, indican un bajo porcentaje de acierto en todos los objetos. Sin embargo, también señalan que los mayores porcentajes de acierto obtenidos en esta tarea se presentan en los objetos 1, 2 y 3 (figura 39).

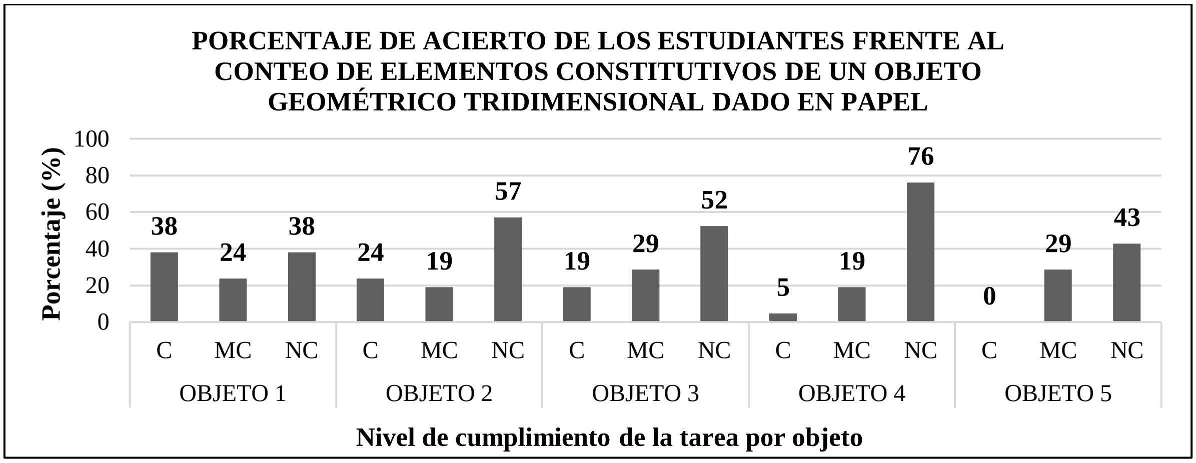


Figura 39. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente al conteo de elementos constitutivos de un objeto geométrico tridimensional dado en papel, donde **C:** cumple totalmente con la tarea, **MC:** medianamente cumple con la tarea y **NC:** no cumple con la tarea. Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la figura 39, es posible afirmar que la relación entre el número de elementos constitutivos y el porcentaje de acierto en su conteo es de proporcionalidad inversa, es decir, a menor número de elementos, mayor porcentaje de acierto para esta tarea y viceversa. No obstante, si se compara el porcentaje de acierto en objetos con un número similar de elementos constitutivos, como los objetos 1 y 2 y los objetos 4 y 5, se observa que el mayor porcentaje de acierto en el conteo de elementos constitutivos se da en los objetos 1 y 5 que son traslucidos.

Sobre esta tarea, gran parte de los estudiantes coincide en que la mayor dificultad para contar elementos constitutivos se presenta en los objetos con un mayor número de estos elementos (objetos 4 y 5) y en aquellos que son traslucidos (objetos 1, 3 y 5) (figura 40). Aunque es correcto afirmar que la probabilidad de cometer errores en el conteo es mayor cuando el número de elementos por contar aumenta, también es pertinente señalar que los mayores porcentajes de acierto de los estudiantes estén dados para los objetos traslúcidos. Sin embargo, la traslucidez fue señalada como un factor de dificultad para llevar a cabo esta tarea. Esta incongruencia se puede explicar de acuerdo con los resultados del conteo. Al parecer, para los estudiantes la tarea de contar elementos constitutivos resulta menos compleja en los objetos opacos porque solo toman en consideración aquellos elementos perceptibles a primera vista.

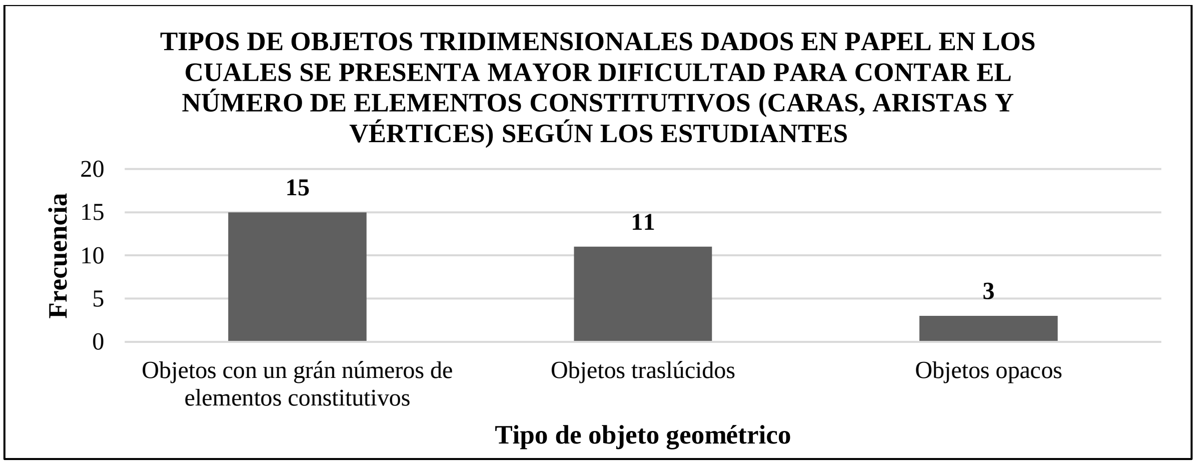


Figura 40. Tipos de objetos tridimensionales dados en papel en los cuales se presenta mayor dificultad para contar el número de elementos constitutivos (caras, aristas y vértices) según los estudiantes. Fuente: elaboración propia.

En este punto, es pertinente aclarar que la tarea de contar los elementos constitutivos de un objeto tridimensional dado en papel no ha sido propuesta con la finalidad de establecer el grado de habilidad en las técnicas de conteo de los estudiantes, sino con la intención de indagar sobre su habilidad para discriminar los elementos que componen el objeto. Más aún, es importante señalar que los errores de conteo no deben ser necesariamente asociados a problemas de visualización ya que estos podrían estar ligados exclusivamente a las técnicas de conteo utilizadas por los estudiantes. Por lo tanto, valorar las habilidades de visualización del estudiante con base en los porcentajes de acierto en el conteo podría representar un desacierto evaluativo.

Para evitar errores en la valoración de las habilidades de visualización espacial es necesario que el maestro establezca una correspondencia lógica entre el objetivo de las situaciones propuestas y la evaluación en virtud del proceso cognitivo que pretende desarrollar. En este sentido, resulta de mayor relevancia determinar si el estudiante toma en consideración durante el conteo aquellos elementos constitutivos imperceptibles a primera vista en los objetos opacos. En otras palabras, el error que suministra más información sobre el grado de desarrollo de las habilidades de visualización de los estudiantes es el conteo exclusivo de los elementos constitutivos perceptibles a primera vista en los objetos opacos.

Ahora bien, el hecho recurrente de que los estudiantes no tomen en consideración los elementos constitutivos no visibles de los objetos opacos puede entenderse como un obstáculo de orden epistemológico para el desarrollo de la visualización espacial, además indica que estos carecen de las habilidades de *conservación de la percepción* y de *reconocimiento de relaciones espaciales* descritas por Del Grande (citado en Gutiérrez, 2006). Respectivamente, estas habilidades permiten reconocer las propiedades de un objeto, aunque este cambie de posición o deje de verse por completo; e identificar los elementos constitutivos del objeto en cuestión. No obstante, esta carencia de habilidades de visualización representa una oportunidad para que el profesor gestione las modificaciones didácticas necesarias para que los estudiantes adquieran dichas habilidades. Más aún, es correcto afirmar que los trabajos sobre desarrollo de la visualización espacial a partir de la geometría tridimensional deben ser propuestos alrededor de objetos opacos, ya que, al parecer, estos objetos invitan al estudiante a utilizar sus habilidades de conservación de la percepción y de reconocimiento de relaciones espaciales.

En la situación S3-G1 se solicitó realizar el desarrollo plano de cada uno de los objetos dados. Frente a esta tarea, los mayores porcentajes de cumplimiento se dieron en los objetos 1 y 2 y los menores en los objetos 3 y 4 (figura 41).

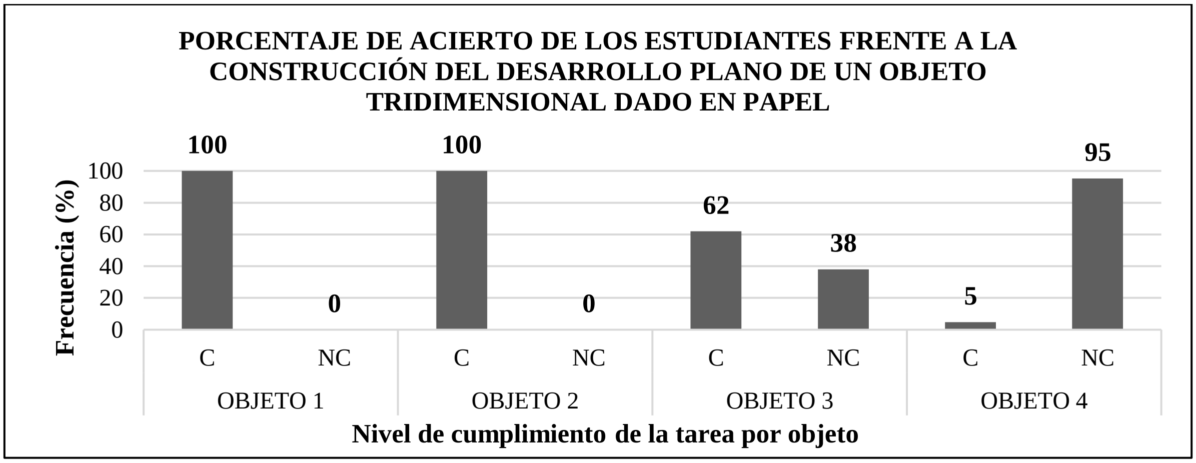


Figura 41. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente a la construcción del desarrollo plano de un objeto geométrico tridimensional dado, donde **C:** cumple totalmente con la tarea y **NC:** no cumple con la tarea. Fuente: elaboración propia.

Si comparamos los objetos opacos 2 y 4 de la situación S3-G1, es posible observar que solo en el objeto 4 se presenta un índice porcentual casi total de no cumplimento en la tarea propuesta. En primera instancia, podría pensarse que la no consecución satisfactoria de esta tarea para el objeto 4 se debe al mayor número de elementos constitutivos que presenta este objeto en comparación los demás, sin embargo, al cuestionar a los estudiantes sobre las dificultades para realizar los desarrollos planos de los objetos tridimensionales dados, surgen algunas explicaciones relacionadas con los niveles y habilidades de visualización. Las dificultades señaladas por los estudiantes para llevar a cabo esta tarea son: i) imaginar la parte no visible del objeto cuando este es opaco, ii) imaginar el desarrollo plano del objeto tridimensional, iii) establecer las relaciones entre las caras del objeto tridimensional si este cuenta con un gran número y variedad de ellas y iv) no saber dibujar (figura 42).

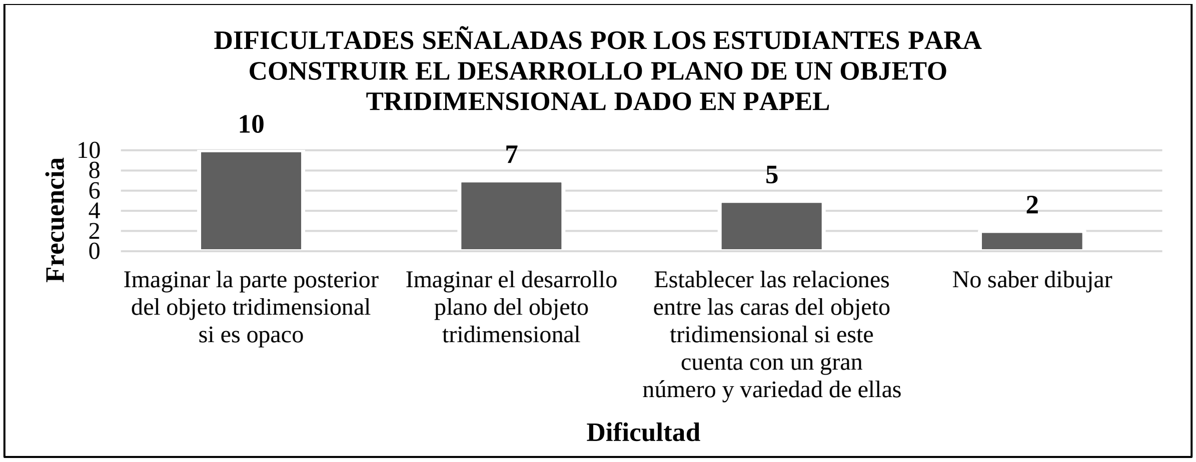


Figura 42. Dificultades señaladas por los estudiantes para dibujar el desarrollo plano de un objeto tridimensional dado en papel. Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, en la situación S4-G1 se proponen cuatro desarrollos planos a partir de los cuales se deben dibujar en papel los correspondientes objetos tridimensionales que representan. Aunque todos los desarrollos planos propuestos en esta situación tienen un número similar de caras, es posible observar que el porcentaje de no cumplimiento de la tarea va en aumento de un desarrollo a otro (figura 43).

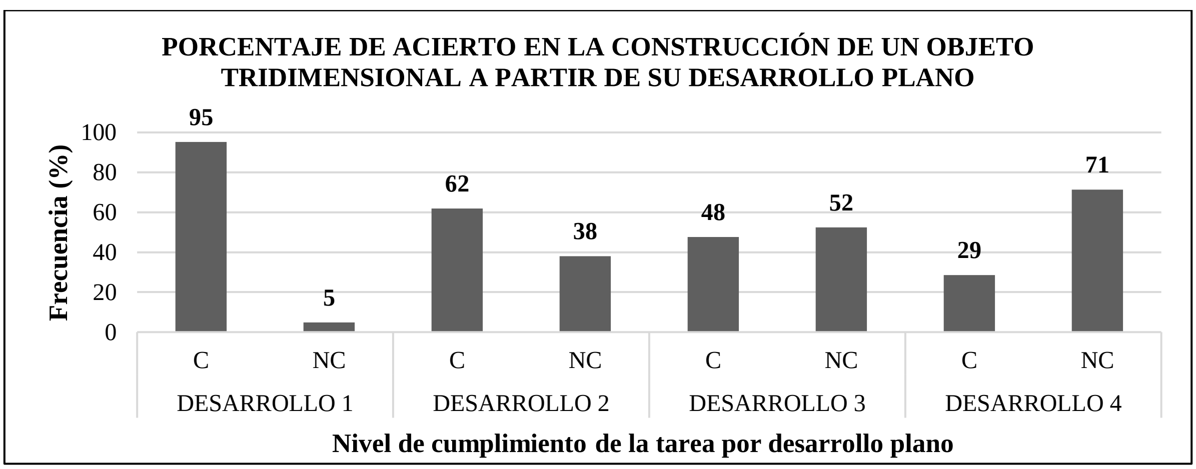


Figura 43. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente a la construcción del desarrollo plano de un objeto geométrico tridimensional dado, donde C: cumple totalmente con la tarea y NC: no cumple con la tarea. Fuente: elaboración propia.

Frente a la situación S4-G1, las dificultades señaladas por los estudiantes para construir un objeto tridimensional a partir de su desarrollo plano son: i) imaginar el objeto completamente armado, ii) mantener las dimensiones y relaciones de todos los elementos constitutivos del objeto tridimensional según su desarrollo plano y iii) no saber dibujar (figura 44).

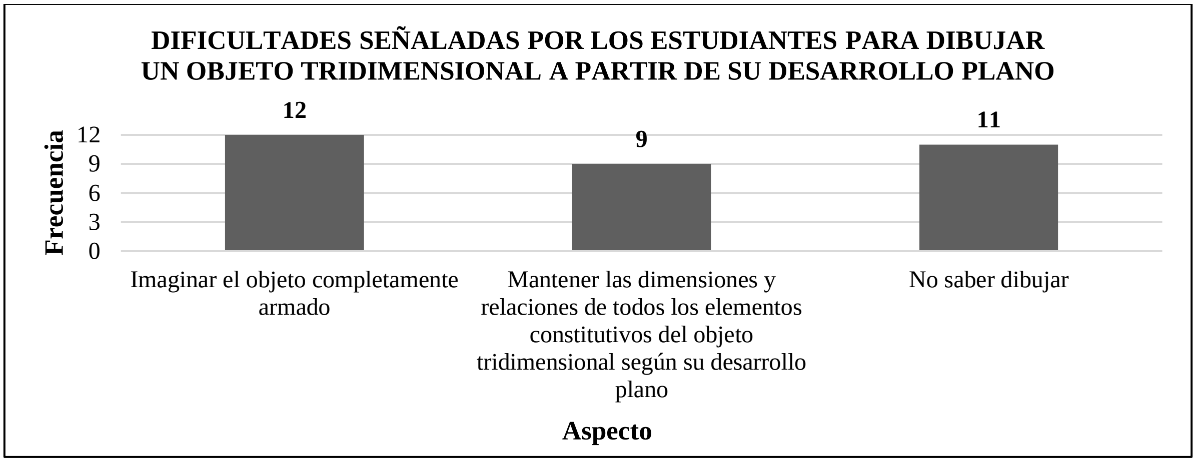


Figura 44. Dificultades señaladas por los estudiantes para dibujar un objeto tridimensional en el papel a partir de su desarrollo plano. Fuente: elaboración propia.

Las dificultades señaladas por los estudiantes para llevar a cabo las actividades de conversión propuestas en las situaciones S3-G1 y S4-G1 sugieren dos aspectos, el primero, que saber dibujar tiene mayor relevancia en la consecución de la tarea cuando se pretende representar en el papel objetos tridimensionales a partir de su desarrollo plano, y el segundo, que la imaginación en conjunto con el reconocimiento de elementos y relaciones variantes e invariantes juegan un papel determinante para llevar a cabo actividades de conversión que implican el cambio de registro.

Sobre el primer aspecto, es pertinente discutir la trascendencia del dibujo en la evaluación. En las situaciones S3-G1 y S4-G1 el dibujo constituye el producto final de las actividades de conversión, sin embargo, no es posible desconocer que dicho producto subyace al desarrollo del proceso cognitivo de visualización por ser este el objetivo general de la investigación. Dado que la visualización es un proceso cognitivo que involucra transformaciones mentales de los objetos geométricos (Presmeg, 1987), entonces no resulta acertado valorar las habilidades inherentes a este proceso con base en la destreza para dibujar. Por ejemplo, si el estudiante no realiza el dibujo en el papel, pero verbaliza los elementos constitutivos del objeto junto con las relaciones que estos guardan entre sí y la posible forma del objeto, es posible asegurar que durante su actividad cognitiva tienen lugar las habilidades de conservación de la percepción y de reconocimiento de relaciones espaciales. En este sentido, no realizar el dibujo producto de un cambio del registro bidimensional al tridimensional no constituye una razón suficiente para excluir las habilidades de visualización espacial de la actividad cognitiva del estudiante.

En conclusión, utilizar exclusivamente la construcción de una representación gráfica para dar cuenta de las habilidades de visualización espacial del estudiante puede considerarse como un desacierto evaluativo que no da cuenta del estado real de las habilidades de visualización espacial. Este tipo desaciertos se podrían evitar si el maestro establece una correspondencia lógica entre el objetivo de las situaciones propuestas y la evaluación en virtud del proceso cognitivo que pretende desarrollar. De este modo, la tarea debe permitir evidenciar el despliegue cognitivo del estudiante, y la evaluación, ofrecer una apreciación cualitativa en términos de las habilidades de visualización espacial más que valorar superficialmente la calidad del producto final de la tarea.

Sobre el segundo aspecto es importante establecer tanto el papel que juega la imaginación para llevar a cabo las actividades de conversión propuestas en las situaciones S3-G1 y S4-G1 como la acepción del término “imaginar” citado por los estudiantes cuando se refieren a las dificultades acontecidas durante estas actividades. Al parecer, la dificultad para imaginar la parte no visible de un objeto tridimensional opaco con un gran número y variedad de caras, como el objeto 4 de la situación S3-G1, o para imaginar la representación tridimensional de un objeto a partir de su desarrollo plano, como en la situación S4-G1, sugiere que los estudiantes aún no son capaces de construir y transformar imágenes mentales dinámicas de un objeto tridimensional complejo. En consecuencia, es posible afirmar que existe un limitado desarrollo del proceso de visualización de los estudiantes en el sentido definido por Presmeg (1997).

Así también, la dificultad para establecer la relación de orden entre las caras de un objeto tridimensional o las justificaciones sobre por qué no coinciden el número de vértices o lados del objeto tridimensional con los de su desarrollo plano (figura 45), evidencia un escaso desarrollo en las habilidades de visualización establecidas por Del Grande (citado en Gutiérrez, 2006), específicamente, en la conservación de la percepción y en el reconocimiento de relaciones espaciales.

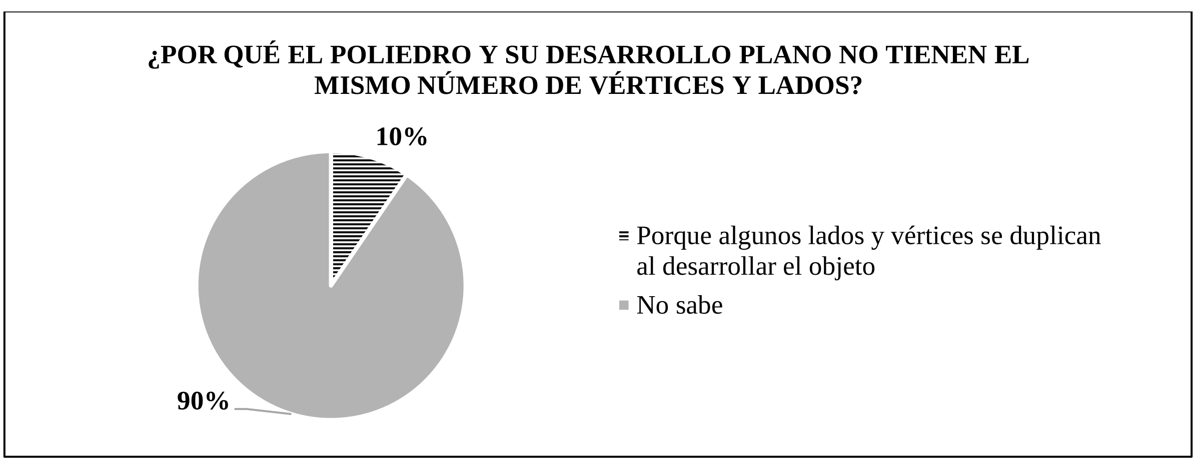


Figura 45. Porcentaje de las respuestas dadas por los estudiantes frente a la pregunta: ¿por qué no coinciden el número de vértices y lados de un objeto tridimensional con los de su desarrollo plano? Fuente: elaboración propia.

Puede ser que el limitado desarrollo de las habilidades de visualización evidenciado en los bajos índices de acierto en las tareas de conversión propuestas y en las dificultades señaladas por los estudiantes para manipular y transformar mentalmente los objetos dados en el papel se deban a la escasez de representaciones semióticas espaciales en los estudiantes señalada desde la situación S1-G1. Si tal fuera el caso, esta escasez actúa como un obstáculo de orden epistemológico, no solo para realizar actividades de conversión, sino también para el desarrollo de la visualización espacial. En este sentido, es correcto suponer que dicho obstáculo puede ser superado a través de la interacción con un medio didáctico que proporcione representaciones espaciales manipulables con las cuales el estudiante pueda construir imágenes mentales dinámicas necesarias para efectuar actividades de conversión.

5.2. Análisis e interpretación de los datos obtenidos a partir del desarrollo de las situaciones de la guía G2 (anexo 2)

Frente a la tarea de conteo de elementos constitutivos (caras, vértices y aristas) de los objetos dados, los porcentajes de acierto de la tarea son altos para los objetos de las situaciones S1-G2, S2-G2 y S3-G2, no así para los objetos de las situaciones S4-G2 y S5-G2 (figura 46).

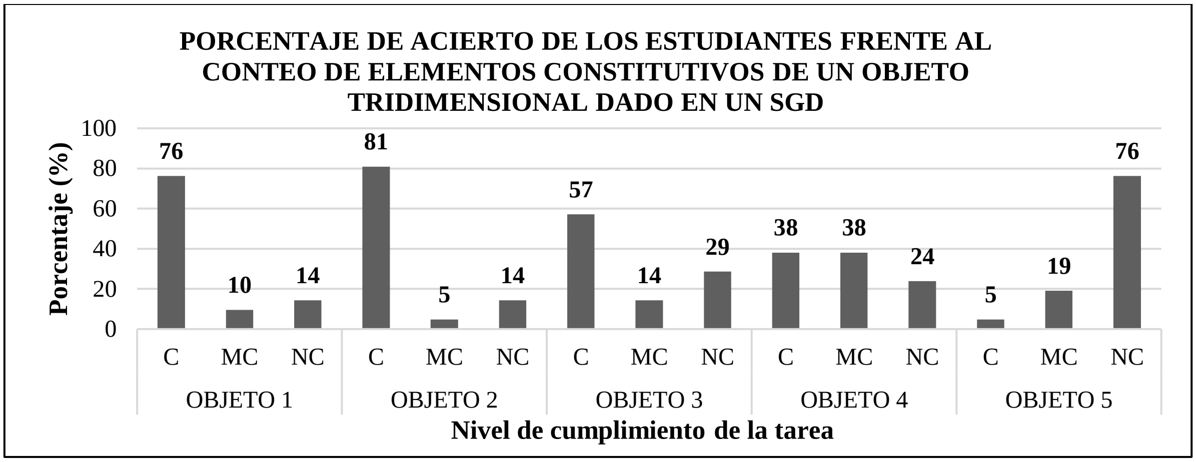


Figura 46. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente al conteo de elementos constitutivos de un objeto tridimensional dado en un SGD, donde **C:** cumple totalmente con la tarea, **MC:** medianamente cumple con la tarea y **NC:** no cumple con la tarea. Fuente: elaboración propia.

Los resultados frente a esta tarea sugieren una interpretación similar a la obtenida en el análisis de los datos suministrados por la tarea análoga propuesta en la situación S2-G1. En este caso, también es posible asegurar que el porcentaje de acierto de los estudiantes es inversamente proporcional a la complejidad estructural del objeto. Por ejemplo, frente a los objetos 4 y 5 que tienen un mayor número de elementos constitutivos en comparación con los objetos 1, 2 y 3, los estudiantes presentan menores porcentajes de acierto en esta tarea. No obstante, en la tarea sobre reconocimiento del tipo de figuras planas que son las caras del objeto tridimensional dado en el SGD, los estudiantes obtuvieron porcentajes de acierto del 100% en casi todos los objetos (figura 47). En consecuencia, es correcto afirmar que los estudiantes reconocen los elementos constitutivos de cada objeto tridimensional dado pese a los errores cometidos en el conteo.

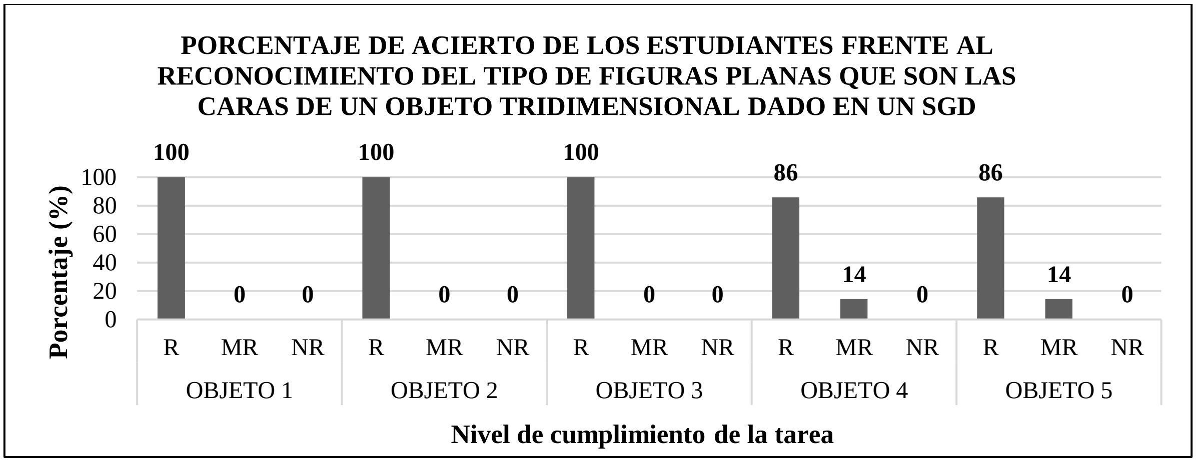


Figura 47. Porcentaje de acierto de los estudiantes sobre el tipo de figuras planas que son las caras de los objetos tridimensionales dados en papel, donde **R:** reconoce todos los tipos de figuras, **MR:** reconoce algunos tipos de figuras y **NR:** no reconoce ningún tipo de figura. Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, con respecto a la tarea de construcción del desarrollo plano de cada uno de los objetos presentados en las situaciones S1-G2 a S5-G2, es posible afirmar que la mayoría de los estudiantes presentan altos índices de cumplimiento (figura 51). Más aún, si comparamos los porcentajes de cumplimiento de esta tarea sobre un mismo objeto propuesto en dos medios distintos, caso particular de la Cúpula Triangular dada como objeto 4 en la situación S3-G1 y presentada nuevamente en la situación S4-G2, podemos observar resultados notablemente diferentes. En el medio que implica el uso exclusivo del lápiz y papel, donde los objetos presentan un carácter estático y el estudiante debe recurrir a manipulaciones mentales para llevar a cabo la tarea, el porcentaje de cumplimiento es del 5%. Por el contrario, en el medio que integra SGD, donde el estudiante tiene la posibilidad de manipular el objeto, el porcentaje de cumplimiento es del 67%.

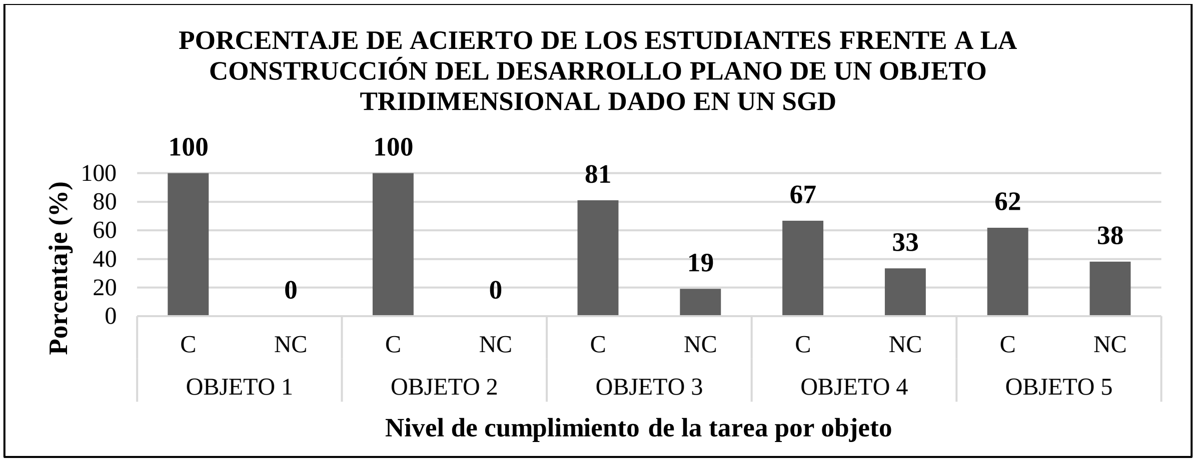


Figura 48. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente a la construcción del desarrollo plano de un objeto tridimensional dado en un SGD, donde **C:** cumple totalmente con la tarea y **NC:** no cumple con la tarea. Fuente: elaboración propia.

Hasta aquí, es posible afirmar que, siempre y cuando el estudiante tenga acceso al objeto tridimensional sin restricciones visuales o manipulativas, como en el caso de los objetos traslucidos en la guía G1 o de las representaciones virtuales del SGD en la guía G2, este puede llevar a cabo satisfactoriamente tareas de conteo y reconocimiento de elementos constitutivos y de construcción del desarrollo plano del objeto en cuestión. Sin embargo, tal afirmación no procede cuando los objetos son opacos o carentes de manipulación física o virtual.

Los datos obtenidos hasta el momento parecen sugerir una tendencia hacia el desarrollo de las habilidades de conservación de la percepción y de reconocimiento de relaciones espaciales de los estudiantes, no obstante, aún es pronto para atrever una conclusión definitiva sobre el progreso de estas habilidades. Para hacerlo, es preciso analizar de nuevo los resultados de los estudiantes en el medio que hace uso exclusivo del lápiz y el papel y determinar si los obstáculos emergentes en este medio durante el desarrollo de la guía G1 han sido superados luego de la interacción con el SGD.

5.3. Análisis e interpretación de los datos obtenidos a partir del desarrollo de las situaciones de la guía G3 (anexo 3)

Los resultados obtenidos a partir de la situación S1-G3 indican que aproximadamente el 90% de los estudiantes relaciona las representaciones dadas en papel con objetos bidimensionales y tridimensionales (figura 49). Cabe resaltar que durante la situación análoga S1-G1, las representaciones dadas fueron relacionadas exclusivamente con objetos bidimensionales por el 86% de los estudiantes. Sin duda, este hecho demuestra un aumento notable en el número de representaciones espaciales de los estudiantes.

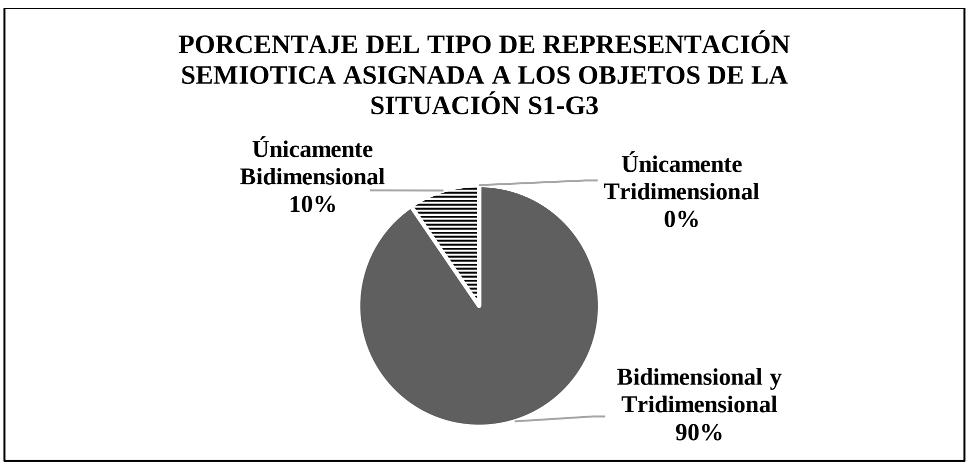


Figura 49. Porcentaje del tipo de representación semiótica asignada por los estudiantes a los objetos de la situación S1-G3. Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, las situaciones S2-G3 y S3-G3 son actividades de conversión enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional. Los objetos dados en estas situaciones son opacos y de forma atípica. Es preciso señalar que la selección de objetos con estas características no es una decisión fortuita, sino que constituye la modificación de una variable didáctica para superar los obstáculos emergentes durante el desarrollo de las situaciones análogas

S2-G1 y S3-G1. Al respecto, el análisis previo realizado a los resultados suministrados por estas situaciones demostró que solo los objetos opacos evidencian las habilidades de visualización de los estudiantes ya que provocan la necesidad ineludible de imaginar la parte no visible del objeto dado para dar cuenta de sus elementos constitutivos y construir el desarrollo plano respectivo.

Ahora bien, en la tarea de conteo de elementos constitutivos de la situación S2-G3 es posible observar porcentajes de cumplimiento casi totales (figura 50). Este hecho, más allá de permitir un juicio sobre el mejoramiento de las técnicas de conteo utilizadas por los estudiantes, justifica la especialización de las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y de conservación de la percepción planteadas por Del Grande (citado en Gutiérrez, 2006). En este sentido, es posible asegurar que los estudiantes no solo toman en consideración los elementos perceptibles a primera vista, sino también aquellos que se encuentran en la parte no visible del objeto dado en virtud de las relaciones geométricas existentes (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).

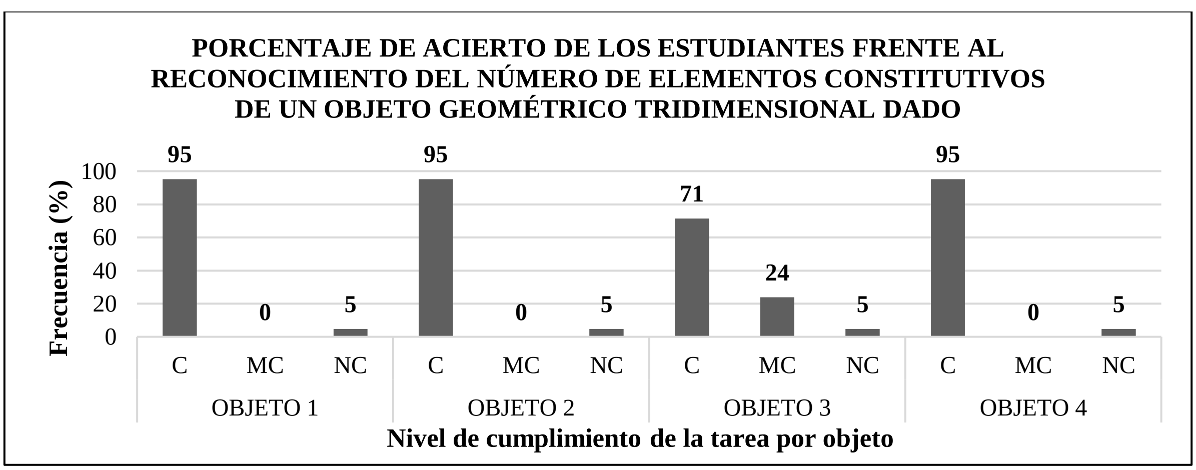


Figura 50. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente al reconocimiento del número de elementos constitutivos de un objeto geométrico tridimensional, donde **C:** cumple totalmente con la tarea, **MC:** cumple medianamente con la tarea y **NC:** no cumple con la tarea.

De la misma manera, también es posible observar altos porcentajes de cumplimiento en la tarea de construcción del desarrollo plano de objetos tridimensionales dados en el papel propuesta en la situación S2-G3 (figura 51).

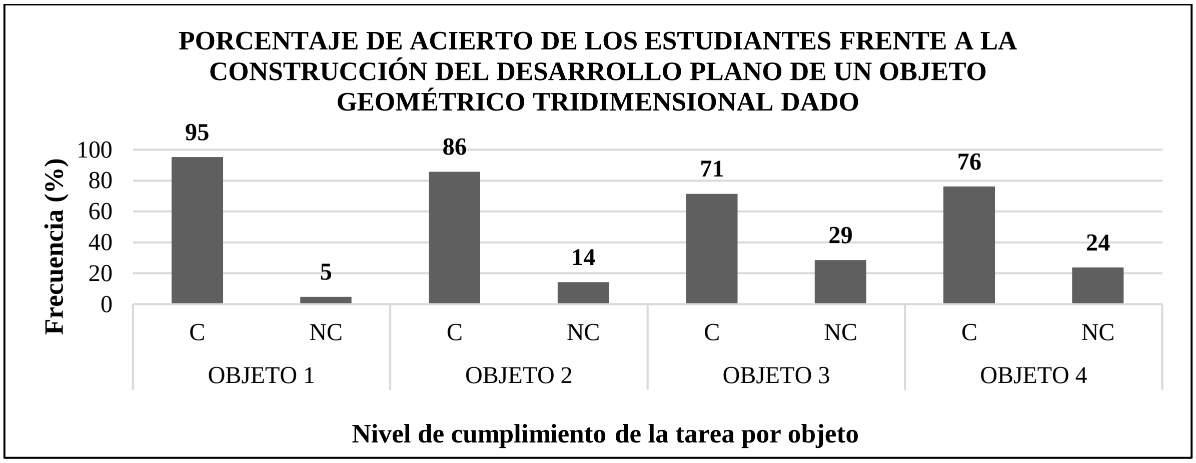


Figura 51. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente a la construcción del desarrollo plano de un objeto geométrico tridimensional dado, donde **C:** cumple totalmente con la tarea y **NC:** no cumple con la tarea. Fuente: elaboración propia.

Al respecto, los estudiantes coinciden en que los aspectos de mayor relevancia para realizar correctamente el desarrollo plano de un objeto tridimensional dado son: i) imaginar cómo es la parte de atrás del objeto tridimensional de acuerdo con su parte visible a primera vista determinar el número de caras del objeto, ii) observar cómo se relacionan las caras del objeto y iii) observar qué tipo de figura plana es cada una de las caras del objeto tridimensional y iv) determinar el número de caras del objeto tridimensional (figura 52).

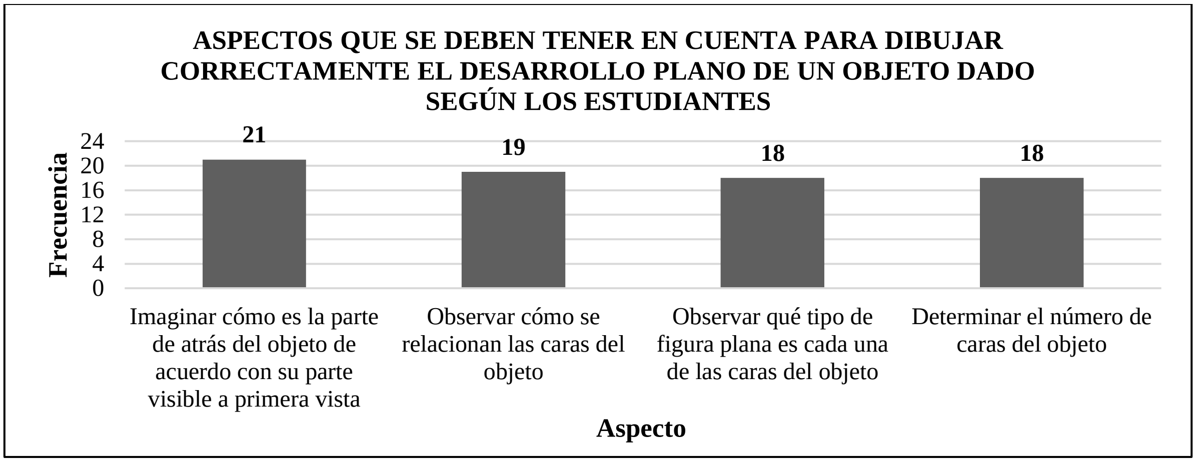


Figura 52. Frecuencia de las respuestas dadas por los estudiantes frente a la pregunta que indaga sobre los aspectos que se deben tener en cuenta para realizar correctamente el desarrollo plano de un objeto tridimensional dado. Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, tomando como punto de partida la consideración previamente establecida sobre el desacierto evaluativo en el que se puede incurrir al valorar las habilidades de visualización de un estudiante con base en su habilidad para dibujar en el papel una representación tridimensional de un objeto a partir de su desarrollo plano se ha dispuesto un nuevo tipo de tarea en la situación S3-G3 en donde los estudiantes deben hacer uso del reconocimiento de los elementos constitutivos y de las propiedades de los objetos para relacionar una representación bidimensional con otra tridimensional del mismo objeto. Los resultados sobre esta situación indican que la mayoría de los estudiantes ha logrado concretar satisfactoriamente la tarea sin importar las características del objeto dado (figura 53).

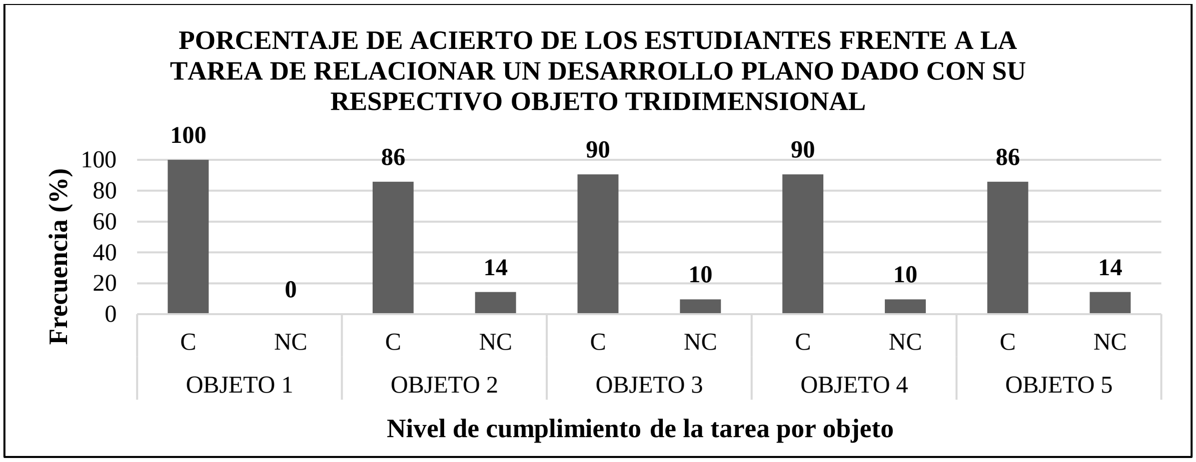


Figura 53. Porcentaje de acierto de los estudiantes frente a la tarea de relacionar un desarrollo plano dado con su respectivo objeto tridimensional. Fuente: elaboración propia.

Sobre la tarea S3-G3, los estudiantes señalan que los aspectos necesarios para relacionar un desarrollo plano dado con el objeto tridimensional respectivo son: i) determinar el número de caras del objeto, ii) imaginar cómo es la parte de atrás del objeto de acuerdo con su parte visible a primera vista, iii) observar cómo se relacionan las figuras planas en el desarrollo plano y iv) observar qué tipo de figura planas componen el desarrollo plano (figura 54).

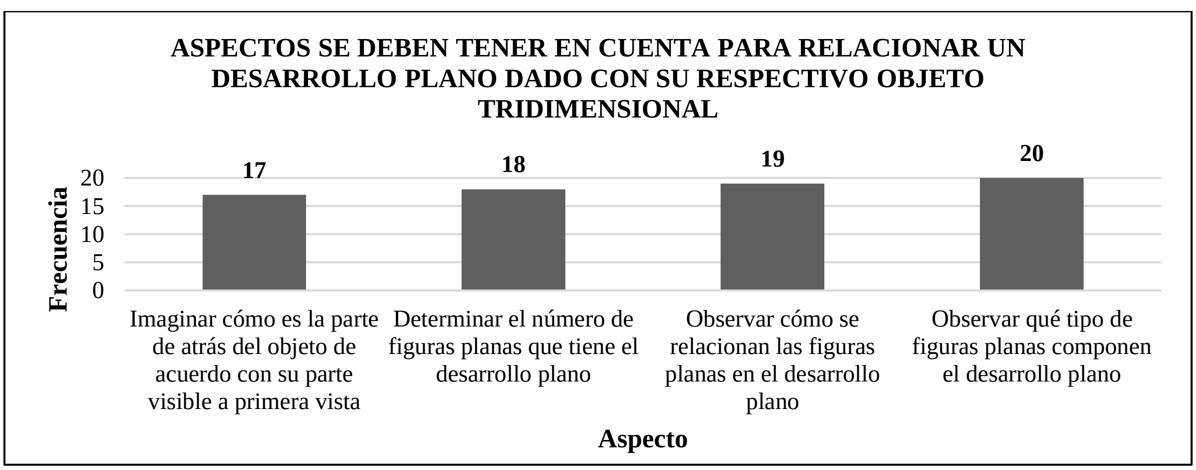


Figura 54. Aspectos se deben tener en cuenta para relacionar un desarrollo plano dado con su respectivo objeto tridimensional. Fuente: elaboración propia.

Hasta aquí, es posible observar que los aspectos señalados por los estudiantes como necesarios para llevar a cabo las actividades de conversión entre los registros bidimensional y tridimensional propuestas en las situaciones S2-G3 y S3-G3 se corresponden. Sin mayor diferencia, en ambos casos los estudiantes coinciden en que estos aspectos son imaginar la parte no visible del objeto, determinar el tipo de figuras planas que son las caras del objeto, establecer cómo se relacionan estas caras y determinar el número de caras. En este punto, es importante destacar el hecho de que la habilidad para dibujar ya no sea considerada por los estudiantes como una limitante para la consecución de este tipo de actividades. Por el contrario, los datos indican que los estudiantes conceden mayor relevancia a las transformaciones mentales de los objetos geométricos a partir de las propiedades de sus elementos constitutivos y de las relaciones entre ellos. De este modo, la evaluación del docente no se ve permeada por los rasgos artísticos que pueda inducir el dibujo producto del cambio de registro bidimensional al tridimensional, sino que se fundamenta exclusivamente en las habilidades de visualización de los estudiantes.

Finalmente, con base en las nuevas representaciones espaciales referidas por los estudiantes en la situación S1-G3, en los altos porcentajes de acierto evidenciados tanto en las tareas de conteo y reconocimiento de elementos constitutivos presentes en la situación S2-G3 como en las actividades de cambio de registro propuestas en las situaciones S2-G3 y S3-G3 y en los aspectos señalados por los estudiantes como necesarios para llevar a cabo este tipo de tareas, es posible asegurar un avance en el nivel de visualización de los estudiantes evidenciado en el progreso de sus habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y de conservación de la percepción. En otras palabras, luego de aproximadamente 5 horas de trabajo, los datos han permitido demostrar que casi la totalidad de los estudiantes participantes en el proyecto han trascendido desde el nivel de percepción de elementos constitutivos hasta el nivel operativo de percepción visual. Cabe recordar que en el nivel de percepción de elementos constitutivos se reconocen los elementos de dimensión inferior que componen el objeto y se perciben algunas relaciones geométricas existentes, mientras que en el nivel operativo de percepción visual es posible manipular mentalmente los objetos a partir de las propiedades de sus elementos constitutivos y de las relaciones entre ellos (Castiblanco, 2004).

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo general de esta investigación fue proponer orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional. Para alcanzar este objetivo fueron propuestos los siguientes objetivos específicos: i) revelar los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel, ii) examinar el estado de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes antes y después de su interacción con un software de geometría dinámica y iii) analizar si los obstáculos de orden epistemológico asociados a la visualización espacial cuando se resuelven situaciones didácticas que implican el cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional en un medio didáctico que hace uso exclusivo del lápiz y el papel son superados luego de la interacción con un SGD.

A partir de esta investigación se pudo establecer que la escasez de representaciones semióticas espaciales conlleva al error de referirse a objetos tridimensionales utilizando nombres de figuras bidimensionales. Este error constituye un obstáculo de orden epistemológico para i) asociar representaciones bidimensionales con objetos espaciales, ii) percibir y nombrar objetos espaciales dado en el papel y iii) llevar a cabo situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional. Más aún, se logró demostrar que este obstáculo incide directamente sobre las habilidades de *conservación de la percepción* y de *reconocimiento* *de relaciones espaciales* propuestas por Del Grande (citado en Gutiérrez, 2006). Respectivamente, estas habilidades permiten reconocer las propiedades de un objeto, aunque este cambie de posición o deje de verse por completo; e identificar sus elementos constitutivos.

Posteriormente, fue posible demostrar que la interacción con el SGD Poly Pro permitió incrementar el número de representaciones espaciales de los estudiantes. Este hecho se evidenció en la habilidad para percibir objetos tridimensionales y sus elementos constitutivos a partir de representaciones bidimensionales opacas. Consecuentemente, el desarrollo de estas habilidades incidió sobre el porcentaje de acierto durante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional en donde la manipulación y transformación mental de los objetos estáticos dados en papel juegan un papel determinante. De esta manera, es correcto afirmar que la interacción con un SGD no solo contribuye a superar la carencia de representaciones espaciales de los estudiantes, sino que simultáneamente comprende un mejoramiento de sus habilidades de visualización.

Por otra parte, la investigación permitió establecer el desacierto evaluativo que resulta de valorar las habilidades de visualización espacial de un estudiante con base en su destreza para contar o dibujar. Sobre las tareas de conteo, se debe tener en cuenta que algunos errores cometidos pueden estar ligados exclusivamente a las técnicas utilizadas para llevarlas a cabo y no necesariamente a la visualización. No obstante, el error recurrente que se manifiesta en el conteo exclusivo de los elementos constitutivos perceptibles a primera vista en los objetos opacos sugiere la ausencia de las habilidades de *conservación de la percepción* y de *reconocimiento de relaciones espaciales*. Por tal motivo, los estudiantes no pueden percibir aquellos elementos constitutivos que se encuentran en la parte no visible de los objetos opacos. En consecuencia, este tipo de error constituye un obstáculo de orden epistemológico ligado a las habilidades de visualización espacial.

Para superar el obstáculo epistemológico y evitar el posible desacierto evaluativo en una tarea de conteo, es preciso que los trabajos sobre desarrollo de la visualización espacial sean propuestos a partir de objetos tridimensionales opacos, ya que son estos objetos los que permiten poner en juego las habilidades de visualización espacial. Claro está, el estudiante primero debe interactuar con un SGD que le permita incrementar su número de representaciones tridimensionales para que considere pertinente la posibilidad de manipulación mental sobre el objeto dado cuando trabaje en un medio que haga uso exclusivo del lápiz y el papel. No obstante, si no se cuenta con un SGD para incrementar el número de representaciones mentales tridimensionales, también es posible hacer uso de material manipulable.

Ahora bien, sobre la habilidad para dibujar un objeto tridimensional en el papel a partir de su desarrollo plano, es importante señalar que no realizar el dibujo producto de este cambio de registro no constituye una razón suficiente para excluir las habilidades de visualización espacial de la actividad cognitiva del estudiante. Por ejemplo, si el estudiante no realiza el dibujo en el papel, pero verbaliza los elementos constitutivos del objeto junto con las relaciones que estos guardan entre sí y la posible forma del objeto, es posible asegurar que durante su actividad cognitiva tienen lugar las habilidades de *conservación de la percepción* y de *reconocimiento de relaciones espaciales*. De esta manera, los errores presentes en el dibujo de un objeto tridimensional realizado en papel no constituyen un fiel reflejo del estado de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes. Por lo tanto, la habilidad para dibujar un objeto tridimensional en el papel a partir de su desarrollo plano no debe ser utilizada como un factor determinante para valorar la visualización espacial. En caso contrario, podría resultar un desacierto evaluativo que no da cuenta del estado real de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes.

El posible desacierto evaluativo que se origina mediante la valoración exclusiva de los errores presentes en el dibujo de un objeto tridimensional realizado a partir de su desarrollo plano se puede evitar mediante tareas en las cuales el estudiante deba relacionar un objeto tridimensional opaco con su respectivo desarrollo plano haciendo explicitas las propiedades y relaciones entre los elementos constitutivos del objeto que tiene en cuenta para realizar tal asociación. En este sentido, es necesario que toda tarea propuesta para el desarrollo de la visualización espacial permita evidenciar el despliegue cognitivo del estudiante y que su evaluación ofrezca una apreciación cualitativa de las habilidades asociadas a este proceso más que valorar la calidad de un dibujo.

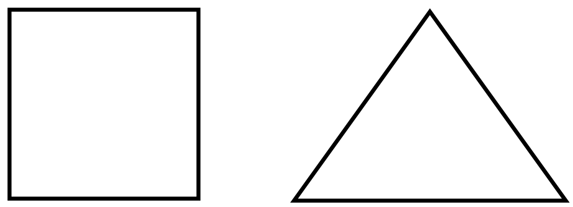
En todo caso, si el objetivo de las situaciones didácticas es el desarrollo de la visualización espacial mediante actividades enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional, entonces se debe evitar cualquier tipo de apreciación, situación o tarea que no sea coherente con este objetivo, ya que no daría cuenta del estado real de las habilidades de visualización de los estudiantes. En definitiva, superar desaciertos evaluativos como lo expuestos previamente necesariamente implica que el maestro establezca una correspondencia lógica entre el objetivo de las situaciones propuestas y la evaluación en virtud del proceso cognitivo que pretende desarrollar.

VI. ANEXOS

Anexo 1. Guía de Trabajo 1 (G1).

SITUACIÓN S1-G1: MÁS ALLÁ DE LO EVIDENTE

1. Observe los siguientes dibujos y responda la pregunta:



1 **2**

¿Qué objeto geométrico representa cada dibujo dado? Dibuje si lo considera necesario para su explicación.

2. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en el numeral 1 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

SITUACIÓN S2-G1: OBSERVEMOS

1. Observe cada uno de los siguientes objetos y responda individualmente las preguntas dadas:

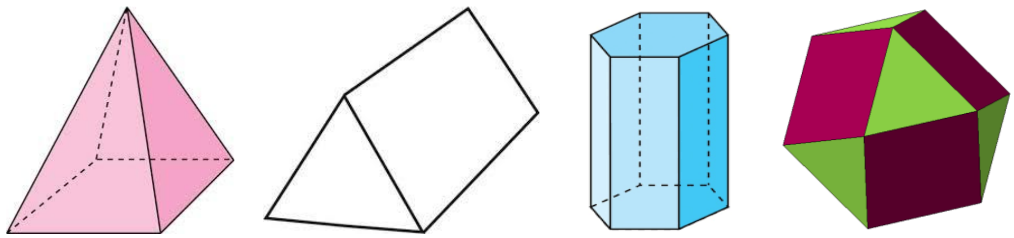
1 **2** **3** **4** **5**

a) ¿Qué tipo de figura plana son las caras de cada objeto?
b) ¿Cuántas caras, vértices y aristas tienen cada uno de los objetos dados?
c) ¿En qué tipo de objetos es más complicado determinar el número de caras, vértices y aristas?

2. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en el numeral 1 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

SITUACIÓN S3-G1: DESENVOLVAMOS

1. Observe los siguientes objetos y responda individualmente las preguntas dadas:



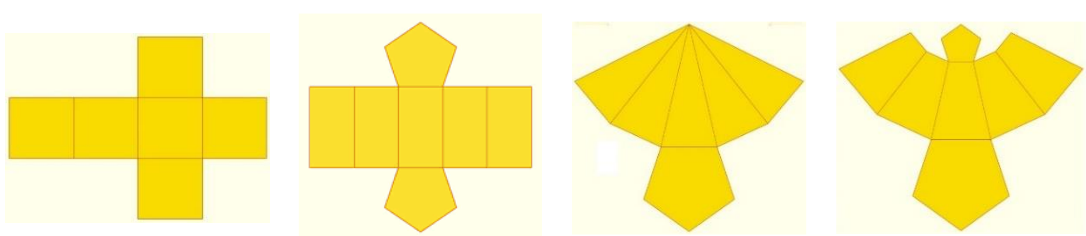
1 **2** **3** **4**

- **a)** ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el objeto dado?
- **b)** Suponga que es posible desenvolver el objeto y dejarlo totalmente plano. Dibuje la figura plana que resultaría de esta acción.
- **c)** ¿Cuáles crees que son las dificultades para realizar la figura plana solicitada?
- **d)** ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el dibujo realizado?
- **e)** Si se compara el número de caras, vértices y lados del objeto dado y de la figura plana realizada, ¿cuáles son las similitudes o diferencias que encuentras? y ¿por qué crees que se dan?
- **f)** ¿Cuáles crees que son las dificultades para determinar el número de caras, vértices y aristas que tiene cada uno de los objetos dados?

2. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en el numeral 1 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

SITUACIÓN S4-G1: DOBLEMOS

1. Observe cada uno de los siguientes objetos y responda individualmente las preguntas dadas:



1 **2** **3** **4**

- **a)** ¿Cuántas caras, vértices y lados tiene la figura plana dada?
- **b)** Dibuje el objeto que se podría construir a partir de la figura plana dada.
- **c)** ¿Cuáles crees que son las dificultades para construir el objeto?
- **d)** ¿Cuántas caras, vértices y lados tiene el objeto construido?
- **e)** ¿Cuáles crees que son las dificultades para determinar el número de caras, vértices y lados que tiene cada uno de los objetos construidos?

2. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en el numeral 1 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

Anexo 2. Guía de Trabajo 2 (G2).

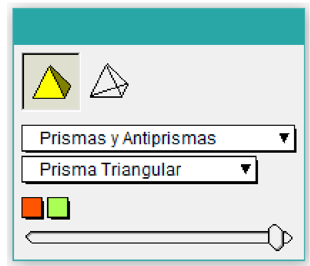
SITUACIÓN S1-G2

1. En el menú móvil seleccione la opción de Solidos Platónicos y luego seleccione Tetraedro.

2. Manipule el Tetraedro que aparece en la pantalla sosteniendo el botón derecho del mouse.
3. ¿Qué tipo de figuras planas son las caras del Tetraedro?
4. Determine el número de caras, vértices y aristas del Tetraedro.
5. Dibuje el desarrollo plano del Tetraedro en la hoja de papel entregada.

SITUACIÓN S2-G2

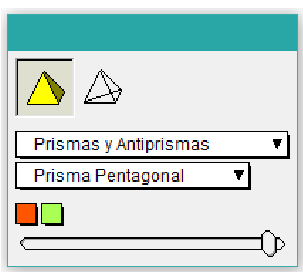
1. En el menú móvil seleccione la opción de Prismas y Antiprismas y luego seleccione Prisma Triangular.



2. Manipule el Prisma Triangular que aparece en la pantalla sosteniendo el botón derecho del mouse.
3. ¿Qué tipo de figuras planas son las caras del Prisma Triangular?
4. Determine el número de caras, vértices y aristas del Prisma Triangular.
5. Dibuje el desarrollo plano del Prisma Triangular en la hoja de papel entregada.

SITUACIÓN S3-G2

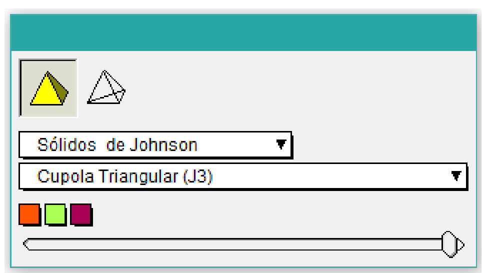
1. En el menú móvil seleccione la opción de Prismas y Antiprismas y luego seleccione Prisma Pentagonal.



2. Manipule el Prisma Pentagonal que aparece en la pantalla sosteniendo el botón derecho del mouse.
3. ¿Qué tipo de figuras planas son las caras del Prisma Pentagonal?
4. Determine el número de caras, vértices y aristas del Prisma Pentagonal.
5. Dibuje el desarrollo plano del Prisma Pentagonal en la hoja de papel entregada.

SITUACIÓN S4-G2

1. En el menú móvil seleccione la opción de Sólidos de Johnson y luego seleccione Cupola Triangular (J3).

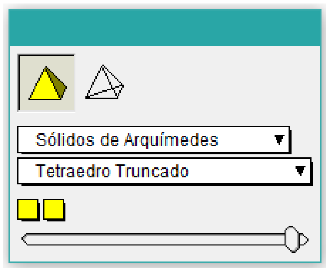


2. Manipule la Cúpula Triangular que aparece en la pantalla sosteniendo el botón derecho del mouse.
3. ¿Qué tipo de figuras planas son las caras de la Cúpula Triangular?
4. Determine el número de caras, vértices y aristas de la Cúpula Triangular.
5. Dibuje el desarrollo plano del Cúpula Triangular en la hoja de papel entregada.

<table>
<tr>
<td>

SITUACIÓN S5-G2

1. En el menú móvil seleccione la opción de Sólidos de Arquímedes y luego seleccione Tetraedro Truncado.



2. Manipule el Tetraedro Truncado que aparece en la pantalla sosteniendo el botón derecho del mouse.
3. ¿Qué tipo de figuras planas son las caras del Tetraedro Truncado?
4. Determine el número de caras, vértices y aristas del Tetraedro Truncado.
5. Dibuje el desarrollo plano del Tetraedro Truncado en la hoja de papel entregada.

</td>
<td>

SITUACIÓN S6-G2

Conforme un trio con dos compañeros para realizar los numerales 1 y 2:

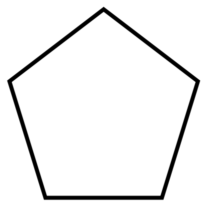
1. Comparen todos sus dibujos y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.
2. Para realizar el desarrollo plano de un poliedro se puede partir de un dibujo de este objeto hecho en papel (como se realizó en la Guía 1) o de su representación en un programa geométrico (como se plantea en esta Guía 2), ¿de qué forma es más sencillo realizar esta tarea y por qué?

</td>
</tr>
</table>

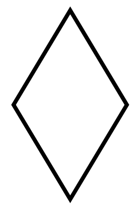
Anexo 3. Guía de Trabajo 3 (G3).

SITUACIÓN S1-G3: MÁS ALLÁ DE LO EVIDENTE

3. Observe los siguientes dibujos y responda la pregunta:



1



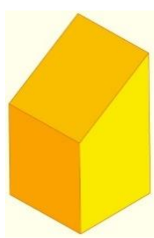
2

¿Qué objeto geométrico representa cada dibujo dado? Dibuje si lo considera necesario para su explicación.

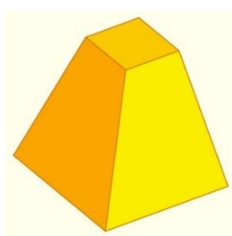
4. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en el numeral 1 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

SITUACIÓN S2-G3: DESENVOLVAMOS

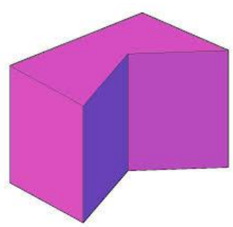
1. Observe los siguientes poliedros:



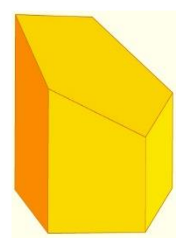
1



2



3



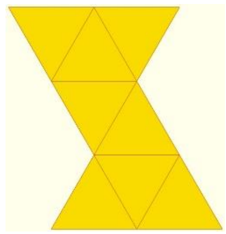
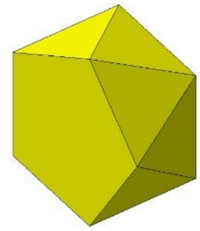
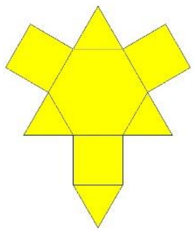
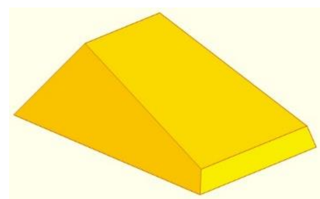
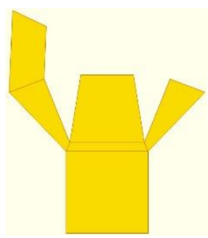
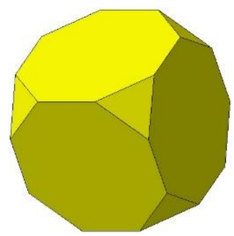
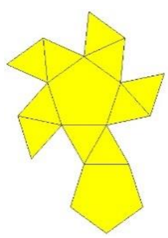
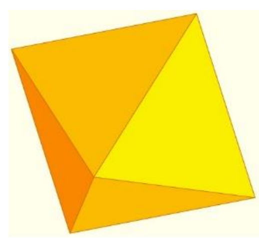
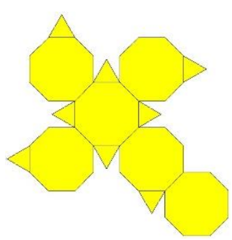
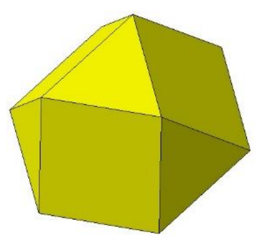
4

- **a)** ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene cada objeto dado?
- **b)** ¿Qué tipo de figuras planas son las caras de cada objeto dado?
- **c)** Suponga que es posible desenvolver cada objeto dado y dejarlo totalmente plano. Realice el dibujo que resultaría de esta acción.
- **d)** ¿Cuáles crees que son los aspectos que se deben tener en cuenta para dibujar correctamente el desarrollo plano de un objeto dado?

2. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en el numeral 1 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

SITUACIÓN S3-G3: RELACIONEMOS

1. Escriba el número de la columna izquierda en la casilla de la columna sombreada que corresponda para relacionar cada desarrollo plano con su respectivo poliedro:

1			
2			
3			
4			
5			

2. Explique qué aspectos tuvo en cuenta para relacionar cada desarrollo plano con su respectivo poliedro.
3. Conforme un trio con dos compañeros, comparen sus respuestas en los numerales 1 y 2 y escriban las semejanzas o diferencias encontradas.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Advíncula (2013). Enseñanza de los poliedros con Cabri 3D. *Actas del VII CIBEM ISSN*, *2301*(0797), 6820-6826.

  Recuperado de: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1025.pdf

- Almeida (2010). *Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estúdio de truncaturas baseadas no renascimento* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

  Recuperado de: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11454

- Almeida y Silva (2012). O Cabri 3D como hábitat para o estudo dos sólidos de Arquímedes. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012.* 202-211. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

  Recuperado de: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/110934

- Arcila, J. H., Bonilla, J. A., y Cardona, G. A. (2013). *Caracterización del uso de las transformaciones de isometría mediante el diseño de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica con Cabri 3D* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

  Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/4715

- Artigue, M. (1990). Epistemología y didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2), 3.

  Recuperado de: http://grupocalculo.galeon.com/articulo2.doc

- Becerra, Oscar José; Buitrago, Maritza Ruth; Calderón, Sonia Constanza; Gómez, Rodrigo Armando; Cañadas, María C.; Gómez, Pedro (2012). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez, (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes.

  Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1890/
- Bishop (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 7-16.

  Recuperado de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411128.pdf#page=188
- Bishop, A. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización. En Antología de Educación Matemática. *Grupo de estudios sobre Enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato. México: Centro de Investigación y estudios Avanzados del IPN*, pp. 29-42.
- Blanco (2013). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones* (tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

  Recuperado de: http://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11752/696.pdf?sequence=1
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *4*(2), 164-198.

  Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v2/document
- Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. (J. Centeno, Begoña M. y J. Murillo, Trads.). España: Seminario Matemático García de Galdeano, de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. (Trabajo original publicado en 1986).

  Recuperado de: http://www.fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/FundamentosBrousseau.pdf

- Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. En G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

  Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516595v2/document
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, *12*(1), 5-38.

  Recuperado de:

  http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/03Brousseau.pdf
- Campos y Joaqui (2014). *Reconocimiento de propiedades de poliedros regulares con Cabri 3D en grado tercero de educación básica* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

  Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/6775
- Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *1*(2).

  Recuperado de:

  http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%203.pdf
- Chaves, A. L. (2001). Implicaciones educativas de la teoría sociocultural de Vigotsky. *Revista Educación*, *25*(2), 59-65.

  Recuperado de: http://www.redalyc.org/html/440/44025206/
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado, 3*.

  Recuperado de: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf.

- D'Amore B. (2006*)*. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, número especial*, 177-196. Cinvestav, México DF., México.
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17*(1), 87-106. Recuperado de: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/655%20Epistemologia%20didactica%20
- D'Amore, B., Godino, J. & Fandiño, M. (2008). *Competencias y Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Díaz (2014). *El uso de las tics como medio didáctico para la enseñanza de la geometría. Estudio de caso: grados segundos de básica primaria de la Institución Educativa Seminario (Ipiales-Nariño)* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

  Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/43056/1/8413024.2014.pdf
- Díaz, J. R. y Canino, C. A. (2012). Heurística de los poliedros regulares para la investigación. *Revista Cubana de Ingeniería, 3*(2), 59-69.

  Recuperado de: http://rci.cujae.edu.cu/index.php/rci/article/view/68
- Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. (*M. Vega, Trad.).* Cali, Colombia: Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

  Recuperado de: http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

- Fairstein, G. y Carretero, M. (2007). La teoría de Jean Piaget y la educación. Medio siglo de debates y aplicaciones. En: Trilla, J. (Comp.) *El legado pedagógico del siglo XX para la escuela del siglo XXI* (pp. 177-206). Barcelona: Editorial Graó.
- Fernández (2013). *La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro.* En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, N. Climent (Eds.), I*nvestigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

  Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/6227/
- Gisele, Verbanek y Goldoni (2013). Poliedros arquimedianos: materiais manipuláveis e o software Poly como alternativa didática. *Sociedad Brasileira de Educación Matemática – XI Encontro Nacional de Educación Matemática*. 1-10.

  Recuperado de: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2518_1018_ID.pdf
- Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid, España: Síntesis.

  Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/426/424
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *22*(2.3), 237-284.

  Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/334
- Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 99-117.

  Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3587/1/Gonzato2011TareasNumerodf

- Gonzato, M., Godino, J. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, *23*(3), 5-37.

  Recuperado de: https://ria.ua.pt/handle/10773/7655
- Gonzato, M., Godino, J., Contreras, A., Estepa, A. y Díaz, C. (2016). Evaluación de Conocimientos Didáctico-Matemáticos sobre Visualización de Objetos Tridimensionales en Futuros Profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(3), 235-262.

  Recuperado de: http://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/1984/pdf
- Guillén (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21-68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Gutiérrez y Jaime (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53-83.

  Recuperado de: http://digibug.ugr.es/handle/10481/34155#.WVGpjZA1_Dc
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 1*, 3-19.
- Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. *Texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, España. Documento manuscrito, obtenido en abril*, 2, 2007.

  Recuperado de: http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf

- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P.; Ruiz, F.; De la Fuente, M. (eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

  Recuperado de: https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut06.pdf
- Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53-83.

  Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5126/1/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf
- Gutiérrez, Adela y Alba (2014). *Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática.* En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), Investigación en educación matemática (pp. 405-414). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

  Recuperado de:

  http://funes.uniandes.edu.co/6022/1/Guti%C3%A9rrez2014G%C3%A9nesisSEIEM.pdf
- Hernández R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación. Sexta edición*. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill.
- Hernández, B. y Bastidas, R. (2014). *Uso complementario de materiales manipulativos y del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D en la comprensión de las propiedades geométricas del cubo (tesis de pregrado).* Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

  Recuperado de:

  http://biblioteca.udenar.edu.co:8085/bibliotecavirtual/viewer.aspx?yvar=90119

- ICFES (2016-a). *Cuadernillo de la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2012.*

  Recuperado de: http://www.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/guias-y-ejemplos-de-preguntas
- ICFES (2016-b). *Cuadernillo de la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2013.*

  Recuperado de: http://www.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/guias-y-ejemplos-de-preguntas
- ICFES (2016-c). *Cuadernillo de la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2014.*

  Recuperado de: http://www.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/guias-y-ejemplos-de-preguntas
- ICFES (2016-d). *Cuadernillo de la Prueba de Matemáticas para el grado noveno en el año 2015.*

  Recuperado de: http://www.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/guias-y-ejemplos-de-preguntas
- ICFES (2016-e). *Resultados de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2012*.

  Recuperado de:

  http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx
- ICFES (2016-f). *Resultados de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2013*.

  Recuperado de:

  http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

- ICFES (2016-g). *Resultados de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2014*.

  Recuperado de:

  http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

- ICFES (2016-h). *Resultados de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2015*.

  Recuperado de:

  http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

- ICFES (2016-i). *Resultados de grado noveno de la Institución Educativa Ateneo en la Prueba Saber 9° del año 2016*.

  Recuperado de:

  http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

- Lang, B. y Ruane, P. (1981). Geometry in English Secondary Schools. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 12, pp. 121-132.

  Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00386050?LI=true

- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). *Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares.* PNA, *3*(1), 35-48.

  Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/563/

- Luria, A. R. y Vygotsky, L. S. (1992). *Ape, Primitive Man, and Child Essays in the History of Behavior*. CRC Press.

- Martín, N. (2014). *Utilización del programa Cabri 3D como herramienta didáctica para la enseñanza de Geometría en 2º de ESO* (tesis de maestría). Universidad Internacional de la Rioja, Madrid, España.

  Recuperado de: http://reunir.unir.net/handle/123456789/2122
- Merma, D. (2015). *Estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele* (tesis de maestría). Universidad San Ignacio de Loyola, Lima, Perú.

  Recuperado de: http://repositorio.usil.edu.pe/bitstream/USIL/2080/2/2015_Merma.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de calidad. *En: Área de matemáticas* (pp. 61-84). Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Moreno, M. L. (2015). *Apoyo didáctico computarizado de la técnica origami para el aprendizaje de los poliedros en educación media de la UE Experimental." Simón Bolívar" APUCITO, ubicado en la trigaleña-edo. Carabobo* (tesis de maestría). Universidad de Carabobo, Naguanagua, Venezuela.

  Recuperado de: http://www.mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/2074/3/mmoreno.pdf
- Moya, M. A. (2016). *Articulación de las aprehensiones en la construcción del cubo truncado con Cabri 3D en estudiantes del quinto de secundaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, San Miguel, Perú.

  Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6675

- Ortega, T. y Pecharomán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 95-117. Recuperado de: http://aiem.es/index.php/aiem/article/view/84
- Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (Comp.). *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de la EGB: análisis y propuestas* (pp. 59-71). Buenos Aires, Argentina: Paidós. Recuperado de: http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf
- Perea, B. (2016). *Las tecnologías de* información *y la comunicación como estrategias para potenciar el desarrollo de competencias y el aprendizaje de poliedros regulares* (tesis doctoral). Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia. Recuperado de: https://repository.upb.edu.co/handle/20.500.11912/2913
- Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. En: L. D. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum. Recuperado de: https://www.ams.org/journals/notices/199905/rev-dubinsky.pdf
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En: *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Recuperado de: http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf
- Ramírez, G. A. y Suárez, P. (2011). Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. *Praxis y Saber*, *2*(3), 27-60. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/4772/477248387003.pdf

- Ramírez, R. (2013). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Granada, España: Universidad de Granada.

  Recuperado de: http://hdl.handle.net/10481/23889
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

  Recuperado de: http://aiem.es/index.php/aiem/article/view/4
- Rondan, G. M. (2016). *Los poliedros: análisis de una organización matemática en un libro de texto de sexto grado de educación primaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, San Miguel, Perú.

  Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6749
- Silva, M. J. (2012). A construcao de situacoes problemas utilizando o Cabri 3D. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012*. 23-37. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

  Recuperado de: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/123811
- Silva, M. J. y Salazar, J. V. (2012). Cabri 3D na sala de aula. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012*. 101-107. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

  Recuperado de: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/123811
- Torregrosa, G., Quesada H. y Penalva M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Revistes Catalanes amb Accés Obert –RACO* 28(3), pp. 327- 340.

  Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/265820

- Vigotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona, España: Crítica-Grijalbo.
- Vigotsky, L. S. (1979). Interacción entre aprendizaje y desarrollo. En M. Cole, V. Jhon-Steiner, S. Scribner y E. Souberman (Eds.), *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (pp. 123-140). Barcelona, España: Crítica-Grijalbo.
- Vila, I. (2007). Lev S. Vigotsky: la psicología cultural y la construcción de la persona desde la educación. En: Trilla, J. (Comp.) *El legado pedagógico del siglo XX para la escuela del siglo XXI* (pp. 207-227). Barcelona: Editorial Graó.
- Villani, V. (2001). *Perspectives en l'ensenyament de la geometría pel segle XXI: Documento de discusión para un estudio ICMI.*

  Recuperado de: http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm
- Yacuzzi, M. L. y Borzi, S. L. (2015). La génesis de la representación en Piaget y en Vigotsky. En *V Congreso Internacional de Investigación de la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional de La Plata*. Congreso llevado a cabo en la Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina.

  Recuperado de: http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/56086
- Zapata, G. P. (2014). *El desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento* (tesis de pregrado). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.

  Recuperado de: http://200.24.17.68:8080/jspui/bitstream/123456789/1324/1/JC0943.pdf