Universidad ICESI
Escuela de Ciencias de la Educación
Maestría en Educación

Trabajo de grado

Desarrollo de la competencia Comunicar en estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Cristóbal Colón, por medio del aprendizaje del concepto de división utilizando una situación didáctica

Maricel Castro Martínez
Bibiana María Rodríguez Rubio

Santiago de Cali
2018

Desarrollo de la competencia Comunicar en estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Cristóbal Colón, por medio del aprendizaje del concepto de división utilizando una situación didáctica

Maricel Castro Martínez
Bibiana María Rodríguez Rubio

Trabajo de grado presentado como requisito para la obtención del grado de Magister en Educación

Director
Mg. Giovanni Moisés Álvarez Serna

Universidad Icesi
Escuela de Ciencias de la Educación
Maestría en Educación
Santiago de Cali
2018

Dedicatoria

A nuestros hijos, que son el mayor triunfo que hemos tenido en nuestras vidas.

A nuestros padres, que con su apoyo incondicional nos facilitan la vida.

A nuestros esposos, cuya ayuda fue fundamental para lograr culminar con éxito esta etapa de nuestras vidas.

A cada uno de los maestros de primaria que pudieran llegar a conocer esta investigación, para los cuales la enseñanza de las matemáticas es toda una hazaña pues no están formados en el área. Esperamos que las conclusiones a las que llegamos y recomendaciones que sugerimos ayuden al mejoramiento de su práctica pedagógica y de los aprendizajes de los estudiantes.

Agradecimientos

En primer lugar agradecemos a Dios por poner en nuestros caminos esta Maestría, la cual a través de la presente investigación y el desarrollo de las diferentes asignaturas, nos permitió realizar un proceso reflexivo que impactó de manera positiva nuestras prácticas de aula.

A cada uno de los maestros que tuvimos, especialmente a Bernardo García y Freddy Asprilla quienes a través de sus orientaciones y las actividades desarrolladas en los cursos Didáctica de las Matemáticas, Epistemología de las Matemáticas y Campo Didáctico de las Matemáticas nos ayudaron a construir muchos elementos del presente trabajo.

A la universidad ICESI por hacer evocación a su lema y generar espacios de aprendizaje y discusión “a otro nivel” y al Ministerio de Educación Nacional por confiar en los maestros y maestras colombianos que perseguimos la meta de Educación de Calidad y por ello aceptamos la convocatoria para capacitarnos y alcanzar la excelencia docente.

A nuestro asesor de tesis Giovanni Moisés Álvarez quien a través de sus observaciones y críticas propositivas permitió que la coherencia, cohesión y la pertinencia fueran factores visibles en nuestro trabajo.

A cada uno de los estudiantes que participaron de este proyecto y a Carol Ortiz, la maestra titular del grupo, que estuvo dispuesta a cambiar sus horarios para facilitar el desarrollo de las actividades.

Y para cerrar, a nuestras familias, quienes caminaron con nosotras en medio de sacrificios y esfuerzos que requerían nuestras ausencias, especialmente a nuestros hijos que supieron esperar con mucha paciencia el momento en que nuevamente nuestro tiempo libre fuera para ellos.

Tabla de Contenidos

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

La enseñanza de objetos matemáticos como las estructuras multiplicativas enfocadas en la división, se ve afectada por diversas dificultades de tipo procedimental como el tecnicismo y la mecánica y de tipo cognitivo como la poca comprensión de enunciados matemáticos, el desconocimiento del vocabulario propio del área, entre otras. Estas dificultades repercuten en los bajos resultados que se obtienen en las evaluaciones internas y externas y la dinámica de clase que se desarrolla cotidianamente, donde se evidencia la apatía de los estudiantes hacia las matemáticas. Las anteriores dificultades están relacionadas con la competencia matemática comunicar, que de acuerdo a lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional es uno de los procesos más importantes para resolver problemas matemáticos. Como propuesta de solución se plantearon actividades para una situación didáctica relacionada con la solución de problemas a través de la división, la cual fue aplicada a estudiantes del grado tercero. El fundamento teórico de esta situación didáctica fue la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brosseau y la Teoría de los Registros Semióticos de Representación en Matemáticas de Raymond Duval. Los aportes de estas dos teorías fueron relacionados para diseñar y aplicar un gráfico de representación simbólica que potencializó en los estudiantes el aprendizaje del concepto de división, contribuyendo de manera directa al desarrollo de la competencia comunicar.

Palabras clave: Situación didáctica, conversión, tratamiento, representación semiótica, división, codificar, decodificar y comunicar.

Abstract

The teaching of mathematical objects as the multiplication structures division is affected by various procedural difficulties, such as technicality and mechanics, and cognitive type as the little understanding of mathematical statements, the Ignorance of the area's own vocabulary, among others. These difficulties have an impact on the low results obtained in internal and external assessments and in class dynamics, in which students ' apathy towards mathematics is evidenced. The previous difficulties are related to the mathematical competence to communicate, which according to what is raised by the men is one of the most important processes to solve mathematical problems. As a solution proposal, activities were raised for a problem-solving didactic situation through the division, which was applied to third grade students. The theoretical basis of this didactic situation was the theory of Guy Brousseau and the theory of semiotic records of representation in mathematics of Raymond Duval. The contributions of these two theories were united to design and apply a graphic of symbolic representation that empowered students to learn the concept of division. Contributing directly to the development of the competition to communicate.

Keywords: Didactic situation, conversion, treatment, semiotic representation, division, encode, decode and communicate.

Introducción

Esta investigación se enmarca dentro del campo de la didáctica de las matemáticas y responde a la necesidad de potenciar en los estudiantes la competencia comunicar, como medio para lograr un mejor desempeño en su actividad matemática.

El trabajo se centra en la aplicación de una situación didáctica, fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Guy Brousseau, la cual favorece en los estudiantes que cursan tercer grado, de la Institución Educativa Cristóbal Colón, el aprendizaje del concepto de división a partir de la planeación de un torneo de canicas. Los estudiantes deben repartir determinada cantidad de bolas entre un número de participantes, analizar qué pasa si dicho número cambia y proponer una nueva cantidad de personas para que no sobren o falten canicas al repartirlas en partes iguales. Esto se realiza en mesas de trabajo colaborativo, donde cada grupo tiene la oportunidad de discutir las diversas tareas y llegar a una respuesta conciliada.

De esta forma, se comprobó que la ejecución de la situación didáctica favoreció la comprensión del concepto de división, objeto de estudio en esta investigación. También se evidenció que las conversiones que tuvieron que realizar los estudiantes en el trascurrir de la situación, potenciaron su aprendizaje, tal como lo afirma Raymond Duval en su Teoría de las Representaciones Semióticas.

"Diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas" (MEN, 1998, pág. 74). En este sentido, la comunicación es fundamental en el proceso de apropiación del lenguaje matemático para la construcción de conceptos propios del pensamiento numérico. Dicha apropiación requiere procesos de transformación de la información que presenta un enunciado en lengua natural en una forma que permita la aplicación de un tratamiento o una conversión. Según D'Amore (2004), la conceptualización matemática requiere necesariamente que el estudiante tenga la habilidad de utilizar más registros de representaciones semióticas de dichos conceptos. De acuerdo con esto, para la construcción de un concepto matemático se requiere en primer lugar representarlo en un registro, luego realizar tratamiento dentro de dicho registro, y finalmente, convertir estas representaciones a otro registro.

Es por esto que la situación didáctica aplicada logró potenciar en los estudiantes la comprensión del concepto del objeto matemático división, dado que debieron leer el problema en lenguaje natural, a partir de trabajo con material manipulativo convertirlo a una representación tabular, y una vez culminada la situación de institucionalización, realizar nuevamente conversión a un registro gráfico bidimensional diseñado durante la investigación, para finalmente convertir esta representación gráfica en una respuesta en lenguaje natural.

Justificación

Cada día se hace más evidente la enorme frustración que sienten los niños y jóvenes después de enfrentarse a pruebas matemáticas, donde se pone en juego su habilidad para resolver problemas. Pruebas que pueden abarcar desde problemas aditivos elementales hasta expresiones complejas. En el documento de la Unesco de 2009, se puede evidenciar el reflejo de las deficiencias en el aprendizaje de los procesos matemáticos: sólo el 50% de los estudiantes que se enfrentan a pruebas externas en Colombia responden correctamente las preguntas. Una estadística similar encontramos a nivel interno en la Institución Educativa Cristóbal Colón, en el análisis presentado por los coordinadores en el día E del año 2016. Los maestros de matemáticas consideramos que se hace urgente implementar nuevas prácticas pedagógicas que impacten de manera llamativa los niveles de complejidad de las competencias matemáticas de los estudiantes cristobalinos.

Para la resolución de cualquier problema matemático se debe seguir una secuencia lógica, donde es necesaria la solución de un paso para continuar con el posterior. Al respecto, en el libro "¿Cómo plantear y resolver problemas?" (Polya, 1965) se evidencia que para resolver cualquier tipo de problema el estudiante debe utilizar un método generalizado en cuatro pasos: Comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Primero, el estudiante debe leer el problema y entender dos cosas: qué dice y qué pide. Seguidamente, es necesario que plantee en términos matemáticos lo que leyó en un lenguaje natural. Posteriormente, debe identificar qué operaciones debe utilizar para llegar a lo que se pide. Y finalmente, después de resolver las operaciones en cuestión, debe interpretar la solución y si es necesario convertirla nuevamente al lenguaje natural. En otras palabras, la persona que se enfrenta a un problema matemático debe realizar una serie de tratamientos y conversiones en los diferentes registros que pueden aparecer al interior del mismo.

Como se puede notar, los estudiantes no solamente necesitan saber resolver algoritmos matemáticos para solucionar este tipo de problemas; es preciso que sepan 'leer' para poder interpretar, comprender, transformar y volver nuevamente a interpretar. Es por esto que resulta primordial en la enseñanza de las matemáticas, tener en cuenta las representaciones semióticas. Al respecto Juan Francisco y José Ángel y Ortega (2004) dicen:

> *El conocimiento y uso del lenguaje matemático resulta totalmente necesario, siendo la mejor y única manera de comunicación correcta en esta ciencia. Si se pierde la gran virtud de las matemáticas que supone su exactitud y precisión, nos quedaría una ciencia con un lenguaje pobre que produciría errores y confusiones. Un estudiante de matemáticas tiene que saber los rudimentos del lenguaje matemático, de la misma forma que un alumno de literatura castellana debe extender su estudio a las herramientas básicas necesarias para comprender dicha materia: la gramática y la sintaxis castellana.* (p.47)

El proyecto de vida de una parte considerable de la población estudiantil converge hacia la educación superior en cualquiera de sus modalidades. Sin embargo, muchos de estos estudiantes ven sus esfuerzos frustrados debido a su bajo desempeño en el campo de las matemáticas. En la Institución encontramos estudiantes en grados superiores que desconocen nociones básicas como adición, sustracción, factor, etc. Estudiantes que muestran total asombro al pedirles que planteen diferencias entre conceptos como equilátero e isósceles, entre otros. Y así podríamos mencionar un sinfín de términos, nociones y conceptos matemáticos que son desconocidos para los educandos.

A pesar de que desde la propuesta curricular colombiana en los estándares básicos de competencia se propone la división como eje curricular a abordar finalizando el primer conjunto de grados (primero a tercero), aún en grados superiores se evidencia la escasa apropiación que poseen los estudiantes de este objeto matemático. Esta situación es más frecuente cuando los estudiantes deben dar solución a un problema usando una división, se les dificulta realizar el análisis que los lleve a plantear la operación que los acercará a la respuesta esperada. Y un gran porcentaje de los que logran establecer un plan, se "bloquean" en su ejecución pues no dominan el algoritmo de la división.

Con lo evidenciado anteriormente, se hace necesario planificar nuevas estrategias de enseñanza de las matemáticas en el campo de la comprensión, dominio y aplicación del lenguaje matemático, encaminado hacia la construcción de objetos matemáticos, para que de esta manera se pueda lograr un avance significativo en el resultado obtenido por los estudiantes tanto en las pruebas internas como en las externas.

En el estudio de las matemáticas hay errores que los estudiantes cometen de manera repetitiva, originados en gran parte por actitudes afectivas y emocionales. Estos errores pueden deberse a falta de concentración (por excesiva confianza), bloqueos (por miedos suscitados de tiempo atrás), u olvidos. "Los sentimientos de tensión y miedo de los alumnos hacia las matemáticas, están relacionados con múltiples asociaciones que intervienen afectiva y emocionalmente con el aprendizaje de esta disciplina; la jerarquía del conocimiento matemático, la actitud de profesores hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas, son entre otros aspectos asociadas a ansiedades y miedos productos de dificultades para aprender matemáticas” (Mcleod & Adams, 1989) .

Un estudiante que desde un principio no comprende una clase de matemáticas, es alguien que no tendrá ninguna motivación para participar activamente de la misma, por el contrario se escudará en su mal comportamiento o en su total desinterés por la asignatura.

En la medida en que se logre un avance significativo en el campo de la comprensión matemática, crecerá la autoestima en los estudiantes, lo cual se verá reflejado en su dedicación al estudio con miras en lograr sus metas de una educación superior y de esta forma se facilitará su proceso de crecimiento personal. A futuro, se logrará un impacto social muy favorable en la comunidad, ya que el ejemplo de algunos será el motor que impulsará a otros a seguir por el camino de la educación.

El maestro juega un papel muy importante en este punto, si se acepta el hecho de que la didáctica de las matemáticas se centra en problemas de ‘comunicación de la matemática’, al respecto D’Amore (2006), citado por (García, 2014) plantea que una de las dificultades presentes dentro de la enseñanza de las matemáticas es la llamada paradoja del lenguaje específico, en donde el docente por velar que el lenguaje no sea un obstáculo para la comprensión de las matemáticas, acude al lenguaje común (natural, coloquial) evitando el lenguaje especifico de ésta, que es lo que da sentido a la estructuras de los conceptos matemáticos, a sabiendas que su objetivo no es sólo que los estudiantes aprendan y entiendan sino, que se apropien del lenguaje matemático:

> *"la enseñanza es comunicación y uno de sus objetivos es el favorecer el aprendizaje de los estudiantes; entonces, en primer lugar, quien comunica debe hacer que el lenguaje utilizado no sea fuente de obstáculos para la comprensión; la solución parecería banal: basta evitar a los estudiantes ese lenguaje específico: toda la comunicación debe darse en la lengua común; la matemática tiene su lenguaje específico (más aún es un lenguaje especifico); uno de los principales objetivos de quien enseña es el hacer que los estudiantes aprendan no solo que entiendan, pero también es el que se apropien de ese lenguaje especializado; por lo que, no puede evitarse hacer entrar en contacto a los estudiantes con ese lenguaje especifico, es más: al contrario, se necesita presentarlo (¿imponerlo?) para que lo hagan propio"* (p.8).

Capítulo 1

Formulación del problema de investigación

1.1 Caracterización de la Institución Educativa Cristóbal Colón

La Institución Educativa Cristóbal Colón está ubicada en el Barrio Mariano Ramos, en la comuna 16, al Oriente de la Ciudad de Santiago de Cali. Está conformada por cuatro sedes así: Central, Bienestar Social, Antonia Santos y José Joaquín Jaramillo. Ofrece todos los niveles de educación formal: preescolar, básica primaria, básica secundaria y media técnica, en las jornadas de la mañana y la tarde. Además cuenta con programas de educación para adultos por ciclos en la Sede Central de manera presencial. También atiende población extra edad en condición de vulnerabilidad con los programas de metodologías flexibles: Brújula (sede Bienestar Social), Aceleración del Aprendizaje y Caminar por Secundaria (Sede Central). En el año 2018 su población es cercana a 1.700 estudiantes.

1.1.1 Reseña histórica. La Institución Educativa Cristóbal Colón fue creada el 3 de septiembre de 2.002, mediante resolución número 1736 de la Secretaría de Educación Departamental como consecuencia de la fusión de centros docentes, con el objetivo de brindar Educación Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Vocacional bajo una sola administración y una sola planta de personal.

La Institución Educativa Cristóbal Colón es la fusión de la unidad docente Cristóbal Colón y las escuelas de primaria Bienestar Social, Antonia Santos y José Joaquín Jaramillo, ubicadas en la comuna 16, para la cual se nombró como rector al licenciado Antonio Euler Gómez Moreno.

En la actualidad la Institución ha graduado 14 promociones de bachilleres comerciales jornada diurna y 9 promociones de bachilleres académicos jornada nocturna.

1.1.2 Población. Para el año lectivo 2018, la Institución Educativa Cristóbal Colón cuenta con la población que se puede evidenciar en las siguientes tablas:

Tabla 1

Personal administrativo

Administrativos Docentes	Administrativos	Total
5	11	13

Tabla 2

Personal docente

Tipo de Nombramiento	Número de docentes
Decreto 2277	26
Decreto 1278	34
Provisionales	7
Equipo de apoyo	4
Total	71

1.1.3 Problemas sociales que impactan a la institución. La población estudiantil de la Institución Educativa Cristóbal Colón convive a diario con realidades sociales que influyen de manera negativa en su desempeño académico y de convivencia. Problemas como la carencia de recursos económicos suficientes para suplir necesidades básicas, la violencia, el desempleo, la pobreza, el abandono y los conflictos intrafamiliares hacen parte del diario vivir de los estudiantes. Un gran número de familias son de tipo disfuncional y viven en condición de hacinamiento.

Dentro de la población existe un número elevado de estudiantes que viven en el sector de Llano Verde, barrio creado para la reubicación de personas desplazadas, que deben atravesar dos barrios para llegar a estudiar. Dichos estudiantes son en su totalidad perteneciente a familias desplazadas por la violencia, beneficiarias del Programa del Gobierno Nacional Familias en Acción. La realidad socioeconómica de estos niños y adolescentes impiden que su proceso de aprendizaje se desarrolle en condiciones propicias para alcanzar los objetivos propuestos.

El contexto familiar de los estudiantes es uno de los obstáculos más grandes para obtener resultados favorables en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los padres y madres de familia son en un gran número analfabetas o sólo cursaron la educación básica; poseen trabajos informales que les demandan ausencias prolongadas y se manifiestan en el poco acompañamiento escolar a sus hijos. Existe una cultura de inasistencia y de poco trabajo extraescolar que afecta el desempeño de los estudiantes.

El fácil acceso a las sustancias sicoactivas que hay en el sector es otra de las grandes problemáticas a las que se ve enfrentada la institución educativa, el micro tráfico y el vandalismos se suman a la lista.

1.2 Diagnóstico de la institución

El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) realiza pruebas periódicas en los diferentes ciclos del sistema educativo con el propósito de contribuir a mejorar la calidad de la educación en Colombia. Según el ICFES, hay dos tipos de Prueba Saber, una censal y otra muestral. La primera, está a cargo de las Secretarías de Educación y tiene como objetivo brindar información a los establecimientos educativos sobre el desempeño de sus estudiantes para que puedan formular planes de mejoramiento acertados. La segunda está a cargo del ICFES y busca determinar el desarrollo de las competencias de los estudiantes. Incluyen distintas preguntas de selección múltiple, que están organizadas en un cuadernillo.

Las pruebas Saber 3°, 5° y 9° y la Saber 11 evalúan componentes y competencias específicos en cada una de las áreas que se incluyen en las mismas. Según un informe nacional del ICFES (2017) “Cada área del conocimiento tiene distintos aspectos específicos, llamados componentes, que están enmarcados dentro de cada competencia y ayudan a definir con mayor claridad los contenidos de la prueba” (p. 7). En la **Tabla 3** se pueden apreciar las competencias que se evalúan y sus respectivos componentes, para el caso de las matemáticas.

Tabla 3

Competencias y componentes evaluados para el área de matemáticas

Competencias	Componentes
Razonamiento y argumentación	Numérico - variacional
Comunicación, representación y modelación	Geométrico - métrico
Planteamiento y resolución de problemas	Aleatorio

Nota: Extracto de la Tabla 1, tomada de ICFES (2017).

Considerando lo anterior, en este estudio se revisa la manera cómo estas pruebas abordan desde dichas competencias y componentes el objeto matemático estructuras multiplicativas centradas en la división, en los diferentes grados.

De acuerdo con el ICFES, en estas pruebas se pueden presentar dos tipos de resultados: los Indicadores Básicos y los Indicadores de Contexto. Los primeros son tres indicadores que muestran el perfil de las competencias desarrolladas por los estudiantes en la Educación Básica: el puntaje promedio, que va de 100 a 500; la desviación estándar, que mide la dispersión de los resultados, es decir, brinda información de qué tan homogéneos son los aprendizajes de los estudiantes; y por último, los niveles de desempeño, que determinan la proporción de estudiantes que logran responder preguntas de distintos niveles de complejidad según los puntajes obtenidos. "El último indicador muestra el porcentaje de estudiantes que alcanzan los distintos conocimientos y habilidades definidos para cada uno de los cuatro niveles de desempeño, según el área y el grado evaluado" (ICFES, 2017, p.9). En la **Tabla 4** se pueden visualizar las características de estos niveles.

Tabla 4

Descripción general de los niveles de desempeño

Competencias	Componentes
Avanzado	Muestra un desempeño sobresaliente en las competencias esperadas para el área y el grado evaluados.
Satisfactorio	Tiene un desempeño adecuado en las competencias exigidas para el área y el grado evaluado. Este es el nivel esperado que todos, o la gran mayoría de los estudiantes, deberían alcanzar.
Mínimo	Muestra un desempeño mínimo en las competencias exigibles para el área y el grado evaluados.
Insuficiente	No supera las preguntas de menor complejidad de la prueba.

Nota: Tomada de la Tabla 8. ICFES (2017).

De acuerdo a lo explicado por el ICFES en su documento del año 2.016, los resultados son presentados a las instituciones educativas en diferentes gráficas que conservan una misma estructura. Cada gráfica muestra un grado y área, para los años del análisis, y puede indicar los agregados a nivel nacional o estar desagregada en los grupos de referencia. Cada gráfica tiene dos paneles que muestran el porcentaje de estudiantes en los niveles de desempeño, el puntaje promedio y la desviación estándar. El panel A de la gráfica muestra el porcentaje de estudiantes en cada uno de los cuatro niveles de desempeño en cada año. El porcentaje en color rojo hace referencia al nivel insuficiente, naranja al nivel mínimo, amarillo a satisfactorio y verde a avanzado. El panel B muestra el puntaje promedio y, en paréntesis, la desviación estándar del agregado. La desviación estándar es sumada y restada del puntaje promedio. De esta manera, el lector puede hacerse una idea de la heterogeneidad de los estudiantes que conforman dicho resultado promedio. Un aumento en la desviación estándar es algo negativo debido a que es preferible tener estudiantes en niveles de aprendizaje similares. Los símbolos en este panel indican si el cambio en el puntaje promedio es considerable año a año, teniendo en cuenta criterios estadísticos. Un círculo indica que el cambio es nulo o no considerable, mientras que un triángulo indica que el cambio (positivo o negativo) es considerable; según se puede ver en la *figura 1*.

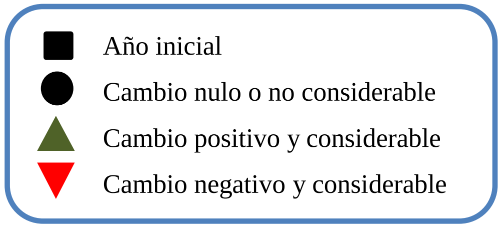


Figura 1: Cambios en el puntaje promedio

En la **Tabla 5** se presenta el número de estudiantes evaluados para los últimos años en la Institución Educativa Cristóbal Colón en grado tercero, y en la *figura 2* se muestran los resultados de la competencia comunicar para estos estudiantes en dichos años.

Tabla 5

Número de estudiantes evaluados por año en matemáticas, tercer grado

Año	Número de estudiantes evaluados
2014	77
2015	69
2016	79

Nota: Tomada de ICFES (2016) Informe Nacional Saber 3°, 5° y 9°.

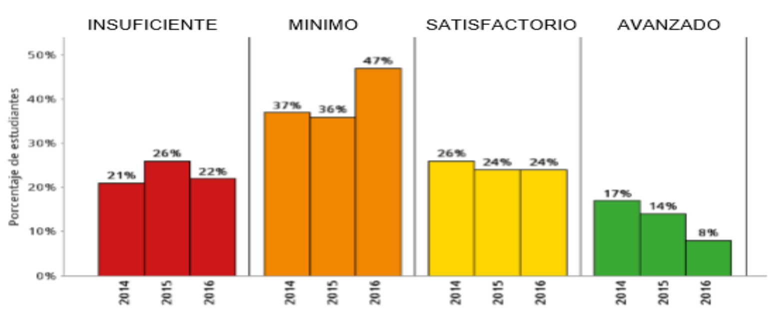
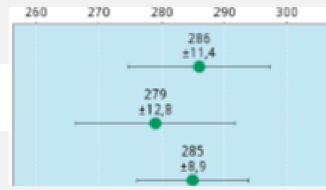


Figura 2: Comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año en la competencia comunicar tercer grado

Tabla 6

Comparación de los puntajes promedio y los márgenes de estimación del establecimiento educativo por año, en matemáticas tercer grado

Año	Puntaje Promedio	Margen de estimación	Intervalo de confianza	Intervalos de confianza para la puntuación estimada de la escala
2014	286	± 11,4	(274,6 – 297,4)	
2015	279	± 12,8	(266,2 – 291,8)	
2016	285	± 8,9	(276,1 – 293,9)	

Nota: Tomada de ICFES (2016) Informe Nacional Saber 3°, 5° y 9°.

En la **Tabla 6**, se puede apreciar que no existen diferencias estadísticamente significativas entre el puntaje promedio del establecimiento educativo en los años 2014, 2015 y 2016.

Haciendo énfasis en la competencia comunicar, para el año 2016, las *Figuras 3, 4, 5* y 6, tomadas de ICFES (2016) Informe Nacional Saber 3°, 5° y 9°, dejan evidenciar la falencia que existe en los estudiantes de la Institución Educativa en cuanto a la comunicación matemática.

Figura 3: Descripción general de la competencia

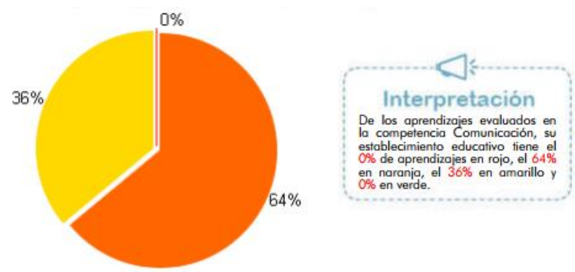


Figura 4: Descripción general de los aprendizajes

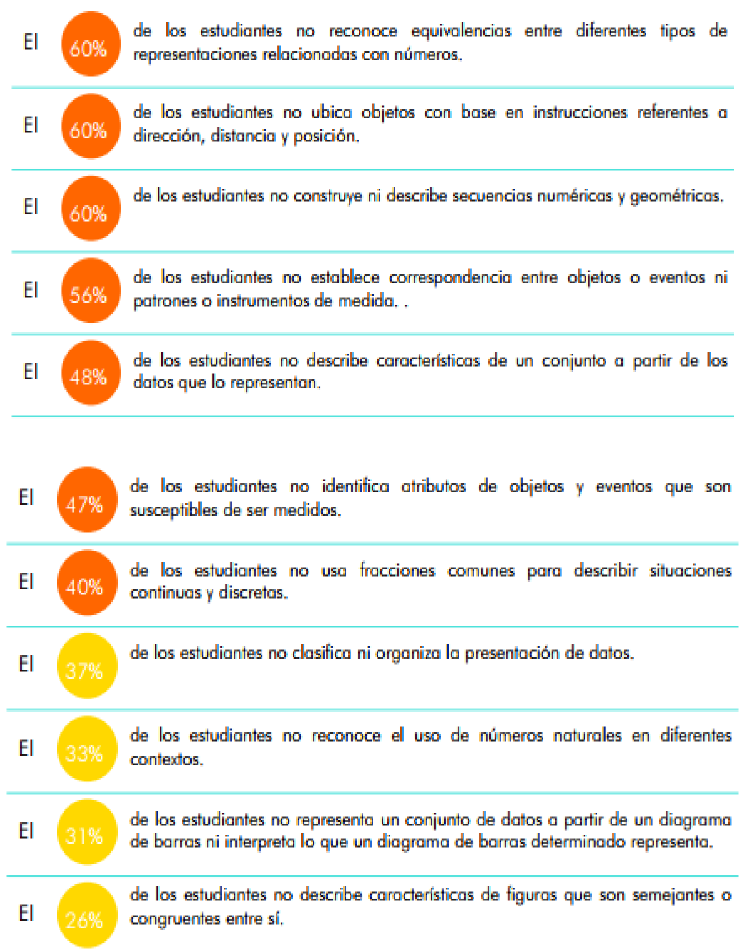


Figura 5: Aprendizajes

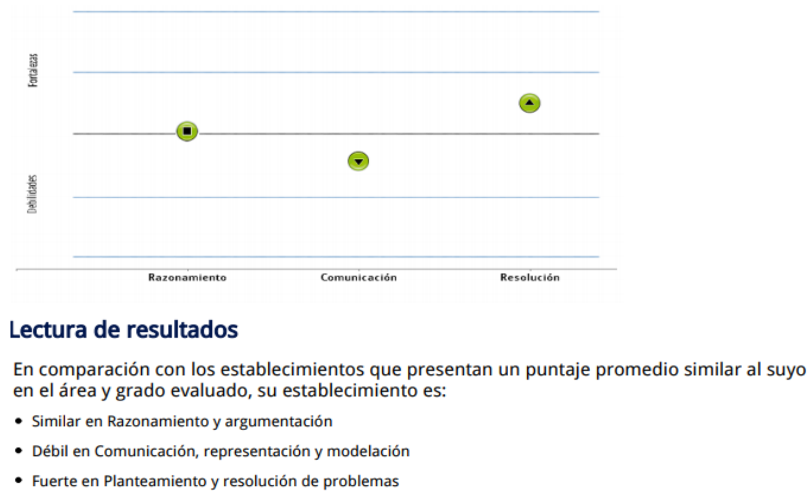


Figura 6: Comparación de competencias entre establecimientos con puntajes promedios similares

La **Tabla 7** evidencia la competencia y el componente que afectan al objeto matemático en estudio, a fin de puntualizar el análisis de los resultados de la Prueba Saber.

Tabla 7

Competencia y componente que afectan al objeto matemático: estructuras multiplicativas

OBJETO MATEMÁTICO	COMPETENCIA	COMPONENTE
Estructuras multiplicativas centradas en la división	Comunicación	Numérico - variacional

Los antecedentes institucionales que se presentaron fueron tomados de los resultados de las pruebas saber en los grados tercero, quinto y noveno. Cabe aclarar que solo se presentan los gráficos del grado tercero porque el objeto matemático en estudio (concepto de división) se encuentra ubicado en este grado según la propuesta curricular colombiana y el PEI de la Institución Educativa Cristóbal Colón.

Desde la revisión de los puntajes promedio en los resultados generales de los grados, se puede observar que en el grado tercero se mantuvo el puntaje promedio durante los 3 años analizados, pues las diferencias que se obtuvieron no son estadísticamente significativas. En el grado quinto se mantiene el promedio entre los años 2.015 y 2.016, pero existe un aumento notable entre 2.014 y 2.015. Se presenta un retroceso llamativo en el último año. Esto puede obedecer a las irregularidades que en este periodo se dieron en las contrataciones públicas, permaneciendo estos grados desescolarizados por largos periodos. El puntaje promedio en el grado noveno ha ido en aumento.

Lo anterior abre un interrogante sobre la enseñanza del área en el grado quinto especialmente, pues los puntajes promedio obtenidos en este grado por los estudiantes revelan un retroceso que debe detenerse. El grado quinto cierra el ciclo de la educación básica, el hecho de que la institución educativa este teniendo tan bajos resultados en este grado, sugiere que se revisen los aprendizajes de los chicos en toda la básica primaria. Pero también podría afirmarse que el estudio de objetos matemáticos propios del grado cuarto y quinto debe profundizarse y revisar los saberes previos que ayudan a la comprensión de los mismos.

Abordando los resultados por niveles de desempeño (insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado), en el grado tercero el promedio de estudiantes en el nivel más bajo ha sido semejante durante los tres años, entre 21% y 22% de la población evaluada. Es decir, que de los 75 estudiantes que en promedio han sido evaluados, 17 estudiantes se encuentran en nivel insuficiente. Se observa cómo el nivel satisfactorio también se mantiene en los tres años. Un porcentaje muy pequeño, solo el 4%, pasa del nivel más bajo al nivel satisfactorio. En el nivel más alto se encuentran muy pocos estudiantes y éste tiende a ir disminuyendo.

Estas cifras evidencian los pocos avances y mejorías que la institución ha tenido en el grado tercero durante estos años. A pesar de los planes de mejoramiento que se han implementado no se logra un impacto mayor.

En el grado quinto es motivo de preocupación el aumento del número de estudiantes que año tras año pasan de un nivel mayor a uno menor. En el año 2.014, 44% de los estudiantes son ubicados en insuficiente, luego en el 2.015 aumentan a 49% con una diferencia de estudiantes evaluados tan sólo de 6. Y en el 2.016 pasan de 49% a 59% con igual cantidad de población que presenta la prueba. El aumento obtenido entre los dos últimos años es el más alarmante pues 12 estudiantes más de los 121 evaluados se ubican con este reprobable resultado. Así mismo hay decrecimiento en los otros niveles.

En el grado noveno es favorable la disminución que ha ido teniendo el nivel de desempeño insuficiente, lo que demuestra que el puntaje promedio de los estudiantes ha mejorado. Este nivel ha tenido disminuciones hasta del 12% entre el 2.014 y el 2.015. A pesar de lo anterior, todavía hay muchos estudiantes en el nivel mínimo y muy pocos en el nivel avanzado, cabe anotar que el número de estudiantes evaluados no ha tenido una variación importante.

Todo lo anterior sugiere un plan de mejoramiento intensivo y prioritario para mejorar los resultados de los estudiantes y poder tener menos estudiantes en el nivel mínimo que es el que tiene mayor porcentaje, especialmente en el grado quinto.

En cuanto a los aprendizajes evaluados dentro de la competencia Comunicar, en el grado tercero y noveno la institución educativa se encuentra ubicada como débil. En el grado quinto a pesar de los bajos resultados, en esta competencia fue clasificada como fuerte.

En el grado tercero más de la mitad de los estudiantes (64%) se encuentra en el nivel mínimo y el 36% en el nivel satisfactorio. Es favorable que no existan estudiantes en el nivel insuficiente pero desfavorable que el mayor porcentaje alcance de manera mínima los aprendizajes y que ninguno se encuentre en avanzado. El número de respuestas incorrectas a preguntas relacionadas con esta competencia, se encuentra por encima del porcentaje municipal y nacional.

Un número muy significativo de estudiantes tienen dificultades con el reconocimiento de las equivalencias entre diferentes representaciones relacionadas con números. Este es un aprendizaje necesario para lograr la construcción del concepto de operaciones matemáticas básicas como la división. El 33% no reconoce el uso de los números naturales en diferentes contextos; aspecto que se convierte en un obstáculo para la solución de situaciones problemas relacionadas con situaciones de reparto.

En el grado quinto la mitad de los estudiantes no contesta preguntas relacionadas con la competencia comunicar, muy por encima de la cantidad de estudiantes del municipio y del país. Es motivo de alerta que casi la totalidad (80%) de los estudiantes se encuentre en un nivel mínimo en dicha competencia y que sólo un 20% se encuentre en nivel satisfactorio. Al igual que en grado tercero no se obtienen resultados de tipo avanzado.

63% de los estudiantes evidencia dificultad en el uso de las operaciones con números naturales, entre las que se encuentra la división. Un 56% no traduce relaciones numéricas expresadas en gráficas y simbólicamente lo que refleja poca comprensión de otros registros semióticos.

El grado noveno tiene un porcentaje de 64% de la población evaluada que no responde correctamente las preguntas relacionadas con la competencia comunicar, así como los otros grados, muy por encima del porcentaje de Cali y de Colombia. 58% se encuentra en nivel insuficiente, 25% en nivel mínimo, 8% en nivel satisfactorio y 8% en nivel avanzado. En este grado se observa la poca homogeneidad de los resultados, a lo que obedece la desviación estándar de este grado. Este aumento en el nivel de desempeño más bajo demuestra que existen grandes debilidades en el grado en la competencia en cuestión. Cabe resaltar en cuanto a los aprendizajes que casi la totalidad de los estudiantes evaluados presenta dificultades para comprender el lenguaje algebraico como forma de respuesta a procesos inductivos. Esto da cuenta de los "vacíos" relacionados con el dominio y apropiación del lenguaje matemático con los cuales los estudiantes llegan a grupos superiores.

Luego de realizar el anterior análisis cabe concluir que existen notorias debilidades que vienen presentando los estudiantes institución educativa Cristóbal Colón en el proceso comunicar y los procesos que ello implica como modelar y representar. De manera consecuente se ven afectados otros procesos propios del área.

Capítulo 2

Antecedentes

En el contexto escolar los estudiantes se enfrentan al estudio de diversas áreas como las ciencias, las humanidades, la matemática, etc. que desarrollan procesos que les permitirán adquirir saberes. Estos saberes puestos en acción para la solución de problemas en un contexto social determinado, les permitirá ser considerados “competentes”. Dicho alcance le permite a la escuela evaluar su razón de ser y considerar exitoso su papel dentro de la sociedad.

La matemática es una de las áreas de estudio que históricamente ha sido considerada por los estudiantes como de mayor complejidad, debido al grado de abstracción y rigurosidad procedimental que ésta contiene. En el documento de los lineamientos en matemáticas encontramos esta misma consideración expresada en términos un poco más coloquiales: “… durante muchos años las matemáticas han constituido un “dolor de cabeza” para los padres, los maestros y los alumnos desde el inicio de su proceso educativo” (MEN, 1994, pág. 3) presentando como principal estrategia de solución la erradicación del temor que produce esta área en los estudiantes y que los bloquea; la curiosidad, el interés y el gusto son vistos como llaves mágicas que al generarse en el estudiante permitirán obtener mejores resultados.

La enseñanza de la matemática no puede quedarse solamente en el campo de lo racional sino que también debe tenerse en cuenta que su aprendizaje debe llevar a la formación de ciudadanos responsables capaces de tomar decisiones de manera oportuna y diligente. Por lo anterior, el docente que orienta el proceso debe proponer situaciones contextualizadas que permitan al estudiante comprender conceptos propios de dicho campo de estudio y que posteriormente puedan ser utilizados de manera eficaz en el desarrollo de procesos o algoritmos matemáticos, no como procesos aislados y mecánicos sino como parte de una posible solución a un problema determinado. Este ha sido uno de los grandes obstáculos para la comprensión de las matemáticas. Algunos docentes han hecho de las matemáticas una rutina mecánica que desarrolla a diario innumerables ejercicios sin un propósito y aplicabilidad claros. A lo que Douglas A. Qualding (1982) llamó las matemáticas prácticas

> Para la mayor parte de los alumnos, lo que importa no es desarrollar técnicas (más allá del nivel mínimo vital) sino entender cómo las matemáticas pueden ampliar nuestra capacidad para comprender, controlar y enriquecer el mundo en que vivimos. No se trata de las matemáticas prácticas, sino de la práctica de las matemáticas. (pág. 449)

Al problema de sólo desarrollar operaciones Qualding le encuentra solución concordante con la propuesta ministerial de nuestro país que se encuentra en los diferentes documentos o instrumentos curriculares que se presentan a los maestros como insumo para el diseño curricular, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), las Matrices de Referencia y las Mallas de Aprendizaje. Qualding (1982) plantea:

> En varios países, incluida Gran Bretaña, algunos profesores han venido utilizando cada vez más las tareas prácticas como respuesta a la pregunta ¿si no basta con operaciones, entonces qué? La finalidad es plantear problemas que estén dentro de la experiencia de los alumnos y que puedan ser abordados racionalmente. Aunque su solución no exija un nivel mu y elevado

en matemáticas, constituyen una buena ilustración de la práctica de las matemáticas." (pág. 449)

Este tecnicismo evidente en muchas clases de matemáticas del contexto institucional se opone al desarrollo de competencias relacionadas con la construcción del concepto de objetos matemáticos como las estructuras multiplicativas principalmente la división. "Aprender y enseñar matemáticas significa desarrollar, casi siempre, conocimientos matemáticos, aunque ellos se hayan creado o inventado hace más de cuatro mil años" (Wussing, 1998) citado por (Mora Castor, 2003). Mora en su documento Estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, resalta que los docentes de matemáticas hacen matemática con sus estudiantes en el momento mismo de construir definiciones y conceptos matemáticos, así sean muy elementales. Esto nos lleva a pensar en la necesidad que existe de construir conceptos matemáticos a través de la interacción con el otro o en el desarrollo de actividades que el docente intencionalmente propone a sus estudiantes usando recursos agradables e interesantes para ellos. Lo que Brunner llama ideas fundamentales "Las ideas fundamentales son las que constituyen el centro del aprendizaje matemático significativo" (Bruner, 1980) citado por (Mora, 2003). Estas ideas pueden ser construidas por los estudiantes con la ayuda de métodos y la presencia permanente de los docentes.

Respecto a esta problemática, se han realizado diversas investigaciones a nivel nacional e internacional, donde se resalta la importancia de la correcta elaboración de los conceptos matemáticos en la educación básica primaria para un óptimo desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes de secundaria. Una de ellas fue la realizada por José Libardo Villota, investigador de la Universidad de Nariño, en su trabajo de grado "División, errores y soluciones metodológicas” en el año 2014, quien investigó sobre los errores que se presentan en la aplicación de procesos algorítmicos de la división entre números naturales, y planteó algunas secuencias didácticas a modo de una solución metodológica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la división. Otra investigación fue llevada a cabo por los profesores de la Universidad de Alicante, Ceneida Fernández y Salvador Llinares en el año 2010, titulada “Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria – El caso de la construcción de la idea de razón”, se propuso estudiar la relación entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo en estudiantes de educación primaria en el contexto de la construcción del significado de la idea de razón.

La necesidad de replantear la enseñanza de las matemáticas para obtener mejores resultados en pruebas de tipo externo y para impactar de manera favorable el contexto en que los estudiantes se encuentran inmersos son una realidad que no es ajena a las instituciones educativas de Latinoamérica. Evidencia de ello es lo plasmado en el documento de la Unesco Aportes para la enseñanza de la Matemática, SERCE (Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo) “... movilizar la conciencia del magisterio de nuestra región, con la finalidad de estudiar y encontrar qué factores están influyendo en que el aprendizaje de esta importante área curricular no esté dando los frutos esperados” (UNESCO, 2009, pág. 11). Los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no son una novedad en educación, siempre han estado presentes en discusiones en diversos espacios educativos.

Los deficientes resultados en las pruebas externas y el bajo desempeño de un gran porcentaje de estudiantes de la Institución Educativa Cristóbal Colón el área de matemáticas durante el año lectivo, sumados a la gran apatía que los educandos evidencian por ella, nos llevan a realizar el siguiente trabajo de investigación en el aula, con el fin de diseñar, aplicar y analizar los resultados obtenidos de una situación didáctica orientada a motivar y movilizar en los estudiantes de tercero de educación básica primaria, la construcción del concepto de división (lenguaje aritmético) en el proceso de representar y comunicar. Considerando la importancia que sostiene esta temática en los diversos procesos de comprender, reproducir, codificar, decodificar, traducir, interpretar, formular y sintetizar, nos surge la siguiente pregunta:

¿De qué manera las actividades de una situación didáctica contribuyen a que los estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa Cristóbal Colón de la ciudad de Santiago de Cali, desarrollen la competencia comunicar a partir del aprendizaje del concepto de división, propio del pensamiento numérico?

2.1 Objetivo general

Proponer una situación didáctica que promueva en los estudiantes el desarrollo de la competencia comunicar a partir del aprendizaje del concepto de división, propio del pensamiento numérico.

2.2 Objetivos específicos

1. Conocer el estado actual de los estudiantes respecto a la comprensión lectora de problemas matemáticos, a partir de una evaluación diagnóstica.

2. Proponer actividades de una situación didáctica que conduzcan a facilitar en los estudiantes la apropiación del lenguaje matemático y la correcta transformación de los enunciados que se presentan en la lengua natural, a partir de la resolución de problemas matemáticos en contextos reales, enfocados en la división.

3. Aplicar y evaluar la pertinencia de la situación didáctica a partir del desempeño de los estudiantes una vez aplicada nuevamente la prueba.

Capítulo 3

Marco teórico

3.1 Introducción

El proceso de enseñanza y aprendizaje es un proceso que requiere de un alto grado de articulación, coherencia y pertinencia para alcanzar los propósitos educativos que este se traza. La enseñanza de áreas como las matemáticas representa conocer y dominar el área desde diferentes posturas, desde lo epistemológico, lo didáctico, los referentes ministeriales, desde la estructura interna propia de ella, entre otras. No basta con ser experto en el área para garantizar que el diseño, la ejecución y la evaluación del proceso y de los saberes contribuirán a desarrollar las competencias matemáticas. Es necesario que el maestro además de dominar la fenomenología de los objetos matemáticos posea las habilidades para poner en acción lo planeado en el diseño curricular. De igual modo que haga uso de diversos recursos y de estrategias metodológicas y didácticas, basado en teorías que fundamenten su tarea pedagógica diaria.

A continuación se abordarán elementos teóricos de tipo didáctico y metodológico a la vez que algunas teorías que permitan a los lectores construir una base conceptual que promueva la comprensión del presente proyecto y sustente lo realizado en el mismo.

3.2 Pensamiento numérico

Dentro de este trabajo de investigación se pretende promover el desarrollo del pensamiento numérico propio de las matemáticas. La propuesta curricular colombiana está organizada por pensamientos matemáticos y presenta una relación horizontal entre este pensamiento y los demás pensamientos (espacial, métrico, aleatorio y variacional).

El pensamiento numérico es uno de los componentes principales a evaluar por el ICFES en las diferentes pruebas SABER en los grados que se presentan. Esto indica la importancia de que el docente de matemáticas comprenda a qué hace referencia el pensamiento numérico y sea tenido en cuenta dentro de la actividad matemática que se produce al interior de su práctica pedagógica. “En el caso de los números naturales, las experiencias con las distintas formas de conteo y con las operaciones usuales (adición, sustracción, multiplicación y división) generan una comprensión del concepto de número asociado a la acción de contar con unidades de conteo simples o complejas y con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas” (MEN, 2006, pág. 59).

Lo anterior permite reafirmar el enfoque de las tareas que componen la situación didáctica de la presente investigación, en las cuales se usa el conteo como parte de los repartos a realizar en la solución a las situaciones problémicas que se proponen.

3.3 Competencia

La definición de pensamiento numérico que presentan los estándares básicos sugiere la enseñanza basada en el desarrollo de competencias matemáticas que permitan potenciar dicho pensamiento.

Antes de establecer las características de la definición de competencia matemática y puntualmente de la competencia comunicar, propósito del presente trabajo, primero se analiza la definición de competencia según diferentes autores, sin profundizar en la complejidad del término pero considerando que trasciende mucho más que un simple saber-hacer.

Asumimos que la competencia está asociada con la educación integral y la formación de sujetos críticos que usen los saberes en diferentes contextos socio-culturales y reflexionen sobre el uso de los conocimientos en pro de cualificar las condiciones de vida (García y otros, 2013, p.24, citando García, Acevedo y jurado, 2003, p.12).

Otra concepción que compartimos es la presentada por Torrado (1998) quien refiere que la competencia es aquella “capacidad de creación y producción autónoma, de conocer, actuar y transformar la realidad que nos rodea, ya sea personal, social, natural o simbólica, a través de un proceso de intercambio y comunicación con los demás y con los contenidos de la cultura” (Citado por el SEP, 2009, p.6).

En estas definiciones se puede resaltar como la competencia fusiona varios elementos, saber, experiencia, contextos diversos y primordialmente la funcionalidad del conocimiento en la transformación del entorno inmediato.

El concepto de competencia lleva a pensar en que no basta con saber sino que una competencia implica procesos más complejos que le permitan al estudiante un hacer con sentido. Lo que Torrado (2000) citada por Guzmán (2010), define como un hacer sabiendo: "Las competencias además de un ser, de un saber hacer, es un hacer sabiendo, soportado en múltiples conocimientos que vamos adquiriendo en el transcurso de la vida; es la utilización flexible e inteligente de los conocimientos que poseemos, lo que nos hace competentes frente a tareas específicas" (pág. 57).

Para Vasco (2003) "Una competencia es una capacidad para el desempeño de tareas relativamente nuevas, en el sentido de que son distintas a las tareas de rutina que se hicieron en clase o que se plantean en contextos distintos de aquellos en los que se enseñaron" (p37). Lo anterior refleja la trascendencia de la competencia, la cual es igual de eficaz en nuevas situaciones como en las situaciones iniciales donde se desarrollaron.

3.3.1 Competencia matemática. Después de hacer una breve recopilación de las diferentes posturas acerca del concepto de competencia, es pertinente realizar un acercamiento a lo que será un referente sobre competencia matemática, ya que es el campo en el que se centra esta investigación. Lo cual se presenta a continuación en la **Tabla 8**.

Tabla 8

Diferentes conceptualizaciones de la competencia matemática

Referente teórico	Concepto
NISS, 2002	Significa la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de situaciones y contextos internos y externos a las Matemáticas en los cuales las Matemáticas juegan o podrían jugar un papel.
PISA 2012	Capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar las matemáticas en diferentes contextos. O, en otras palabras, pretende describir las capacidades de los individuos para razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para explicar y predecir fenómenos. Otro aspecto que caracteriza la competencia matemática es su potencialidad de ser aplicada en la vida cotidiana. […] una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo.
OCDE 2005	Conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos, por medio de cuya realización se muestra la competencia general.
ACEVEDO Y GARCÍA 2000	Lo que la gente hace con objetos matemáticos, relaciones, estructuras, procedimientos, formas de razonamiento, es decir representa la construcción personal, en el sentido de uso del conocimiento, lo que hace el estudiante con lo que conoce.
TOBÓN 2006	El significado de competencia se asocia a es evidente que el resolver problemas, es un indicador de ser competente en matemáticas.

Nota: Tomada de PISA (2003).

En las definiciones anteriores se puede destacar que para el desarrollo de competencias matemáticas es necesaria la resolución de situaciones propias tanto de la cotidianidad como en contextos diversos. Un individuo competente matemáticamente debe caracterizarse no por qué tanto sabe de matemáticas sino lo que hace con ellas. Un maestro debe preocuparse entonces porque sus estudiantes no sólo acumulen saberes matemáticos sino que logren hacer con ellos lo que sugiere Perrenoud (2011) cuando se enseña dentro de un enfoque por competencias “ … los profundicen, los contextualicen y los usen para resolver problemas y tomar decisiones" (p.2). Sólo hasta entonces podría considerarse una aproximación al desarrollo de las competencias propias de las matemáticas.

3.3.2 Competencia Comunicar. Nuestro problema de investigación tiene como propósito principal aportar a desarrollar en los estudiantes la competencia comunicar, entendiendo por comunicar a

> *... el conjunto de capacidades, habilidades y cualidades que tiene la persona para comprender e interpretar contenidos matemáticos expresados en forma oral o escrita, haciendo uso del lenguaje propio de la comunidad matemática en la que participa de los procesos de construcción y negociación de significados, con base en un discurso de calidad y de normas de comportamiento, para convertirse en un miembro activo de la comunidad de aprendizaje, siendo capaz de solucionar problemas del contexto, usando la matemática como herramienta* (García Quiroga, Coronado, & Giraldo Ospina, 2015, pág. 270).

La anterior concepción representa una enculturación matemática que según estos mismos autores no puede ser espontánea y requiere de unos procesos y tiempos que son difíciles de prever y que están directamente influenciados por la actividad matemática del estudiante y la planificación del docente.

La complejidad del desarrollo de una competencia matemática es a la vez sustentada por los estándares básicos de competencia que han organizado los procesos matemáticos por conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto y quinto, sexto y séptimo, octavo y noveno, décimo y once), demostrando así que existen aprendizajes que requieren de procesos prolongados.

Los lineamientos matemáticos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, presentan una explicación de cuándo ocurre la competencia comunicación matemática, lo cual ayuda a comprender un poco más el largo plazo de las expectativas de aprendizaje en las matemáticas escolarizadas.

> *La comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica…* (MEN 1998, p 75).

Es decir, la comunicación matemática se fundamenta en procesos matemáticos que requieren de tiempo para su formación. Además los lineamientos mencionan que en nuestras clases la comunicación debe ser una práctica natural, que ocurre regularmente, lo cual sugiere una cotidianidad que no es instantánea ni inmediata sino habitual.

García, Coronado y Giraldo (2015), en su texto “Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas” presentan cuatro argumentos para sustentar la competencia matemática como expectativa a largo plazo, las cuales podrían resumirse en: la complejidad creciente de las tareas que desarrollan los estudiantes requiere de un tiempo de maduración de los procesos matemáticos implicados y de un lenguaje matemático adquirido (p. 43-44).

Estos aportes nos demuestran que el desarrollo de una competencia, en este caso comunicar, no puede ser un logro de un periodo o de un año lectivo solamente. Sino un proceso que se desarrollará durante toda la existencia del ser humano.

La expectativa de aprendizaje a largo plazo (competencia), planteada en la situación didáctica aplicada en el aula, se ve delimitada por la construcción de un objeto matemático puntual (concepto de división). Y por estar finalizando el conjunto de grados primero a tercero, se puede afirmar que el desarrollo de esta competencia debe darse dentro del periodo establecido en el plan de área y aula de la institución educativa.

3.4 Didáctica

Desde la didáctica se consideran todos los elementos que participan en el proceso de la enseñanza, los cuales se articularán en pro de lograr el aprendizaje del concepto del concepto matemático.

3.5 Situación didáctica

Teniendo como base la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, será considerada como una situación didáctica a todos los elementos que conforman el entorno del estudiante, dentro de los cuales se incluye al docente y por ende al sistema educativo. O dicho de otra forma, el término se refiere a “los modelos que describen la actividad del profesor y también la del alumno” (Brousseau, 2007, p.18). Dicha situación debe ser construida de manera intencional por el profesor con el fin de movilizar en los estudiantes la adquisición, o bien la construcción de un conocimiento determinado. Además, toda situación didáctica, como lo afirma Vidal (s.f.) “se planifica en base a actividades problematizadoras, cuya necesidad de ser resueltas o abordadas, implique la emergencia del conocimiento matemático que da sentido a la clase, la que ocurre en el aula, en un escenario llamado triángulo didáctico” (p.2), como se puede observar en la *figura 7*.

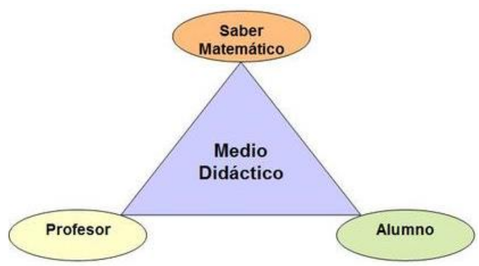


Figura 7: Triángulo didáctico

En toda situación didáctica, deben existir momentos en los que los estudiantes interactúen con el problema o discutan con sus compañeros acerca del mismo y el profesor sólo intervenga para guiar sus preguntas por medio de otros interrogantes que no les entreguen las respuestas. Estos momentos son los que Brousseau llama situaciones a-didácticas, los cuales deben ser intencionalmente planeados por el profesor de modo que se propicie la discusión, el debate y las preguntas, proceso dialéctico conocido como Proceso de Devolución.

Para que las situaciones didácticas fluyan dentro de un orden establecido por el profesor deben existir una serie de normas que las moderen. Este conjunto de normas es a lo que se conoce como Contrato Didáctico, y debe ser expuesto por el profesor antes de iniciar la situación. El contrato didáctico puede evolucionar de acuerdo a como vayan sucediendo las situaciones, lo cual produce nuevos escenarios que a su vez generan una secuencia de situaciones didácticas.

De acuerdo con Brousseau, las situaciones didácticas se componen de una serie de fases a partir de las cuales los estudiantes interactúan consigo mismos, entre pares, con el medio y con el profesor. Como consecuencia de dicha interacción se produce un conocimiento. Algunas veces estas situaciones requieren de conocimientos previos, pero en otras ocasiones los estudiantes construyen a partir de las mismas, su propio conocimiento. De esta forma se pueden enumerar las siguientes etapas en una situación didáctica:

- Situación de acción: en este momento el sujeto intenta resolver el problema utilizando diferentes estrategias e interactuando con su entorno a partir ya sea de conocimientos previos o de situaciones de la vida diaria que involucren diversas maneras de resolverlo. “Aparece así, la dialéctica de acción, una secuencia (según Brousseau) de interacciones entre el alumno y el medio” (Vidal, s.f., p.5).

- Situación de formulación: los estudiantes socializan las diferentes estrategias que los llevaron a la solución (acertada o errada) de la situación problema. Aunque en esta etapa se utilice la argumentación como medio de exposición, al momento de presentar su estrategia, el estudiante no intenta probar o validar sus enunciaciones, simplemente las formula.

- Situación de validación: se da cuando los sujetos intentan probar que su formulación es la adecuada y confrontan las diferentes estrategias por medio de las cuales dieron solución al problema. Los diferentes actores pueden o no estar de acuerdo con las estrategias expuestas por sus compañeros y a partir de esto es posible que se genere un debate al interior del grupo.

- Situación de institucionalización: en este momento el profesor retoma todas las conclusiones a las que los estudiantes llegaron y las transforma en un saber general que puede ser utilizado en un futuro como un saber previo para la realización de otra situación. Es aquí cuando se puede visualizar el logro de los objetivos propuestos para la situación didáctica.

Para lograr una buena construcción de una situación didáctica, es necesario diseñar tareas matemáticas bien estructuradas. Al respecto García, Coronado y Giraldo (2015), afirman que tanto el diseño como el uso de “las tareas con propósitos pedagógicos, es para el autor el núcleo de la educación matemática… representan una de las más genuinas y útiles fuentes de información para el profesor sobre la calidad de la actividad matemática de aprendizaje” (p.177).

Las tareas matemáticas deben lograr despertar en el estudiante el deseo o hasta la necesidad de encontrar una solución a la situación problema planteada, en este sentido lo más conveniente es que sean situadas y que logren que los alumnos se enfrenten con procesos matemáticos y no matemáticos de complejidad creciente. En este sentido, las tareas matemáticas tienen una triple relación 'texto – contexto – lector' y antes de ser propuestas por el docente deben ser 'pensadas, diseñadas y planificadas'. De esta forma es como tareas matemáticas y actividad humana se relacionan, ya que tienen tres momentos:

1) Concepción: cuando se piensa la propuesta, se organiza, se concibe y nace (se escribe). Es así como la planificación comienza por la concepción.

2) Ejecución: cuando se desarrolla aquello planeado.

3) Evaluación: verificación y reflexión tanto del proceso como de los resultados.

Tal como lo afirma García Quiroga, si ubicamos una tarea en el contexto de la actividad humana, se da un aprendizaje situado. Lo cual resulta fundamental, teniendo en cuenta la postura epistemológica pragmática como concepción de educación matemática debido a su relación con la evaluación por competencias y con el aprendizaje situado, indispensables en este campo académico; ya que en matemáticas resulta más representativo hablar de aprendizaje situado, que es el aprendizaje contextualizado en el cual la resolución de problemas tiene como base la aplicación de situaciones cotidianas y el contexto sociocultural juega un importante papel en la adquisición de las competencias. Al respecto, García, Coronado y Giraldo (2015), afirman que el estudiante solamente podrá lograr desarrollar competencias matemáticas "si este enfrenta tareas matemáticas de nivel de complejidad creciente que movilicen sus procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción para apropiarse de la cultura matemática y hacer uso social de las matemáticas en contextos socioculturales específicos" (p.180). Es así como estas tareas deben representar “una oportunidad para que el estudiante se relacione con los conceptos, ideas, estrategias matemáticas y representaciones semióticas útiles socialmente para desarrollar pensamiento y cultura matemática” (et al, p.180). Los niveles de complejidad en las tareas matemáticas se pueden clasificar como:

1) Nivel de reproducción: Se dice que una tarea tiene un nivel de complejidad de reproducción cuando presenta baja demanda cognitiva, lo cual se presenta en aquellas donde los estudiantes sólo deben realizar cálculos simples y resolver problemas propios del entorno inmediato y la rutina cotidiana. Para el desarrollo de estas tareas el estudiante debe reproducir conocimientos que ya poseía.

2) Nivel de conexión: Una tarea alcanza un nivel de complejidad de conexión cuando se requiere resolver problemas más complejos donde su solución no dependa únicamente de la ejecución de una operación, aunque se ubiquen en los mismos escenarios de las tareas de reproducción. Es decir, para resolver este tipo de tareas, el estudiante debe conectar conocimientos previos con los que están en juego en ese momento. “La tarea planteada requiere para su solución una mayor movilización de capacidades cognitivas, ya que establece relaciones de carácter no rutinario e involucra más de dos variables y la conexión entre ellas” (García Quiroga, Coronado, & Giraldo Ospina, 2015, p. 20). En este momento el estudiante debe saber transitar por diferentes sistemas de representación semiótica y realizar tratamiento y conversión en por lo menos dos sistemas diferentes.

3) Nivel de reflexión: Son tareas que requieren una alta demanda cognitiva ya que para su solución es necesario realizar aproximaciones matemáticas originales, sobre problemas

complejos. “Se presentan procesos de razonamiento, argumentación, matematización horizontal y vertical, exige creatividad para proponer estrategias de resolución de la tarea, además de soluciones novedosas, por lo que implica hacer matemáticas a un nivel más complejo” (García Quiroga, Coronado, & Giraldo Ospina, 2015, p. 201).

Resulta también necesario que para el diseño de las tareas matemáticas se tenga presente, además de los niveles de complejidad creciente y de los procesos matemáticos, otros procesos a los que García y Coronado (2015) llaman afectivos y de tendencia de acción. Estos procesos se refieren a aquello que motiva al estudiante a querer desenvolverse matemáticamente y seguir intentando las veces que sea necesario para llegar a la solución de una tarea. “El estudiante desarrolla actividad matemática de aprendizaje cuando aborda tareas y desarrolla procesos matemáticos. Por ello, los niveles de complejidad de estos procesos están asociados a la complejidad progresiva de las tareas y se expresan, finalmente, en los niveles de complejidad de los procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción que deben desarrollar los estudiantes” (et. al, p.26). En las matemáticas hay errores que los estudiantes cometen de manera repetitiva que se originan por actitudes afectivas y emocionales, pueden deberse a falta de concentración (por excesiva confianza), bloqueos (por miedos suscitados de tiempo atrás), u olvidos. “Los sentimientos de tensión y miedo de los alumnos hacia las matemáticas, están relacionados con múltiples asociaciones que intervienen afectiva y emocionalmente con el aprendizaje de esta disciplina; la jerarquía del conocimiento matemático, la actitud de profesores hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas, son entre otros aspectos asociadas a ansiedades y miedos productos de dificultades para aprender matemáticas” (Castelanos & Obando). Un estudiante que desde un principio no comprende una clase de matemáticas, es alguien que no tendrá ninguna motivación para participar activamente de la misma, por el contrario se escudará en su mal comportamiento o en su total desinterés por la asignatura.

Con la situación didáctica que se presenta a continuación se pretende promover en los estudiantes de tercer grado la competencia comunicar, asociada al aprendizaje del objeto matemático división en los números naturales. En cuanto a la comunicación como la principal competencia a desarrollar en los niños y las niñas, Rico y Castro (1995), afirman que "la comprensión del significado de la multiplicación y de la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción" (p.63). Pero a su vez, la multiplicación tiene un mayor grado de dificultad que la división. Esta dificultad, argumentan los autores del libro Estructuras aritméticas elementales y su modelización, se debe a que las palabras "sumar", "añadir", "y", "restar", "quitar" y "repartir", "son acciones concretas y fáciles de visualizar" lo que no ocurre con "tantas veces, que no presenta una referencia activa tan clara" (p.63).

El maestro juega un papel muy importante en este punto, si aceptamos el hecho que la didáctica de las matemáticas se centra en problemas de "comunicación de la matemática" y lo dicho por D'Amore (2006) quien plantea que una de las dificultades presentes dentro de la enseñanza de las matemáticas es la llamada "paradoja del lenguaje específico" en donde el docente por velar que el lenguaje no sea un obstáculo para la comprensión de las matemáticas, acude al lenguaje común (natural, coloquial) evitando el lenguaje especifico de esta, que es lo que da sentido a la estructuras de los conceptos matemáticos, a sabiendas que su objetivo no es solo que los estudiantes aprendan y entiendan sino, que se apropien del lenguaje matemático.

En la presente investigación, la situación didáctica se diseñó para estudiantes de tercer grado, que oscilan entre los 8 y 9 años de edad. Deben agruparse en mesas de trabajo colaborativo de cinco integrantes cada una, si sobran cuatro estudiantes deben formar un grupo de cuatro, si sobran tres, dos o uno, cada uno debe integrarse a uno de los grupos ya conformados.

Los estudiantes contarán con material concreto a fin de que puedan vivenciar la situación, dado que se refiere a una actividad de su cotidianidad que se puede aprovechar para promover la competencia comunicar en torno a la construcción del concepto de división por parte de los niños y las niñas.

La situación hace referencia a un juego tradicional de canicas llamado "La meca", en el cual se hace un agujero en el suelo y por turnos los niños deben tirar las canicas intentando que entren en él. El jugador que consigue introducir la bola se queda con las canicas que estén a menos de un palmo de distancia del agujero (dibujada sobre la superficie). Los jugadores podrán optar también por alejar a sus oponentes tirando contra sus canicas.

El objeto matemático son las estructuras multiplicativas centradas en la división.

"La división se expresa como la operación inversa a la multiplicación. En ella se encuentran dos factores: el dividendo o valor a repartir, y el divisor, que es el que designa el número de partes

resultante de la repartición. La operación de la división es compleja para los estudiantes, quienes, en general, no la comprenden fácilmente desde el punto de vista conceptual. Esto es, porque la división no es siempre exacta. En los primeros años, la división se debe enseñar en un primer momento con objetos concretos. A partir de ellos se desarrollan ejercicios de repartición de objetos o discretos (partición de elementos de conjuntos) y continuos (partición de la recta numérica) en partes iguales (MEN, 2011, p.21).

En esta situación didáctica la competencia a movilizar es comunicar. “Diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas” (MEN, 1998). En este sentido, la comunicación es fundamental en el proceso de apropiación del lenguaje matemático para la construcción de conceptos propios del pensamiento numérico. Dicha apropiación requiere procesos de transformación de la información que presenta un enunciado en lengua natural (en la del contexto diario) en una forma que permita la aplicación de un tratamiento matemático.

Los procesos matemáticos que van en relación con la competencia son: comunicar, formular y resolver problemas y razonar. Pero también se movilizan otros procesos como los afectivos y de tendencia de acción.

La situación didáctica aplicada en el aula para la presente investigación se encuentra en la sección de anexos.

Para el desarrollo de la situación didáctica en el aula, propiciando el trabajo colaborativo, se entrega por grupos el material manipulativo (bolas o canicas) alusivo a la tarea y la situación escrita, para que el estudiante lea el enunciado y se enfrente a ella con sus conocimientos previos, planteando estrategias para resolver el problema. Todo esto lo deben hacer sin la interacción del maestro y en discusión con sus compañeros. Los niveles de complejidad de las tareas van creciendo desde la reproducción hasta la reflexión. Los estudiantes se centran en un procedimiento específico con el fin de llegar a una respuesta.

En un primer momento se presenta una situación de acción en las dos primeras actividades, cuando los estudiantes por grupos de trabajo colaborativos intentan resolver el problema utilizando diferentes estrategias y haciendo uso del material manipulativo (interactúan con el medio). Una estrategia es repartir o distribuir cada uno de los elementos dependiendo del número de conjuntos o agrupaciones que se le soliciten, para nuestro caso cinco grupos. Otra estrategia se plantea agrupando la totalidad de elementos de cada grupo, para nuestro caso cinco grupos. El estudiante debe revisar la estrategia que cumpla con los requerimientos de la tarea. La primera tarea es sólo de reproducción (recordando actividades que ya han realizado en su cotidianidad: repartición de fichas para un juego, bolas, tapas, etc., realizan el reparto y posterior conteo de las canicas que corresponden a cada niño), mientras que la segunda alcanza un nivel de conexión, ya que los estudiantes deben relacionar en su proceso la operación de sustracción en el registro de la tabla. Además utiliza la representación tabular para la comprensión del objeto de conocimiento.

Posteriormente, al interior de la tercera tarea se presenta la situación de formulación, donde uno de los estudiantes de cada mesa de trabajo socializa su estrategia de solución para ser confrontada con la de sus compañeros. Posteriormente el estudiante comunica a través de la tabla la estrategia que mejor responde a la tarea. La tarea continúa con un nivel de complejidad de conexión.

Por último, en las tareas 4 y 5 se presenta la situación de validación, cuando el coordinador de cada mesa solicita a los integrantes presentar su propuesta, para después de tomar apuntes el/la secretario(a) comunique a todo el salón la propuesta que el equipo consideró correcta y defiende sus resultados por medio de argumentos, con el maestro como moderador de la puesta en común. Del nivel de complejidad de conexión de la tarea 4, se pasa a un nivel de complejidad de reflexión en la tarea 5. Después de que los estudiantes ya han logrado una comprensión (tarea 4) pasan a la apropiación del concepto, defendiendo sus posturas y reflexionando a partir de ellas (tarea 5).

El contrato didáctico que se presenta a los estudiantes durante la realización de las tareas asignadas es el siguiente:

El estudiante esperará del maestro:

- El acompañamiento durante el proceso.
- La claridad en las explicaciones.
- Las instrucciones y consignas para realizar.
- Que le provea de los diferentes materiales o recursos que se deben usar en el desarrollo de las diferentes tareas.
- Un trato respetuoso.

El maestro espera que el estudiante:

- Asista oportunamente a la clase.
- Porte todos sus instrumentos escolares de trabajo.
- Se muestre atento a las explicaciones.
- Trabaje de manera colaborativa.
- Tenga una actitud de escucha.
- Participe activamente con intervenciones pertinentes.
- Indague acerca de sus inquietudes.
- Desarrolle oportunamente las tareas asignadas, siguiendo las consignas recibidas.

3.7 Perspectiva Didáctica

Teniendo en cuenta los dos componentes de la perspectiva didáctica que presenta García, Coronado y Giraldo (2015, p.38), la relación competencia matemática - actividad matemática y las dos expectativas que coexisten en el desarrollo de las competencias. Para el desarrollo de la competencia comunicar, se establecen las siguientes expectativas de aprendizaje a largo y corto plazo, en el marco de la situación didáctica a desarrollar a través de la actividad matemática que genera en el estudiante cada una de las tareas propuestas.

3.7.1 Expectativas de aprendizaje a largo plazo. Promover en los niños y niñas de tercer grado, el desarrollo de la competencia comunicar a partir de la resolución de problemas de su cotidianidad relacionados con el concepto de división.

Esto se hará evidente una vez los estudiantes lean, escriban y comprendan discursos en, con y sobre las matemáticas. Específicamente, cuando al leer un problema de reparto situado lo comprendan, logren representarlo de diferentes formas, elaboren un plan aplicando tratamiento y conversión, lo ejecuten y finalmente puedan explicar qué hicieron y cómo lo hicieron.

3.7.2 Expectativas de aprendizaje a corto plazo. Para alcanzar la expectativa a largo plazo se requiere planificar procesos matemáticos específicos particulares asociados a las tareas matemáticas. Estos procesos se deben ir cumpliendo a modo de objetivos a medida que se van desarrollando las tareas, y es a lo que en esta investigación se denomina como expectativas a corto plazo. En la situación didáctica aplicada se desarrollaron seis tareas matemáticas, a las que se les asignaron sus respectivas expectativas de aprendizaje a corto plazo, como se hace evidente en la **Tabla 9**.

Para el desarrollo de la competencia comunicar, recordando que esto sólo es posible cuando se llega a cumplir con la expectativa de aprendizaje a largo plazo, es necesario que el estudiante dentro de su actividad matemática ejecute los siguientes procesos relacionados con la competencia: representar (codificar, decodificar, traducir), analizar, resolver (graficar y comunicar), razonar y argumentar, comunicar (de forma oral y escrita), participación, negociación, autorregulación, motivación y dedicación. Se espera que cada una de las tareas propuestas lleve al estudiante a promover y movilizar la construcción del concepto de división además de la apropiación y dominio del lenguaje propio de las matemáticas.

Tabla 9

Expectativas de aprendizaje a corto plazo asociadas a las tareas matemáticas

N°	Tarea	Expectativas de aprendizaje a corto plazo
1	Si tenemos 28 bolas para repartir entre cinco participantes, de manera que a cada uno de ellos le corresponda la misma cantidad. ¿Cuántas bolas se le deben entregar a cada participante?	Proponer, desarrollar y justificar estrategias para hacer estimaciones y cálculos con operaciones básicas en la solución de problemas. (Tomado de los D.B.A. Grado tercero).
2	1. Registren en la siguiente tabla los cambios que se presentaron al repartir las 28 bolas entre los cinco participantes (ver tabla en la situación didáctica).	- Construir diagramas para representar las relaciones observadas entre las cantidades presentes en una situación. (Tomado de los D.B.A. Grado tercero). - Reconocer el uso de las operaciones para calcular la medida (compuesta) de diferentes objetos de su entorno. (Tomado de los D.B.A. Grado tercero).
	2. Después de repartir las bolas a cada niño en partes iguales ¿sobraron bolas? (maquen la respuesta con una X) SI ____ NO ____ 3. Si la respuesta fue SI ¿creen que estas bolas que sobraron se pueden volver a repartir a los cinco participantes en partes iguales? SI ____ NO ____ ¿Por qué? __________ 4. ¿Qué operación matemática utilizaron para rellenar la tabla?	- Reconocer el uso de las operaciones para calcular la medida (compuesta) de diferentes objetos de su entorno. (Tomado de los D.B.A. Grado tercero). - Establecer equivalencias entre expresiones numéricas en situaciones de reparto.
3	1. Cuéntenle a sus compañeros cómo hicieron para rellenar la tabla de la tarea #2. 2. Compartan con sus compañeros las respuestas de la tarea #2. 3. ¿Qué diferencias encuentran entre sus respuestas y las de sus compañeros?	Analizar los resultados ofrecidos por el cálculo matemático e identificar las condiciones bajo las cuales ese resultado es o no plausible.
4	1. Nos hemos dado cuenta que sobraron 3 bolas. ¿Cuántos participantes debería haber en el torneo para que a cada uno le corresponda la misma cantidad de bolas y que no sobre ninguna? 2. ¿Puede haber diferentes números de participantes? SI ______ NO ______ 3. Expliquen a los compañeros por qué llegaron a esa conclusión.	Establecer las condiciones para que un reparto sea exacto.
5	1. ¿Qué tienen en común las cantidades de participantes propuestas en la situación anterior?	Deducir y establecer que un número es múltiplo de otro en situaciones de reparto (Tomado de las matrices de referencia grado tercero).
	2. Revisen todo lo que pasó anteriormente y saquen una conclusión.	Establecer conclusiones en inferencias a partir de los procesos desarrollados en la solución de problemas.
6	(A partir de la institucionalización) Si tengo 26 canicas y las quiero repartir entre mis 5 amigos en partes iguales ¿Cuántas canicas le corresponde a cada niño? ¿Sobran canicas?	- Construir representaciones pictóricas para representar las relaciones observadas entre las cantidades presentes en una situación. - Resolver problemas multiplicativos (división) a partir de representaciones pictóricas de una situación dada.

3.8 Perspectiva Curricular

Este trabajo de investigación en el aula considera una perspectiva curricular de tipo holística.

> *"La perspectiva holística del currículo, se centra en el desarrollo del ser humano como principio generador, propicia el desarrollo de proyectos de vida y de sociedad, asume la oportunidad de actualización de las potencialidades individuales o de grupo. El estudiante es el responsable de su aprendizaje y el docente se convierte en el facilitador de ese aprendizaje. En esta perspectiva puede identificarse el propósito de lograr que las personas individual y en grupos, sean responsables y gestoras de su propio destino y con iniciativa para realizar acciones tendientes a salvar las barreras estructurales o ideológicas que dificultan el logro de una sociedad más solidaria, y defensora de los valores de la vida."*
>
> (Riera de Montero, 2018).

La propuesta curricular de la institución educativa Cristóbal Colón se estructura considerando una nueva concepción de lo curricular, tomando como centro el desarrollo de competencias que permitan la formación del individuo que su misión considera como protagonista de la tarea educativa.

Esta perspectiva curricular será de gran ayuda a los maestros que orientan el área de matemáticas en los diferentes niveles, para el trabajo de diseño curricular, ya que les permitirá tener una mirada clara del desarrollo de la competencia comunicar dentro del pensamiento numérico y teniendo como insumo la división de números naturales.

La perspectiva curricular propuesta parte del análisis de los estándares básicos de competencias matemáticas y cómo estos abordan el proceso comunicar y representar. Considera la relación vertical (conjuntos de grados) y horizontal (pensamientos) para la proyección del objeto de estudio. Además se analizan otros documentos referentes de la propuesta curricular colombiana como los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las matrices de Referencia, para establecer cuáles son los aprendizajes y las evidencias que las estructuras multiplicativas centradas en la división, implican.

La **Tabla 10** presenta una propuesta de organización curricular con los procesos matemáticos relacionados con Representar, Comunicar y el objeto matemático división en los diferentes conjuntos de grados.

Tabla 10

Perspectiva curricular

	1° a 3°	4° y 5°	6° y 7°	8° y 9°	10° y 11
ESTÁNDARES DE COMPETENCIAS	Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.	Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.
	Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.	Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.		
	Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.		
MATRICES DE REFERENCIA	Elabora una lista de datos que cumplen con un criterio de clasificación determinado.	Interpreta tablas numéricas presentes en el entorno cotidiano.	No aplica.	Compara e interpreta datos y traduce entre diferentes formas de representación de los mismos (lenguaje verbal, gráfico y simbólico.	No aplica.

	Describe situaciones de variación usando lenguaje natural.	Traduce información presentada de tablas a gráficas. Utiliza el lenguaje natural y la representación numérica para enunciar una fracción.	No aplica.	Plantea y resuelve problemas en otras áreas, relativos a situaciones de variación con funciones polinómicas (de grado mayor que 1) y exponenciales.	
	Establece equivalencias entre expresiones numéricas en situaciones multiplicativas.	Usa lenguaje gráfico o pictórico y terminología adecuada para explicar relaciones numéricas. Expresa simbólicamente operaciones aditivas y multiplicativas a partir de un enunciado gráfico o verbal. Resuelve problemas a partir de la información presentada en una o diferentes formas de representación extraída de contextos cotidianos o de otras ciencias.	No aplica.	Identifica equivalencia entre expresiones algebraicas y entre expresiones numéricas, reconocer cuándo estas expresiones representan lo mismo y evalúa las expresiones algebraicas. Aplica propiedades para solucionar problemas aditivos y/o multiplicativos en el conjunto de los números reales y reconoce diferentes estrategias que permiten determinar la solución.	No aplica.
	Establece que un número es múltiplo de otro en situaciones de reparto o medición.	Identificar cuándo un número es múltiplo o divisor de otro. Reconocer la fracción como parte-todo, como cociente y como razón.	No aplica.	Justifica a través de representaciones y procedimientos la existencia de una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos variables.	No aplica.
D.B.A.	Propone, desarrolla y justifica estrategias para hacer estimaciones y cálculos con operaciones básicas en la solución de problemas.	Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos. Describe y justifica diferentes estrategias para representar, operar y hacer estimaciones con números naturales y números racionales (fraccionarios), expresados como fracción o como decimal. Interpreta y utiliza los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación.	Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y de sus operaciones para comprender problemas aditivos y multiplicativos, que involucran números racionales y proponer estrategias y procedimientos de cálculo para su solución. Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones y los emplea con sentido en la solución de problemas.	Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas. Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.	Utiliza las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y sus relaciones y operaciones para construir y comparar los distintos sistemas numéricos. Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones.

	Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas.	Compara y ordena números fraccionarios a través de diversas interpretaciones, recursos y representaciones. Establece relaciones mayor que, menor que, igual que y relaciones multiplicativas entre números racionales en sus formas de fracción o decimal. Identifica patrones en secuencias (aditivas o multiplicativas) y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas.	Utiliza diferentes relaciones, operaciones y representaciones en los números racionales para argumentar y solucionar problemas en los que aparecen cantidades desconocidas.	Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.	Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes. Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.

3.9 Postura epistemológica

Esta tesis asume la postura pragmática como concepción de educación matemática debido a su relación con la evaluación por competencias y con el aprendizaje situado, indispensables en este campo académico.

Las Instituciones Educativas en Colombia se rigen por lo que estipula el Ministerio de Educación Nacional (MEN), cuya evaluación debe ser por competencias. El desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes viene determinado por la situación y la pragmática, tal como lo expresan García Quiroga, y otros (2013):

"Una teoría pragmática asume que todo aprendizaje es situado y que la competencia se moviliza en el uso social; es la situación y la pragmática de uso (en forma simultanea) lo que determina la construcción del conocimiento y el desarrollo de competencia matemática del estudiante" (p. 28).

Además de lo anterior, en matemáticas resulta más representativo hablar de aprendizaje situado, ya que es el aprendizaje contextualizado en el cual la resolución de problemas tiene como base la aplicación de situaciones cotidianas y el contexto sociocultural juega un importante papel en la adquisición de las competencias.

Como se espera que la investigación tenga un impacto al interior del aula de clase, la postura epistemológica pragmática es la que más se acerca a la conceptualización de los objetos matemáticos, ya que éstos emergen "de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo" (Godino & Batanero, 1994, pág. 5).

Para que la división, enmarcada dentro del objeto matemático estructuras multiplicativas emerja, es necesario lograr que los estudiantes se aproximen a él. Esto puede ser posible mediante el acercamiento a través de su historia y evolución, utilizando situaciones reales con las que los niños se encuentran familiarizados, lo cual se realizará en un primer momento dentro de la situación didáctica.

Al respecto, D'Amore & Godino (2007) dicen:

"Los objetos matemáticos son, por tanto, símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas de usos que caracterizan a la pragmática humana (o, al menos, a grupos homogéneos de individuos), y se modifican continuamente en el tiempo, según las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y su significado dependen no sólo de los problemas que se afrontan en la matemática, sino también de los procesos de su resolución; en suma, dependen de la práctica humana" (s.p.).

Posteriormente a la historia y fenomenología del objeto matemático estructuras multiplicativas, la postura epistemológica pragmática facilita compartir ese significado que ha emergido por medio de la participación activa de los estudiantes al interactuar con situaciones propias de su entorno inmediato, como lo son el salón de clases, el patio de recreo o sus propios hogares. Una situación que refleja esta circulación del significado de la división es cuando se pide a los niños que por favor organicen el salón de clases en mesas de trabajo con determinado número de sillas cada una; los estudiantes se dan cuenta que para cierto número de sillas corresponde un número de mesas. Igualmente sucede cuando por medio del juego con las canicas, los niños se dan cuenta cuántas le tocan a cada uno siendo que deben repartirse en partes iguales. Aplicar este tipo de situaciones, permite que el objeto matemático circule en el grupo de manera natural, antes de sufrir las transformaciones propias en los diferentes sistemas semióticos de representación.

De esta forma, los estudiantes se encuentran preparados para construir con la ayuda de la docente, la estructura conceptual del objeto matemático estructuras multiplicativas -división- y desarrollar su significado compartido, es decir, aplicar todo lo ya conceptualizado y aprendido en la resolución de problemas. Ya que cuando el estudiante se enfrenta a tareas matemáticas, desarrolla procesos matemáticos con niveles de complejidad crecientes que fortalecen y complementan el significado de dicho objeto matemático. Como lo dice D'Amore, en su libro Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática (2005) “los objetos matemáticos y el significado de tales objetos dependen de los problemas que se enfrentan en Matemática y de los procesos de resolución” (p. 6). Y es así como la postura epistemológica pragmática concluye uno de los interminables ciclos que se seguirán presentando en torno a la construcción de este objeto matemático.

3.10 Objeto matemático

El objeto matemático de esta investigación son las estructuras multiplicativas centradas en la división, a través del cual se pretende contribuir al desarrollo de la competencia matemática comunicación en los estudiantes de tercer grado. Es así como dicho progreso se convierte en el propósito principal del presente proyecto de investigación.

Para la presente investigación se partirá de la definición que García Quiroga, y otros (2013) presentan de la competencia matemática comunicar, en su libro Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje, donde afirman que dicha competencia se refiere a:

el conjunto de capacidades, habilidades y cualidades que tiene la persona para comprender e interpretar contenidos matemáticos expresados en forma oral o escrita, haciendo uso del lenguaje propio de la comunidad matemática en la que participa de los procesos de construcción y negociación de significados, con base en un discurso de calidad y de normas de comportamiento, para convertirse en un miembro activo de la comunidad de aprendizaje, siendo capaz de solucionar problemas del contexto, usando la matemática como herramienta (p.270).

La comunicación se convierte entonces en una estrategia que el docente debe aprovechar a su favor para lograr hacer emerger en los estudiantes el significado de cualquier objeto matemático. A través de la comunicación es posible compartir los diferentes significados que surgen de un determinado objeto matemático. Como lo expresan García Quiroga, Coronado, & Giraldo Ospina, en su libro Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas (2015) "La existencia de significados diferentes (incluso con los del profesor), dinamiza y enriquece el proceso de compartir y desarrollar significado matemático a través de la comunicación" (p.36). De esta forma, dichos significados circulan a través de una comunidad de aprendizaje, sufriendo transformaciones por medio de las cuales adoptan diferentes formas de representación semiótica. “En síntesis, la comunicación debe evidenciar que los estudiantes, de manera interpersonal e interactiva, son capaces de hacer preguntas y de responder y argumentar sobre estas preguntas en matemáticas y con las matemáticas” (et al, p.37).

Dada la naturaleza del objeto matemático división, todas las tareas propuestas deben promover en los estudiantes el pensamiento numérico. Como definición de pensamiento numérico se considerará la presentada por Mcintosh (1992) citado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el libro de Lineamientos Curriculares en Matemáticas “el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones” (p. 26). Dentro de la directriz ministerial dada por los Estándares Básicos de Competencia este objeto matemático pertenece a los sistemas numéricos.

La construcción del objeto matemático en esta investigación, se hará de acuerdo con el triángulo semántico para un objeto matemático, planteado por Rico (2012, p.52), donde se expresa que el significado de dicho objeto se forma a través del desarrollo de su fenomenología, sus sistemas de representación y su estructura conceptual.

3.10.1 Fenomenología. En los primeros años, la división se debe enseñar inicialmente utilizando objetos concretos y a partir de ellos desarrollar ejercicios de repartición.

El objeto matemático estructuras multiplicativas - división se relaciona con:

- Otros objetos matemáticos: Multiplicación, sustracción, fracción.
- Las matemáticas: Geometría, sistemas numéricos.
- Otras ciencias: Física, química, arquitectura, arte, ingeniería, contabilidad.
- La cotidianidad: Construcción, deportes, gastronomía, juegos, compras, ventas.

Lo anterior se puede dilucidar en el siguiente mapa conceptual:

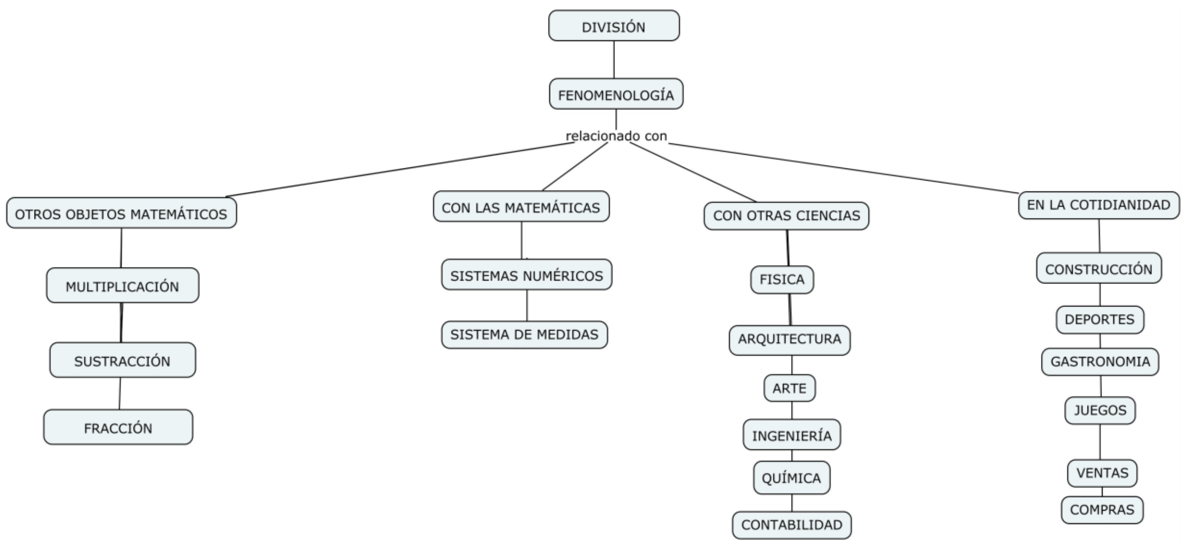


Figura 8: Fenomenología del objeto matemático Estructuras Multiplicativas Centradas en la División

3.10.2 Estructura conceptual. Acerca del concepto de estructura multiplicativa, Echeverry Materón (2013) dice que “fue creado por Vergnaud (1988) y consiste en un conjunto de problemas que involucran operaciones aritméticas y nociones de tipo multiplicativo, como multiplicación, división, fracción, razón, etc.” (p.30). Además, el dominio de las estructuras multiplicativas requiere de la comprensión de todas estas operaciones aritméticas. Es por esto que resulta muy difícil intentar enseñar de manera separada estos conceptos, ya que al encontrarse tan estrechamente interconectados, se requiere el conocimiento de todos para la correcta resolución de los problemas relacionados con estructuras multiplicativas.

En cuanto al concepto de división, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2011) ha desarrollado el siguiente enunciado:

> *La división se expresa como la operación inversa a la multiplicación. En ella se encuentran dos factores: el dividendo o valor a repartir, y el divisor, que es el que designa el número de partes resultante de la repartición. La operación de la división es compleja para los estudiantes, quienes, en general, no la comprenden fácilmente desde el punto de vista conceptual. Esto es, porque la división no es siempre exacta. En los primeros años, la división se debe enseñar en un primer momento con objetos concretos. A partir de ellos se desarrollan ejercicios de repartición de objetos o discretos (partición de elementos de conjuntos) y continuos (partición de la recta numérica) en partes iguales.* (p.21).

El aprendizaje de las matemáticas requiere un análisis de procesos cognitivos como es la conceptualización. Estos procesos necesitan la utilización de sistemas de representación diferentes a los del lenguaje natural, ya sea algebraica, geométrica, gráfica, simbólica, esquemas, imágenes… "que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones" (Duval, 2004, p.13). Por ejemplo, referente a la división en niveles más avanzados, a lo que naturalmente se llama la mitad, en el lenguaje aritmético es un medio, una representación semiótica es ½, y uno de sus tratamientos es 0.5, una de sus conversiones es 2x-1=0 porque este último se expresa en lenguaje algebraico, el cual es un registro semiótico diferente al aritmético.

De esta forma, siguiendo a Echeverry (2013), la división se puede introducir de dos maneras diferentes cada una con sus respectivos modelos intuitivos, así:

> *La división como partición: se trata de repartir una cantidad en un número dado de partes iguales, siendo la incógnita el tamaño de cada parte y b) La división como agrupamiento: se trata de averiguar el número de partes o grupos que se pueden formar conociendo la cantidad a repartir y el tamaño de cada parte* (p.29).

Según Warfiel (2001), citado por Bosch, Castro, & Segovia (2007), el pensamiento matemático de los niños es más amplio de lo que tradicionalmente se ha pensado y el pensamiento multiplicativo en particular, aparece de forma espontánea, de manera que pueden llegar a resolver problemas con estructuras de este tipo sin necesidad de haber recibido instrucción alguna.

3.10.3 Sistema de representación. "Los sistemas de representación se refieren al conjunto, de signos, gráficos y reglas que hacen presente el objeto matemático y lo relacionan con otros" (García Coronado, Motealegre y otros, 2013, p.53).

Según Duval (1999), "las representaciones semióticas son el medio del que dispone el ser humano para hacer visibles sus representaciones mentales; de esta manera, las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación o expresión" citado por (García, Coronado, Motealegre y otros, 2013, p.58).

Para el presente objeto sus sistemas de representación son:

- Lenguaje oral: Repartir, dividir, agrupar.
- Signos: ÷, ---, /.
- Representación gráfica: Conjuntos, representación bidimensional.

Para los niños de tercer grado de básica primaria, es necesario partir de situaciones rutinarias de reparto y/o de agrupación. De acuerdo con lo planteado por Duval (2006) acerca de los registros semióticos de representación, donde afirma que “los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos” (p.145), a continuación se ejemplifica una situación para el objeto matemático división en donde el niño debe pasar de un registro a otro a fin de dar solución al problema, que fue utilizada en el aula para el presente estudio:

Situación: Si tengo 26 canicas y las quiero repartir entre mis 5 amigos en partes iguales ¿Cuántas canicas le corresponde a cada niño? ¿Sobran canicas?

Registro lenguaje natural: Si tengo 26 canicas y las quiero repartir entre mis 5 amigos en partes iguales ¿Cuántas canicas le corresponde a cada niño? ¿Sobran canicas?

Registro gráfico: Este registro en lenguaje natural sufre una transformación a partir de la cual el niño logra representarlo en otro sistema. Este cambio es a lo que se conoce como conversión.

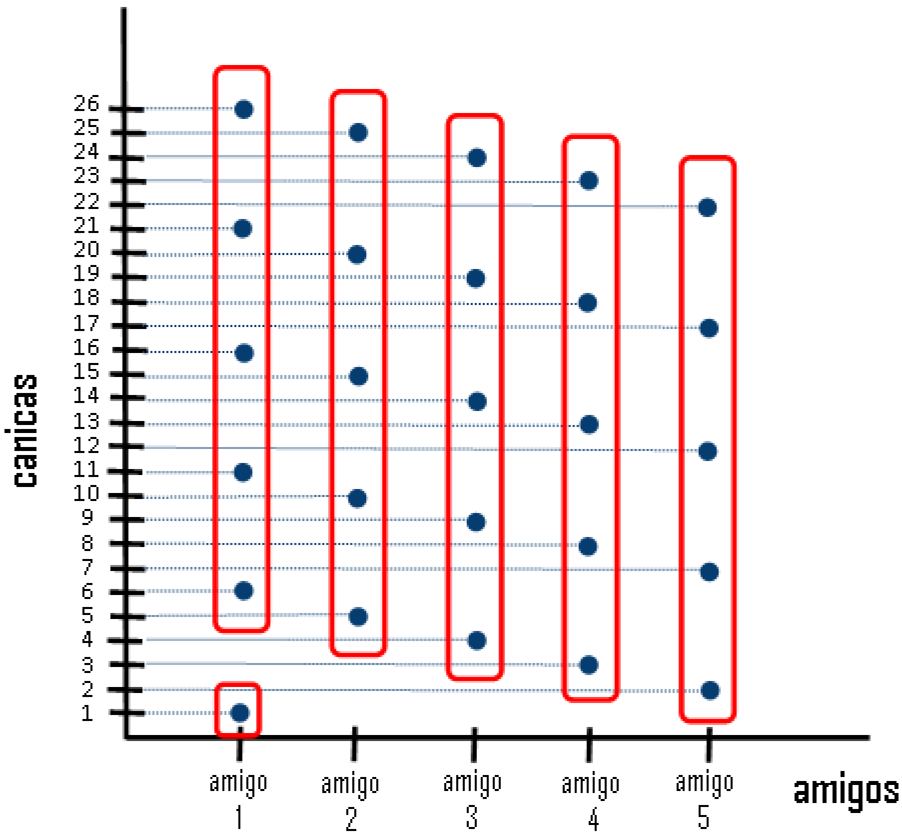


Figura 8: Sistema de Representación Bidimensional diseñado para la Situación Didáctica

Registro aritmético: Este registro gráfico sufre una transformación a partir de la cual el niño lo transforma en una operación. En este momento surge otra conversión.

$$26 \div 5 = 5 \text{ y sobra } 1$$

Registro en lenguaje natural: Nuevamente el niño CONVIERTE ese resultado de un registro aritmético a otro registro en lenguaje cotidiano, tal como comienza su tareas.

A cada amigo le corresponden 5 canicas y sobra 1 canica.

Se puede concluir a partir de lo anterior, que cambiar de un registro de representación a otro, como en el caso de la tarea de las canicas, debe ser un proceso natural y espontáneo en los niños, pero según Duval, este paso se facilitará en la medida en que se cumplan tres condiciones a la que denomina factores de congruencia:

1. Correspondencia semántica entre las unidades significantes que constituyen las representaciones: se debe hacer coincidir las unidades significantes elementales del registro de partida y que correspondan a las unidades elementales del registro de llegada.

2. Univocidad semántica terminal: es decir que para una unidad significante en la representación inicial que se ha de convertir debe haber una unidad significante en el registro de llegada y no varias unidades.

3. Factor de orden de organización de las unidades significantes: Es decir que en la representación de llegada se conserve el orden de las unidades significantes del registro del enunciado.

En la tarea de las canicas se cumplen estas tres condiciones, por lo tanto se espera que los niños logren de forma natural pasar por diferentes registros de representación y por ende puedan alcanzar un alto nivel de comprensión del objeto matemático división.

3.11 Dificultades asociadas a la resolución de problemas con estructuras multiplicativas

Diversas investigaciones tanto a nivel nacional como internacional convergen en que es muy común encontrar en los niños de la básica primaria y aún de la secundaria, dificultades asociadas a la resolución de problemas con estructuras multiplicativas. Esto puede deberse a que el trabajo con las estructuras multiplicativas y en especial con la división, requiere del buen desempeño con las demás operaciones básicas; es decir, para que un estudiante logre aplicar la división de manera correcta en la resolución de problemas, es necesario que antes domine la suma, la resta y la multiplicación.

En investigación realizada en la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira, en la cual se proponen estrategias didácticas para promover el aprendizaje de las estructuras multiplicativas a partir de la resolución de problemas, Echeverry (2013) afirma que como la multiplicación no se presenta de forma innata en los niños, es necesario que el proceso de enseñanza aprendizaje sea adecuado, ya que los niños tienden a utilizar las estructuras aditivas como medio para resolver las multiplicativas causando confusión y obstáculos cognitivos en ellos. Y acerca de la división dice que "en la construcción de la división, como operación inversa… El problema radica en que el comprenda que hay otras situaciones del entorno que deben ser encaradas con otras operaciones, las cuales debe conocer, comprender y aplicar" (p.22).

En una investigación realizada en México, en el Instituto Pedagógico de Formación Profesional, acerca del proceso de la adquisición de problemas matemáticos de estructura multiplicativa, García S. (2010) afirma que "la evaluación existente señala que los alumnos saben ejecutar multiplicaciones pero que el nivel de comprensión que tienen sobre las operaciones es reducido y aún más reducida es su aplicación a situaciones que involucren resolución de problemas" (p.98). Precisamente los dos aspectos a los cuales esta investigación apunta para fortalecer a través de la situación didáctica: que los niños y niñas se permeen del concepto de división y logren comprenderlo, a fin de que puedan sin mayor dificultad enfrentarse a la resolución de problemas en contexto y se logre un verdadero aprendizaje situado. Respecto a ello, Sergio García sostiene que:

> El propósito de la enseñanza de la multiplicación y la división no es principalmente que los alumnos sepan ejecutar las técnicas usuales para calcular los resultados. Se pretende que los niños logren una comprensión amplia del sentido de estas operaciones, que puedan aplicarlas con flexibilidad para resolver una variedad de problemas cada vez mayor, que sean capaces de proporcionar mentalmente resultados aproximados y que dispongan de estrategias de cálculo adecuadas, entre las cuales se encuentra el algoritmo convencional. (p.98).

Otra dificultad que se encuentra en los niños y niñas, que impide el correcto desarrollo de las estructuras multiplicativas, tiene que ver con el método que los maestros utilizan para su enseñanza. Muchas veces dicho proceso de enseñanza se imparte de manera contraria, comenzando por la adquisición del algoritmo y dejando para el final el concepto de división. Esto, sumado a la escasa aplicación que se hace por parte de los docentes a situaciones de la vida cotidiana a partir de las cuales los estudiantes podrían incorporar con más fuerza ese concepto de división, contribuye a que para los alumnos sea más difícil desarrollar dichas habilidades.

Una investigación realizada en la Universidad de Nariño por José Libardo Villota, titulada “División, errores y soluciones metodológicas” en el año 2014, indagó acerca de los errores que se presentan en la aplicación de procesos algorítmicos de la división entre números naturales, y planteó algunas secuencias didácticas a modo de una solución metodológica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la división. En cuanto al proceso de enseñanza aprendizaje de las estructuras multiplicativas, en esta investigación se pudo llegar a la conclusión de que:

> *El proceso de división se enseña de manera mecánica aislando las situaciones de un contexto. Lo anterior impide la creación de modelos de división, lo cual genera que primero se adquiera el algoritmo y finalmente el concepto de división. No se aprovecha por parte de los docentes las experiencias significativas, a partir de situaciones concretas que viven los estudiantes y sus familiares en la vida cotidiana. Además, el exceso de estudiantes (40 por grupo) limita la manipulación de objetos físicos para la demostración, e inicio del concepto y algoritmo de la división.* (s.p.).

Teniendo en cuenta según Duval (2006), que “la conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y que cualquier problema con la conversión sería indicativo de conceptos erróneos” (p.158), es realmente necesaria la aplicación de los problemas matemáticos a situaciones del contexto diario, que permitan a los estudiantes comprender el significado del objeto matemático (división), dado que “la mayor piedra de toque para la comprensión es la posibilidad de transferir lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos, dentro y fuera de las matemáticas, y esto siempre implica la conversión de representación" (p.158).

Otras dificultades que se presentan en el aprendizaje de las estructuras multiplicativas, fueron enunciadas por J. D. Godino y C. Batanero (2004), en su libro Didáctica de la Matemática, donde clasifican dichas dificultades en cuatro categorías: vocabulario y conceptos, nivel de abstracción, dificultades en operaciones y solución de problemas. Todas estas dificultades nacen en lo que tiene que ver con la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa, ya que propiamente hablando de la división los niños y las niñas no se encuentran familiarizados con términos claves como "repartir en partes iguales, hacer grupos iguales, restar reiteradamente, distribuir equitativamente, compartir, fraccionar, trocear, partir, etc" (p.210). Es por esto que la comunicación se convierte en la competencia matemática que en primera instancia se debe desarrollar en los estudiantes para su correcto desempeño en la resolución de problemas con estructuras multiplicativas.

En cuanto a la comunicación como la principal competencia a desarrollar en los niños y las niñas, Castro, Rico y Castro (1995), afirman que "la comprensión del significado de la multiplicación y de la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción" (p.63). Pero a su vez, la multiplicación tiene un mayor grado de dificultad que la división. Esta dificultad, argumentan los autores del libro Estructuras aritméticas elementales y su modelización, se debe a que las palabras "sumar", "añadir", "y", "restar", "quitar" y "repartir", "son acciones concretas y fáciles de visualizar" (p.63), lo que no ocurre con "tantas veces, que no presenta una referencia activa tan clara" (p.63).

Capítulo 4

Marco metodológico

4.1 Contexto y participantes

Esta investigación se realizará con los niños y niñas que actualmente cursan tercer grado en la Institución Educativa Cristóbal Colón de la sede Bienestar Social, ubicada en el barrio Mariano Ramos de la ciudad de Cali. Este curso está conformado por 32 estudiantes, de los cuales son 16 niñas y 19 niños, y cuyas edades oscilan entre los 8 y los 10 años.

4.2 Método de investigación

Este proyecto de investigación está enmarcado dentro de una metodología de tipo cualitativa, ya que parte de la exploración del contexto escolar en el que se identifica una problemática; en este caso, el poco dominio del lenguaje matemático reflejado en los constantes errores que los estudiantes cometen. Una vez identificada, describe la problemática y finaliza construyendo una teoría fundamentada que fusiona aportes de teorías pedagógicas que pueden ayudar a dar solución a la misma. En esta ocasión la teoría se centrará en presentar una secuencia didáctica constructivista, que estará permeada por enfoques como el modelo CPA (Concreto, Pictórico y Abstracto), el trabajo colaborativo y la teoría de formación de conceptos naturales de Vygotsky como una estrategia exitosa en la apropiación del lenguaje matemático; todo lo anterior apoyado en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para cambiar su registro de representación, de acuerdo con la teoría de Raymond Duval.

Los datos que se recolectarán están relacionados con el grado de dominio que tienen los estudiantes acerca del concepto de división antes de la aplicación de la secuencia didáctica, durante y después de la misma.

4.3 Tipo de investigación

Este proceso investigativo será del tipo descriptivo ya que dará cuenta de cómo los estudiantes presentan debilidades en la competencia comunicativa de las matemáticas. Describirá la manera en que los estudiantes resuelven problemas del tipo prueba Saber y de qué elementos hacen uso en el proceso comprensión de los enunciados. Se podrá evidenciar cómo la falta de dominio de conceptos como el de división entorpece el desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas.

4.4 Diseño de investigación

Teniendo en cuenta que lo que se busca es resolver un problema que día a día afecta tanto a estudiantes como a docentes en las instituciones educativas, en este caso en cuanto al aprendizaje de las matemáticas, esta investigación está definida como estudio de casos. El estudio de caso ha sido considerado como un campo privilegiado para comprender en profundidad los fenómenos educativos. (Castillo, y otros). Lo anterior basado en las apreciaciones de diferentes autores:

Para Yin (1989) el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallado de unidades sociales o entidades educativas únicas.

Para Stake (1998) es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad es circunstancias concretas.

Para la mayoría de científicos el estudio de caso no es una metodología totalmente confiable por ello sería pertinente presentar las bondades que esta posee. En ese sentido, Chetty (1996) indica que “el método de estudio de caso es una metodología rigurosa que es adecuada para investigar fenómenos en los que se busca dar respuesta a cómo y por qué ocurren, permite estudiar un tema determinado, es ideal para el estudio de temas de investigación en los que las teorías existentes son inadecuadas, permite estudiar los fenómenos desde múltiples perspectivas y no desde la influencia de una sola variable, permite explorar en forma más profunda y obtener un conocimiento más amplio sobre cada fenómeno, lo cual permite la aparición de nuevas señales sobre los temas que emergen, y juega un papel importante en la investigación, por lo que no debería ser utilizado meramente como la exploración inicial de un fenómeno determinado (Martínez, 2006).

Este proyecto centrado en el contexto real y escogiendo como sujetos de estudio a los estudiantes del grupo mencionado, pretende abordar desde el aula una problemática generalizada como lo es la dificultad en el aprendizaje del concepto de división en los niños y niñas de tercer grado. Por tanto se proyecta proponer una situación didáctica que siga utilizándose como estrategia de enseñanza para tal fin.

4.5 Estrategia de muestreo

La muestra seleccionada para esta investigación será de tipo no probabilística, y su elección depende del propósito de investigación que se ha planteado. Será una muestra del tipo casos extremos, pues de acuerdo a Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, (2006) “esta permitirá describir la problemática en cuestión o aclarar casos” (p.573). Para este fin, el instrumento de investigación se aplicará a los 33 estudiantes y se escogerán los 4 con mejor desempeño y los 4 con desempeño menos favorable, para recolectar los datos necesarios y analizar así esta investigación.

4.6 Instrumentos

La tabla que se presenta a continuación fue base para el análisis de la investigación y contiene la rejilla de observación que se usó para registrar todo lo pertinente al desarrollo de las situaciones didácticas en el grupo experimental. Esta fue diseñada por el profesor Armando Zambrano Leal, explicada y compartida a todos los estudiantes de la maestría en educación de la universidad que fueron asesorados por él en proceso de trabajo de grado. Se tomó para la presente investigación desde la tesis de grado del estudiante Yefrid Popayán Otaya.

Tabla 11

Rejilla de observación

		REJILLA DE OBERVACIÓN SITUACIONES DIDÁCTICAS GRUPO EXPERIMENTAL			
	OBJETO DE ENSEÑANZA	Estructuras multiplicativas: la División (Lenguaje aritmético)			
	PREGUNTA PROBLEMA	Las situaciones didácticas de la enseñanza del objeto matemático división promueven el aprendizaje y movilizan las capacidades de saber en el orden del pensamiento numérico en los estudiantes de la Institución Educativa Cristóbal Colón.			
Clase 0	**Describo y caracterizo al grupo**	El grupo experimental está compuesto de X número de niños y X número de niñas. Están en el grado X. Hay repitentes X, son de estrato socioeconómico X. sus mayores problemas en el aprendizaje son… etc.			
	Competencias	Tomadas del MEN para el grado (cuáles y sobre ellas diseñar las situaciones)			
Clase 1	**Índices iniciales de saber del estudiante**	Elaboro un diagnóstico de cuánto sabe el estudiante del objeto de enseñanza. Los niños saben que es la.. cuáles son los mecanismos de participación…etc. para ello les entrego una hoja para que escriban libremente sobre el tema (objeto de enseñanza)			
Clase 2	**Información de las consignas y del tipo de trabajo**	**Consignas**		**Trabajo grupal**	**Trabajo individual**
		Comprensión consignas por los alumnos.		La actividad está dirigida al trabajo en grupo.	La actividad está dirigida en la parte A, B, C al trabajo individual… luego combina el trabajo grupal.
		Claramente	**Poco o nada claras**		
		Todos **Unos**	**(10, 12,)** **8, 20, 25**		
		Por qué es clara	**Por qué es poco o nada clara**		
		Es clara porque el estudiante entiende las reglas…	**Es poco o nada clara pues el estudiante me pregunta sobre cosas de la actividad, etc…**		
Clase 3 tomamos nota del tiempo	**Situación Acción** (es la situación cuyos primeros indicios nos informa de la acción del estudiante)	**Indicador de saber 1**	**Indicador de saber 2**	**Indicador de saber 3**	**Indicador de saber 4**
		Intenta resolver	Le pida ayuda a otro compañero…	Consulta información	Se concentra en la actividad…
		Lee la consigna	Se concentra en la actividad …	Simula resolver	Intenta escribir, etc…

	Situación formulación (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción cognitiva del estudiante).	Formula una hipótesis	Lanza ideas de cómo responder	Propone soluciones	Plantea una estrategia
		Analiza	Plantea una idea	redacta	Comparte y anima al grupo
Clase 3 tomamos nota del tiempo	**Situación validación** (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción argumentativa porque explica cómo llegó el estudiante a la resolución del problema).	Describe cómo lo hizo	Es capaz de reconstruir el proceso	Elabora argumentos sólidos	La respuesta escrita es… la respuesta oral es…
		Es crítico			
		Infiere	Deduce	Compara	Agrupa
		Emite una respuesta cierta	Explica	Diferencia	Comprende
			Claridad	Organiza las ideas	Demuestra
	Situación formulación (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción cognitiva del estudiante).	Describe cómo lo hizo	Es capaz de reconstruir el proceso	Elabora argumentos sólidos	La respuesta escrita es… la respuesta oral es…
		Es crítico			
		Infiere	Deduce	Compara	Agrupa
		Emite una respuesta cierta	Explica	Diferencia	Comprende
			Claridad	Organiza las ideas	Demuestra
Clase 4 tomamos nota del tiempo	**Situación validación** (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción argumentativa porque explica cómo llegó el estudiante a la resolución del problema).	Describe cómo lo hizo	Es capaz de reconstruir el proceso	Elabora argumentos sólidos	La respuesta escrita es… la respuesta oral es…
		Es crítico			
		Infiere	Deduce	Compara	Agrupa
		Emite una respuesta cierta	Explica	Diferencia	Comprende
			claridad	Organiza las ideas	Demuestra
	Situación institucionalización (se presenta la estructura conceptual del objeto matemático y la propuesta de solución grafica del mismo)	Presentamos la estructura conceptual del objeto matemático y la propuesta gráfica que los estudiantes deben aplicar en la resolución de la siguiente situación.			
	Tarea de ejercitación	Los estudiantes deben resolver un problema matemático usando la propuesta gráfica.			

4.7 Temporalidad de la aplicación de la Situación Didáctica

La siguiente tabla presenta el cronograma con el cual se desarrolló cada una de las tareas de la situación didáctica.

Tabla 12

Cronograma de aplicación

SITUACIÓN	FECHA	DESCRIPCIÓN.
Evaluación diagnóstica	Octubre 17 de 2.017	Se aplica la evaluación diagnostica con el fin de conocer el estado de los saberes previos que los estudiantes poseen en relación con el objeto matemático en estudio.
Situación Acción	Noviembre 7 de 2.017	El estudiante intenta resolver el problema de la tarea 1 aplicando diferentes estrategias, haciendo uso del material concreto proporcionado.
Situación Formulación	Noviembre 7 de 2.017	El estudiante resuelve la tarea 2 diligenciando la tabla y presentando su estrategia en la mesa de trabajo en la que se encuentra ubicado.
Situación Validación	Noviembre 14 de 2.017	Al terminar la tercer tarea el coordinador de la mesa solicita a los integrantes presentar su propuesta, simultáneamente el/la secretario toma apuntes para luego comunicar a todo el salón la propuesta que el equipo consideró correcta, con el maestro como moderador de la puesta en común.
Situación de Formulación	Noviembre 14 de 2.017	El estudiante resuelve de manera individual la primer parte de la tarea 4 para luego en la tercer parte compartir con sus compañeros.
Situación de Validación	Noviembre 21 de 2.017	El estudiante al responder la tarea 5 realiza la discusión con sus compañeros y presenta sus conclusiones al grupo.
Situación de Institucionalización	Noviembre 21 de 2.017	Posterior a la puesta en común el profesor presentará a los estudiantes los aciertos y desaciertos desde sus aportes. Luego presentará desde el campo conceptual del objeto matemático en construcción, la estructura conceptual del mismo (concepto, elementos, etc.) y la representación semiótica construida. A partir de lo presentado en la institucionalización los estudiantes se enfrentaran a un nuevo problema que resolverán a partir de la representación en lenguaje grafico que se les propuso.
Evaluación Post	Febrero 17 de 2.018	Se aplica la misma prueba usada en la evaluación diagnostica para conocer el grado de apropiación de los saberes después del desarrollo de la situación didáctica.

4.8 Plan de análisis

Por ser esta una investigación de tipo cualitativo, la recolección de la información (datos no estructurados) se realizará a través de los instrumentos (observaciones, cuestionarios, etc.), y de manera paralela aunque informal, se podrán anticipar algunas de las inferencias a las que se llegará.

En cuanto a los papeles del observador, en las clases durante las cuales se desarrolle la secuencia didáctica, se contará con una cámara de video (no participación) que grabará constantemente y una observadora que estará tomando notas y llenando las rejillas de observación, es decir, observadora de participación pasiva.

Para el análisis de los videos que se grabarán durante las sesiones de clase, se utilizará la técnica análisis de la conversación (conversacional) para identificar en las estrategias de aprendizaje que los estudiantes utilizan, la formación de conceptos científicos como el de división. Además, se utilizará el análisis de la comunicación no verbal para descubrir el significado de cada una de esas expresiones y su incidencia en el desempeño cognitivo de los estudiantes en las clases de matemáticas.

Para los datos recolectados a través de los cuestionarios se utilizará la técnica de análisis semiótico a fin de relacionar las diferentes significaciones que los estudiantes le dan al término dividir.

La información recolectada a través de los documentos o fichas propias del área será revisada a través del análisis de contenido cuantitativo aplicado de manera pre y post a la secuencia didáctica, los cual permitirá comparar los resultados obtenidos en ambos momentos.

Al finalizar los análisis anteriores, todos los posibles resultados y los datos que arroje la rejilla de observación serán revisados basados en la teoría fundamentada que da sustento teórico a este trabajo investigativo, el modelo de aprendizaje significativo, dando explicación basados en los postulados que dicho enfoque presenta respecto a la asimilación de conceptos.

Capítulo 5

Análisis de los resultados

5.1 Análisis de los resultados de la evaluación diagnóstica

A fin de conocer y analizar los saberes previos de los estudiantes del grado 3.3.2 de la Institución Educativa Cristóbal Colón, sede Bienestar Social, se diseñó y aplicó una evaluación diagnóstica donde se pudo observar el nivel de comprensión de enunciados de problemas matemáticos y las dificultades y los desaciertos más comunes que se presentan al solucionarlos. En esta evaluación se tuvieron en cuenta los saberes y habilidades que los estudiantes deben dominar para el aprendizaje del objeto matemático (estructuras multiplicativas centradas en la división) que son: la sustracción o resta de números naturales, los conjuntos o agrupaciones y la comprensión e interpretación lectora.

La evaluación diagnóstica se aplicó a 27 estudiantes el 17 de Octubre de 2017 y tuvo una duración de 130 minutos. La prueba contiene 5 preguntas, cada una compuesta por un problema matemático y una tabla para consignar la respuesta y la explicación del proceso realizado para hallarla, direccionados al proceso de traducir (codificar y decodificar). Todos los problemas son del tipo reparto en los cuales los estudiantes deben realizar restas sucesivas. Algunos contemplan el reparto equitativo (pregunta 2 y 3) y otros el reparto con residuo (preguntas 1,4 y 5).

Para el análisis de la evaluación diagnóstica se tuvo en cuenta un estudio individual de los resultados. Para ello se diligenció la **Tabla 14** que contiene los alcances individuales en el grupo, donde se muestran los aciertos, desaciertos, las respuestas incompletas y las respuestas en blanco. En la **Tabla 13** se muestran las convenciones utilizadas para el análisis.

Tabla 13

Convenciones utilizadas en la evaluación diagnóstica

Tipo de Respuesta	Convención
Respuesta Correcta	A
Respuesta Incorrecta	B
Respuesta incompleta o en proceso	C
Respuesta en Blanco	D

Tabla 14

Respuestas por estudiante en la evaluación diagnóstica

Pregunta	Estudiante																										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
1	B	A	B	B	B	B	B	A	B	B	B	A	B	A	B	A	B	B	B	B	A	B	B	B	B	B	C
2	C	A	A	A	A	B	B	A	D	B	A	B	B	A	A	B	A	A	A	B	A	B	A	A	A	D	D
3	A	A	A	A	B	A	A	D	D	B	A	A	C	A	B	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	D	D
4	B	A	B	A	B	B	B	D	D	D	B	A	D	D	B	A	A	A	A	B	A	B	B	B	B	D	D
5	C	A	C	B	A	B	B	D	D	D	D	A	D	D	B	A	B	B	B	B	A	B	B	A	A	D	D

En la **Tabla 15** se presenta la distribución de frecuencias para la evaluación diagnóstica y en la *Figura 9* se puede observar los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas, incompletas o en proceso y respuestas en blanco por pregunta.

Tabla 15

Distribución de frecuencias para la evaluación diagnóstica

Respuesta / Pregunta	A	%	B	%	C	%	D	%
1	6	22%	20	74%	1	4%	0	0%
2	15	55%	8	30%	1	4%	3	11%
3	18	66%	4	15%	1	4%	4	15%
4	8	30%	12	44%	0	0%	7	26%
5	7	26%	10	37%	2	7%	8	30%

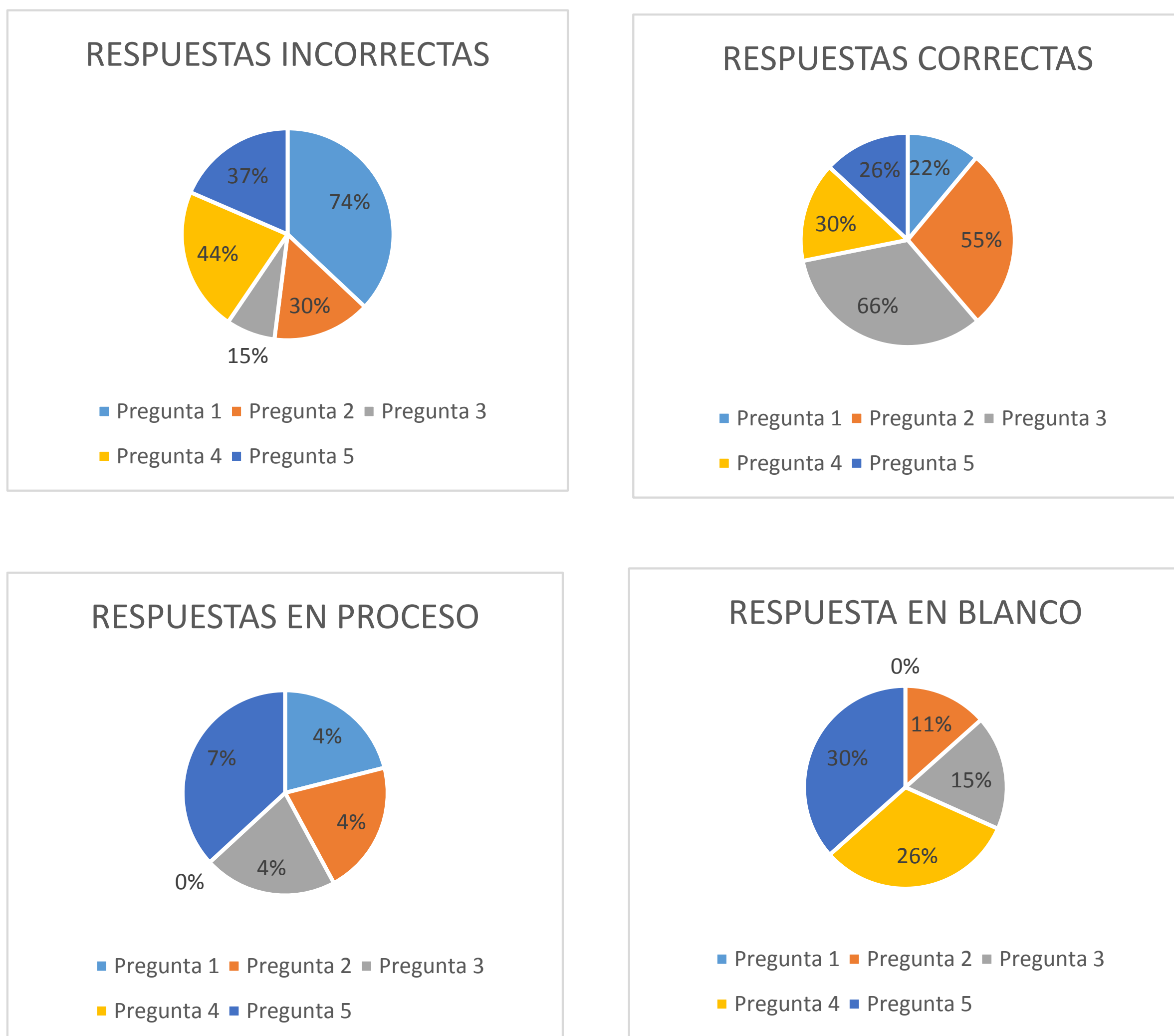


Figura 9: Porcentaje de respuestas correctas, incorrectas, en proceso o en blanco para todas las preguntas

A continuación se muestran los problemas que conforman la evaluación diagnóstica, el análisis a los resultados obtenidos y algunos registros fotográficos de las respuestas de los estudiantes.

Saber evaluado: Resolver problemas matemáticos de repartición o de agrupamiento o sustracción repetida y expresar su respuesta en lenguaje natural y en lenguaje simbólico. Para esto el estudiante debe estar en capacidad de traducir: codificar y decodificar.

5.1.1 Pregunta 1. Camilo tiene 30 palitos chinos para organizar en 4 bolsas con igual cantidad de palitos ¿cuántos palitos quedan en cada bolsa? ¿cuántos palitos sobran?

RESPUESTA	**¿CÓMO ENCONTRASTE LA RESPUESTA?**

Según los resultados presentados en la **Tabla 14**, la mayoría de los estudiantes contestaron de manera incorrecta esta pregunta (un 73 %). Muy pocos estudiantes acertaron en su respuesta (sólo el 22%) y un 4% realizaron un proceso inconcluso. A pesar de que todos los estudiantes propusieron una respuesta los resultados son poco favorables. Lo anterior permite afirmar que los estudiantes evidencian poseer pocas habilidades para comprender, traducir, reproducir, resolver y expresar en lenguaje simbólico y en lenguaje natural sus respuestas, corroborando lo expuesto por el MEN en el análisis de las pruebas Saber.

Se presentó en muchos casos que los estudiantes no presentaban una respuesta sino que simplemente representaban simbólicamente una situación que no obedecía al enunciado del texto. Los estudiantes que lograban dar respuesta a la situación presentaron dificultad para lograr explicar en lenguaje natural la forma como encontraron su respuesta. Esto demuestra que existe una gran dificultad para realizar una conversión en su lenguaje.

A continuación, en la *Figura 10* se muestra un registro fotográfico donde se aprecian soluciones realizadas por los estudiantes y se hacen evidentes las observaciones anteriores.

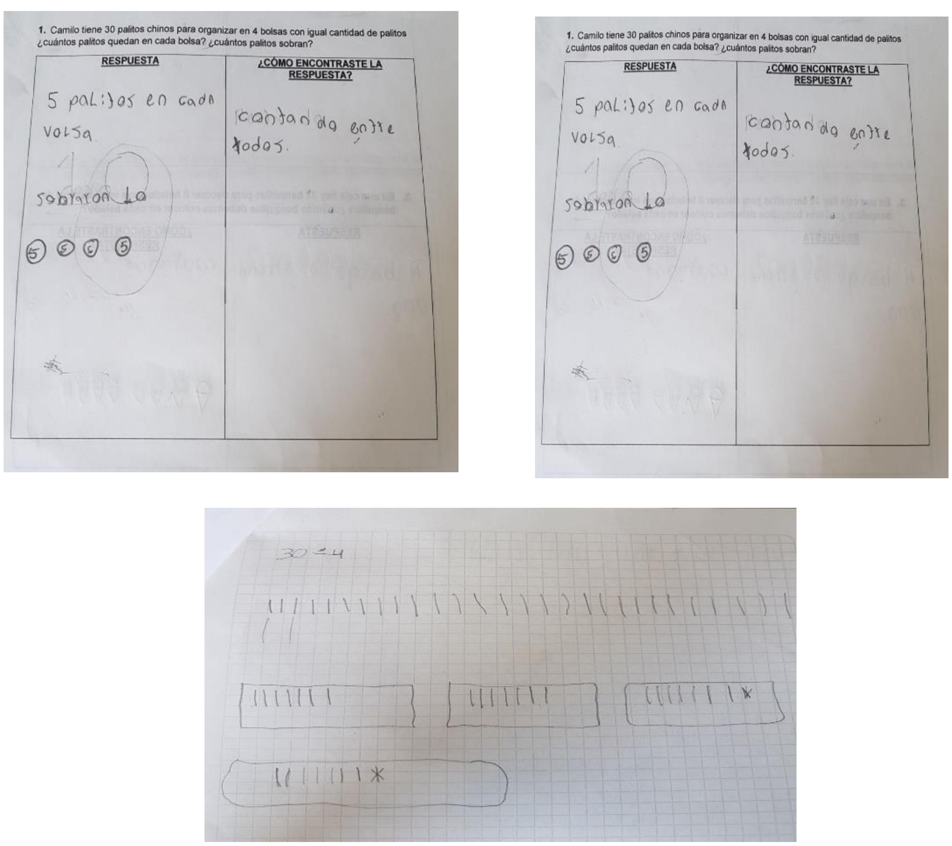


Figura 10: Evaluación diagnóstica – Pregunta 1

5.1.2 Pregunta 2. La profesora tiene 50 hojas de papel para repartir entre las mesas ¿cuántos paquetes de 5 hojas puede repartir?

RESPUESTA	**¿CÓMO ENCONTRASTE LA RESPUESTA?**

Más de la mitad de las respuestas a este problema fueron correctas (55%) y el 30% de respuestas fueron incorrectas. Hay un aumento en las respuestas correctas con respecto a la pregunta anterior, esto puede deberse al tipo de problema de división. El problema de esta pregunta es un problema de agrupamiento o resta sucesiva mientras el anterior era un problema de repartir (esto según los Lineamientos de matemáticas). Cabe anotar que hubo 3 estudiantes que no realizaron esta pregunta y las posteriores si, lo que indica que hubo obstáculos para su comprensión.

Los estudiantes muestran dificultad para hallar la forma de expresar simbólicamente una respuesta que hallaron a través del análisis de la situación, lo anterior hace referencia a procesos relacionados con decodificar y codificar.

A continuación, la *Figura 11* muestra algunas soluciones realizadas por los estudiantes donde se hacen evidentes las observaciones anteriores.

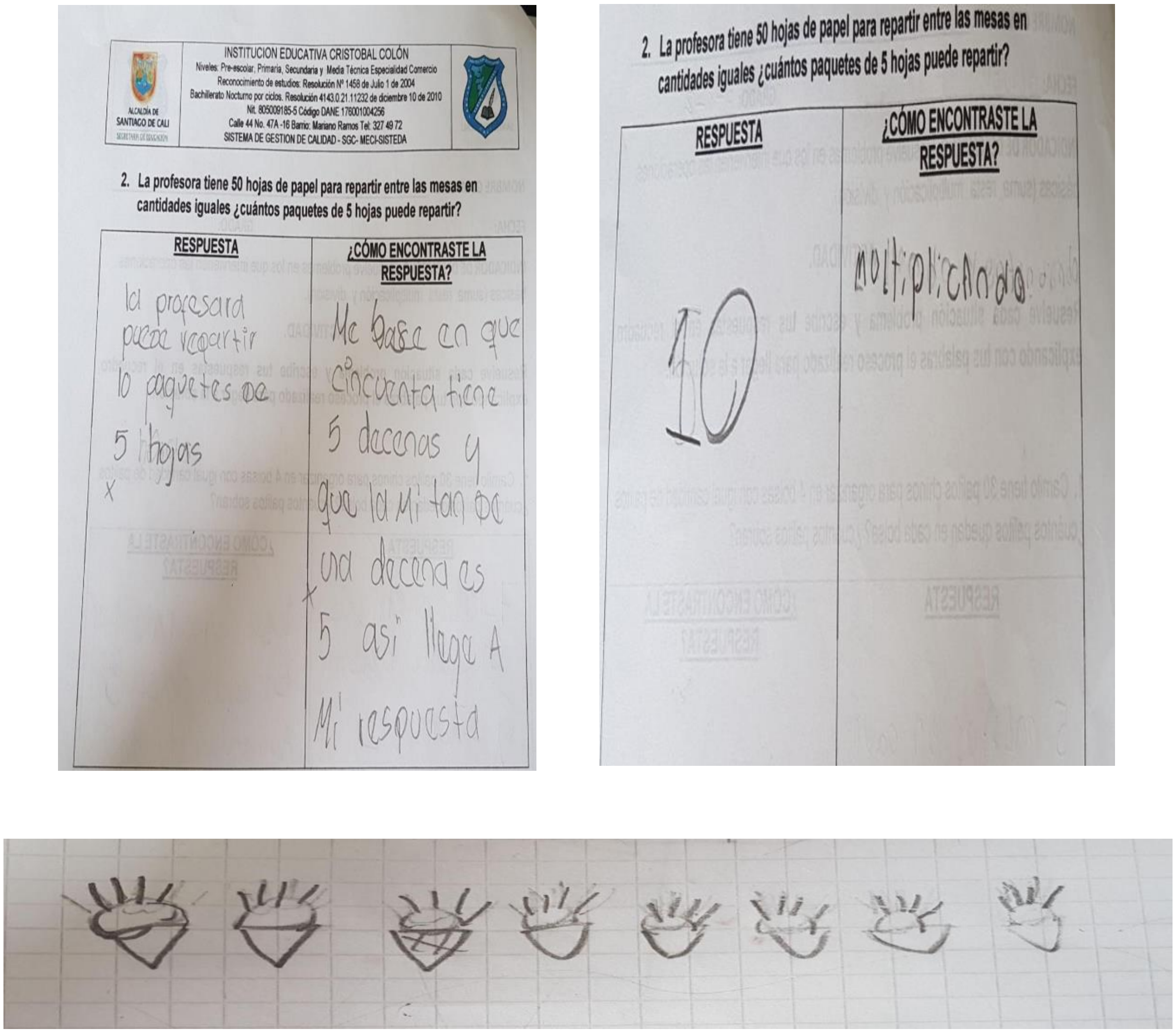


Figura 11: Evaluación diagnóstica – Pregunta 2

5.1.3 Pregunta 3. En una caja hay 32 barquillos para decorar 8 helados con igual número de barquillos ¿cuántos barquillos debemos colocar en cada helado?

RESPUESTA	**¿CÓMO ENCONTRASTE LA RESPUESTA?**

Los resultados obtenidos en esta pregunta son llamativos ya que un gran número de estudiantes contestaron correctamente, más del 65% exactamente 18 estudiantes de los 27 que presentaron la evaluación diagnóstica. Tan sólo 4 estudiantes que representan el 15% de la población, tuvieron respuesta incorrecta, 1 estudiante en proceso y 4 dejaron la respuesta en blanco. Este problema es un problema de repartir pero los resultados fueron favorables. Se obtuvieron respuestas en un lenguaje natural pero la argumentación de la misma la realizaron en un lenguaje simbólico que evidencia poca habilidad para uno de los procesos de la competencia comunicar.

5.1.4 Pregunta 4. Con 28 billetes ¿cuántos grupos de 5 puedo hacer? ¿cuántos billetes sobran?

RESPUESTA	**¿CÓMO ENCONTRASTE LA RESPUESTA?**

En esta pregunta los resultados obtenidos evidencian un grado de confusión mayor cuando se les dan problemas con operaciones combinadas, sólo responden a la pregunta que requiere como solución una operación de mayor dominio para ellos como la resta.

Nuevamente los problemas de repartos con agrupamientos presentan mayor complejidad para ellos. Sólo el 30% (8 de los 27 estudiantes) de las respuestas fueron correctas y un 26% no la resolvieron. El porcentaje de respuestas incorrectas fue bastante alto, 44% (12 estudiantes) tuvieron una solución errada. La poca habilidad para decodificar, codificar (representar) y argumentar se hace visible.

En la *Figura 12* se aprecian algunas soluciones realizadas por los estudiantes donde se hacen evidentes las observaciones anteriores.

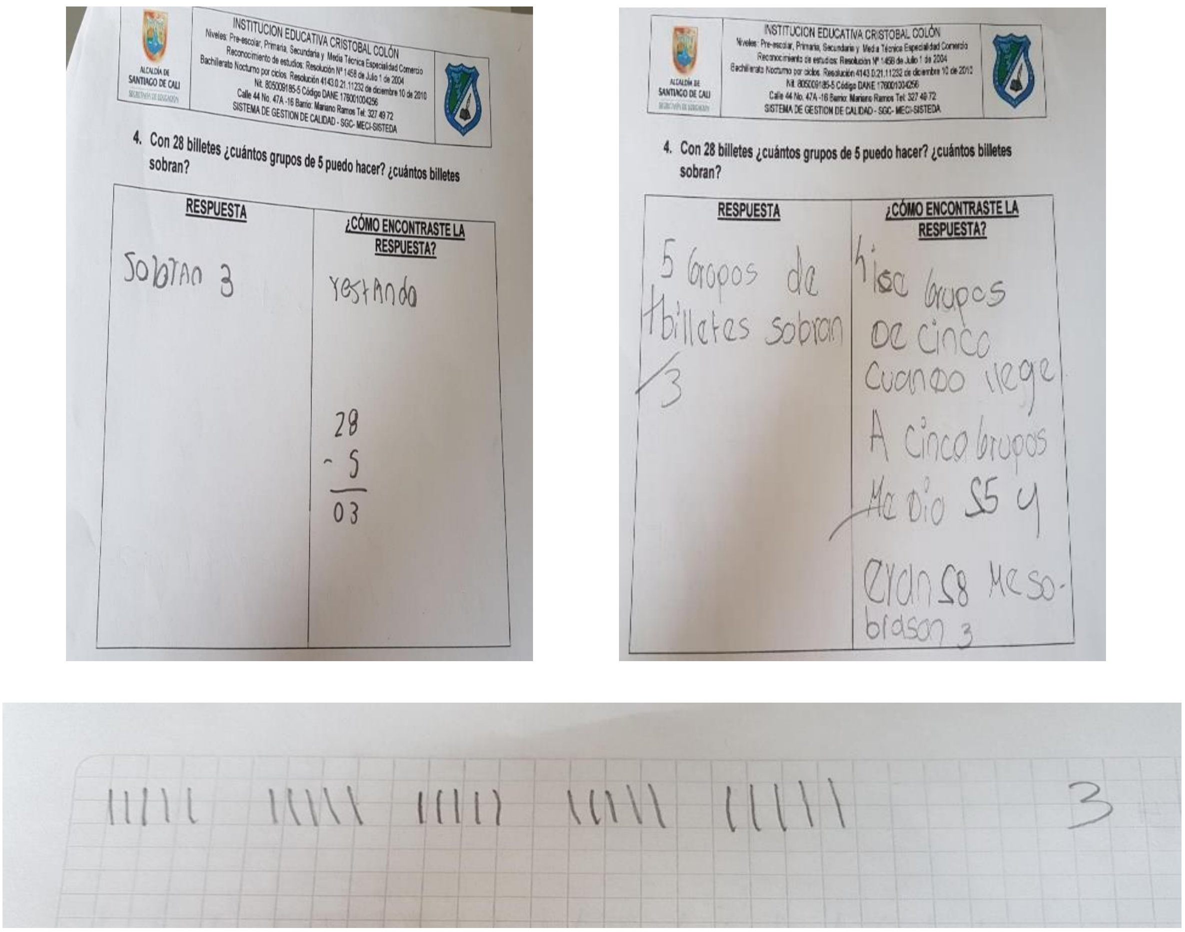


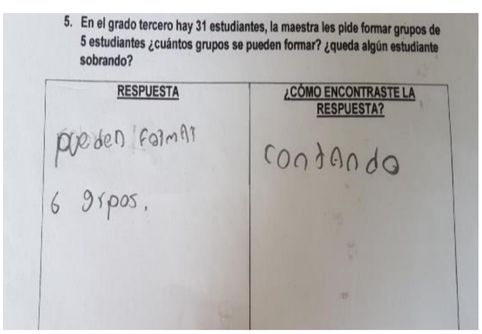
Figura 12: Evaluación diagnóstica – Pregunta 4

5.1.5 Pregunta 5. En el grado tercero hay 31 estudiantes, la maestra les pide formar grupos de 5 estudiantes ¿cuántos grupos se pueden formar? ¿queda algún estudiante sobrando?

RESPUESTA	¿CÓMO ENCONTRASTE LA RESPUESTA?

El factor tiempo no le permitió a un número considerable de estudiantes (8-30%) contestar esta pregunta. Se presenta la misma situación de la pregunta anterior en la que tener que responder a dos interrogantes representa un reto para ellos y sólo solucionan la que requiere la operación de mayor dominio para ellos. Sólo el 26% respondió correctamente, el 37% incorrectamente y un 7% dejó el proceso inconcluso. Se demuestran las debilidades en los procesos de comunicar y representar en las matemáticas.

En la *Figura 13*, se muestran algunas soluciones realizadas por los estudiantes donde se hacen evidentes las observaciones anteriores.



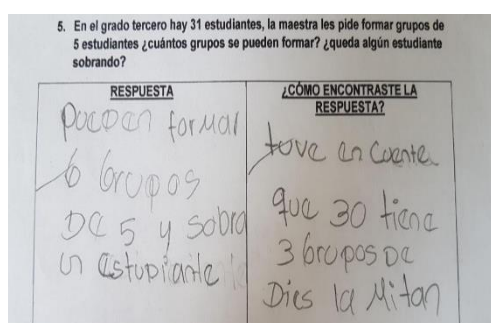


Figura 13: Evaluación diagnóstica – Pregunta 5

5.1.6 Conclusiones generales de la evaluación diagnóstica. Los análisis realizados a cada pregunta y las observaciones e interacciones con los estudiantes durante su desarrollo, permitieron llegar a las siguientes conclusiones acerca de las dificultades más comunes en los estudiantes, las cuales son concordantes con las asociadas a la resolución de problemas con estructuras multiplicativas planteadas por Duval (2006) y Godino y Batanero (2004), presentadas en el numeral 3.11 del marco teórico:

1. Expresar en lenguaje aritmético enunciados verbales (codificar).
2. Expresar en lenguaje verbal expresiones del lenguaje aritmético (decodificar).
3. Tienen deficiencias en los procesos de comprender, reproducir y argumentar.

A partir de lo expuesto anteriormente se puede concluir que los estudiantes del grado 3.3.2 presentan dificultades visibles en los procesos Representar y Comunicar en y con las matemáticas, cuando se requiere dar solución a problemas de estructuras multiplicativas centradas en la división.

5.2 Análisis de los resultados de la situación didáctica

Una semana después de realizar la evaluación diagnóstica, se inició la situación didáctica. Se trata de que los niños interactúen con material manipulativo (canicas) en mesas de trabajo colaborativo y vayan resolviendo los problemas que se les presentan recurriendo tanto a sus saberes previos como a sus experiencias personales.

Los resultados de todas las tareas que conforman la situación didáctica se presentan en la **Tabla 16**; en la **Tabla 17** se presentan las convenciones que se utilizaron para los diversos tipos de respuesta en la situación. Así mismo, en la **Tabla 18** se puede apreciar la frecuencia con que suceden las diferentes respuestas en las tareas.

Tabla 16

Respuestas obtenidas por las diferentes mesas de trabajo

Tarea \ Mesa		Mesa 1	Mesa 2	Mesa 3	Mesa 4	Mesa 5	Mesa 6
Tarea 1		RI	RLN	RLN	RGLN	RGLN	RLN
Tarea 2	TABLA	PCRI	RC	RC	PCRI	RI	RC
	Pregunta 1	RC	RC	RC	RC	RC	RC
	Pregunta 2	RI	RC	RC	RC	RC	RC
	Pregunta 3	RI	RI	RC	RI	RI	RI
Tarea 3		RC	RC	RC	RI	RC	RC
Tarea 4	Pregunta 1	RI	RC	RC	RC	RI	RI
	Pregunta 2	RC	RC	RC	RI	RC	RI
Tarea 5		RB	RC	RB	RI	RB	RI

Tabla 17

Convenciones que se utilizaron para clasificar las respuestas de la situación didáctica

Tipo de respuesta	Convención
Respuesta Correcta	RC
Respuesta Incorrecta	RI
Respuesta en Blanco	RB
Respuesta con Gráfico y en Lenguaje Natural	RGLN
Respuesta solamente en Lenguaje Natural	RLN
Proceso Correcto con Respuesta Incorrecta	PCRI
Proceso Incorrecto con Respuesta Incorrecta	PIRI

Tabla 18

Distribución de frecuencias para la situación didáctica

TAREAS / TIPO DE RESPUESTA		RC	RLN	RGLN	RI	PCRI	PIRI	RB	TOTAL
TAREA 1		5	3*	2*	1	0	0	0	6
TAREA 2	TABLA	3	0	0	3	2**	1**	0	6
	Pregunta 1	6	0	0	0	0	0	0	6
	Pregunta 2	5	0	0	1	0	0	0	6
	Pregunta 3	1	0	0	5	0	0	0	6
TAREA 3		5	0	0	1	0	0	0	6
TAREA 4	Pregunta 1	3	0	0	3	0	0	0	6
	Pregunta 2	4	0	0	2	0	0	0	6
TAREA 5		1	0	0	2	0	0	3	6
TOTAL		33	3*	2*	18	2**	1**	3	54

* Las RLN y RGLN hacen parte de las respuestas correctas.
** Las PCRI y PIRI hacen parte de las respuestas incorrectas.

5.2.1 Tarea 1 (Situación de Acción – Nivel de Reproducción). Al interactuar con material manipulativo, en este caso canicas, los estudiantes deben repartirlas en cinco grupos (los cinco participantes del torneo) y darse cuenta que al final a cada participante le corresponden cinco bolas y quedan sobrando tres que no se pueden repartir por igual entre cinco personas. Se espera que por ser un nivel de reproducción los estudiantes logren obtener la respuesta correcta, ya que es una situación en la que deben ´reproducir´ escenarios que ya han vivido en su cotidianidad.

A pesar que sólo una mesa de trabajo no pudo realizar el ejercicio, de las cinco mesas que lo realizaron correctamente, únicamente 2 utilizaron en su hoja de respuestas un diagrama que les permitiera explicar su modo de proceder, las otras tres mesas expresaron su respuesta simplemente en lenguaje natural. Por tratarse de un nivel de reproducción, se esperaba que los estudiantes lograran llegar a la respuesta correcta, sin embargo se pudo visualizar a través del ejercicio, que sólo una minoría es capaz de transformar esa vivencia en un gráfico que pueda ayudarles a encontrar su respuesta matemáticamente. La *Figura 14* muestra los resultados obtenidos de las diferentes respuestas para la tarea 1.

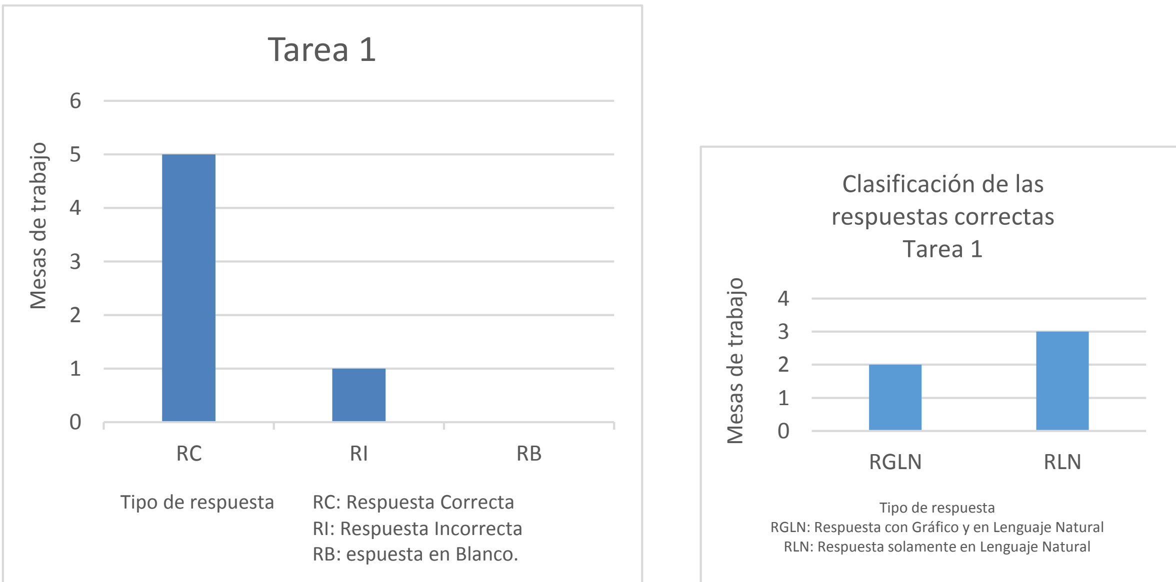
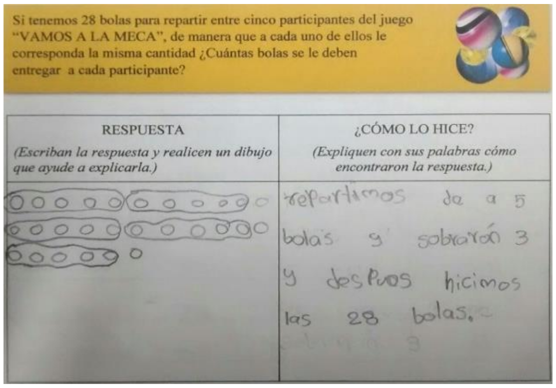
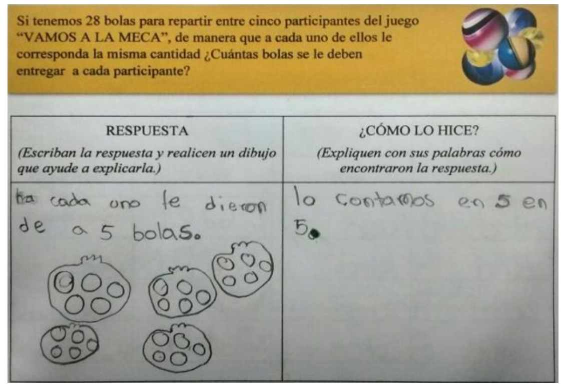


Figura 14: Resultados Tarea 1

En la *Figura 15* se puede ver que a pesar de que ambas mesas lograron transformar el ejercicio práctico en un gráfico, sólo la mesa 4 hizo un gráfico completo donde además de notarse los 5 grupos de 5 canicas cada uno, también se encuentran representadas las 3 canicas sobrantes. Pero como la pregunta sólo se refiere a las canicas que le corresponden a cada participante, más no a las canicas que sobran, se toma la respuesta de la mesa 5 como correcta.



Respuesta correcta con gráfico y en lenguaje natural – Mesa 4



Respuesta correcta con gráfico y en lenguaje natural – Mesa 5

Figura 15: Respuestas a la Tarea 1

5.2.2 Tarea 2 (Situación de Acción – Nivel de Conexión). Esta tarea tiene un crecimiento en su nivel de complejidad ya que requiere que los estudiantes además de utilizar una representación tabular, hagan uso de la sustracción para poder diligenciar la tabla. Se divide en cuatro partes: en la primera, los estudiantes deben tabular la tabla aplicando sus conocimientos previos, en las otras tres partes, deben utilizar esa tabla ya diligenciada para responder unas preguntas al respecto.

5.2.2.1 Tarea 2 - Tabla. En la **Tabla 19** se puede visualizar lo que los estudiantes debían diligenciar por mesas de trabajo. Como los niños no se encuentran familiarizados con el manejo de tablas, se les dio un ejemplo inicial para que la pudieran llenar con facilidad.

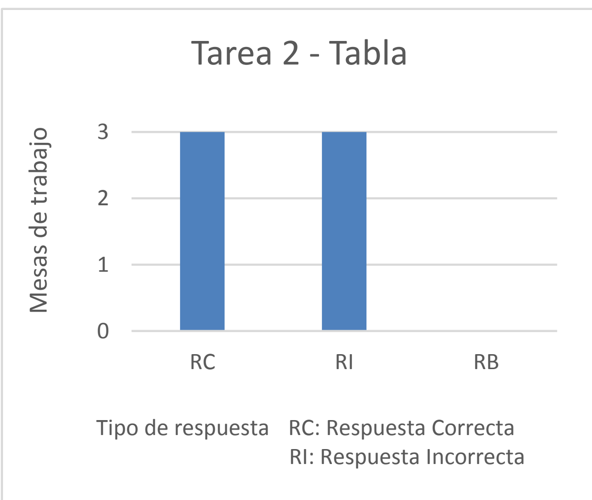
Se espera que la mayoría de los estudiantes logren llevar a buen término esta tarea, ya que a pesar de tener mayor complejidad, sus conocimientos previos son suficientes para ello.

Tabla 19

Representación tabular de la tarea 2

NÚMERO DEL REPARTO. (Escriban aquí el número del reparto que van a hacer así: primer reparto, segundo reparto,…etc.)	**NÚMERO DE BOLAS A REPARTIR.** (Cuenten las bolas que tienen antes de repartir y escriban aquí el número).	**NÚMERO DE BOLAS REPARTIDAS.** (Escriban cuántas bolas repartieron entre todos los participantes).	**BOLAS RESTANTES.** (Cuenten las bolas que les quedaron después de repartir y escriban el número aquí).
Primer reparto	28 bolas	5 bolas	23
Segundo reparto			

La *Figura 16* muestra los resultados obtenidos de las diferentes respuestas para la parte tabular de la tarea 2.



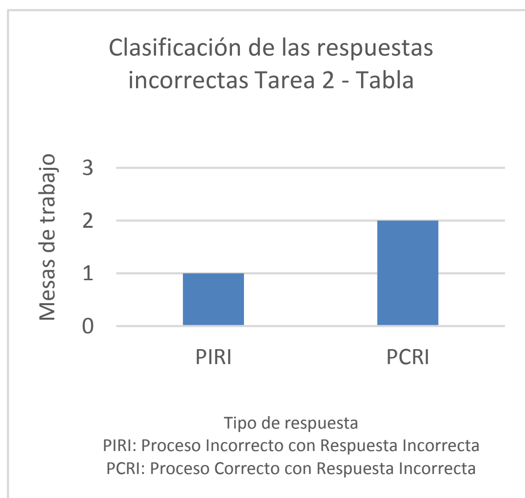
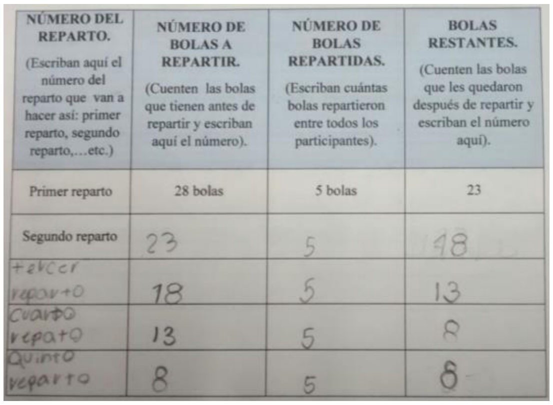


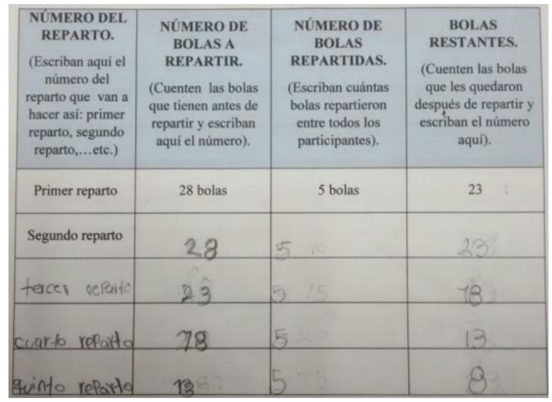
Figura 16: Resultados Tarea 2 - Tabla

La mitad de las mesas de trabajo logró la respuesta correcta, sin embargo, de las tres mesas que obtuvieron una respuesta incorrecta, sólo una realizó mal el procedimiento, las otras dos llevaron a cabo un buen proceso pero tuvieron un error que las llevó a una respuesta incorrecta, lo cual deja ver que tenían claro qué es lo que debían hacer y además tenían las bases necesarias para realizarlo.



NÚMERO DEL REPARTO. (Escriban aquí el número del reparto que van a hacer así: primer reparto, segundo reparto,…etc.)	NÚMERO DE BOLAS A REPARTIR. (Cuenten las bolas que tienen antes de repartir y escriban aquí el número).	NÚMERO DE BOLAS REPARTIDAS. (Escriban cuántas bolas repartieron entre todos los participantes).	BOLAS RESTANTES. (Cuenten las bolas que les quedaron después de repartir y escriban el número aquí).
Primer reparto	28 bolas	5 bolas	23
Segundo reparto	23	5	18
tercer reparto	18	5	13
Cuarto repato	13	5	8
Quinto reparto	8	5	8

Respuesta Incorrecta con Proceso Correcto – Mesa 1



NÚMERO DEL REPARTO. (Escriban aquí el número del reparto que van a hacer así: primer reparto, segundo reparto,…etc.)	NÚMERO DE BOLAS A REPARTIR. (Cuenten las bolas que tienen antes de repartir y escriban aquí el número).	NÚMERO DE BOLAS REPARTIDAS. (Escriban cuántas bolas repartieron entre todos los participantes).	BOLAS RESTANTES. (Cuenten las bolas que les quedaron después de repartir y escriban el número aquí).
Primer reparto	28 bolas	5 bolas	23
Segundo reparto	28	5	23
tercer reparto	23	5	18
cuarto reparto	18	5	13
quinto reparto	13	5	8

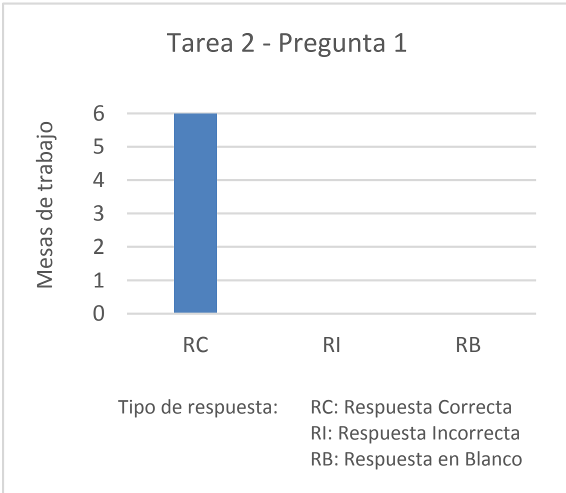
Respuesta Incorrecta con Proceso Correcto – Mesa 4

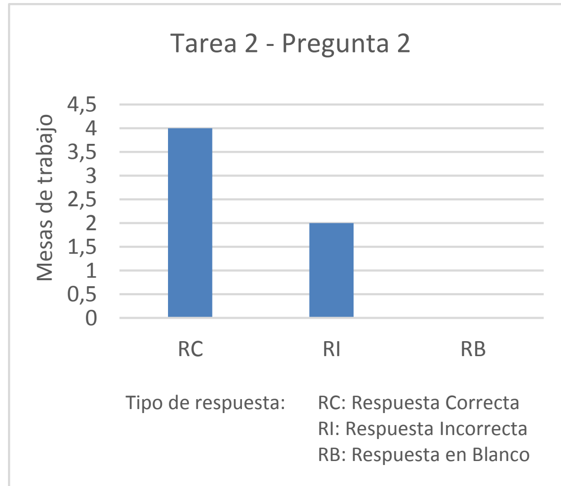
Figura 17: Respuestas a la Tarea 2 - Tabla

En la *Figura 17* se puede observar que el único error que tuvieron los integrantes de la Mesa 1, fue la última resta (8 – 5 = 8), un error aritmético que pudo haber sido producto de una distracción. Y en la mesa 4 el error fue en el segundo reparto, debido quizás a no leer bien la instrucción, ya que los estudiantes comenzaron con 28 canicas, siendo que ya iban por 23, porque el ejemplo ya había resuelto el primer reparto.

De acuerdo con las anteriores interpretaciones, se puede ver que la mayoría los estudiantes que integran las mesas de trabajo comprendieron el ejercicio.

5.2.2.2 Tarea 2 – Preguntas 1 - 3. De acuerdo a cómo cada mesa de trabajo tabuló la tabla, se espera que las respuestas sean acertadas o no.





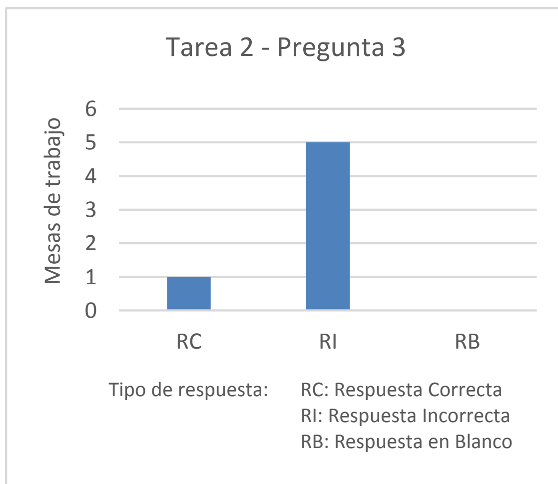
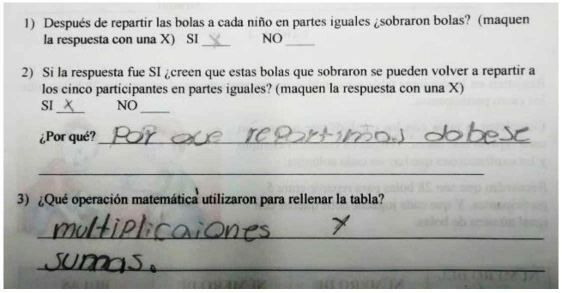


Figura 18: Resultados Tarea 2 – Preguntas 1 – 3

En la primera pregunta es lógico que todos hayan obtenido una respuesta buena, ya que en todas las tablas se llegó a que sobraban canicas, aunque el número de canicas que sobrara no fuera el correcto.

Las respuestas a la segunda pregunta fueron más acordes con la tabulación de la tabla. Los estudiantes de las tres mesas de trabajo que llenaron la tabla de forma correcta, respondieron esta pregunta acertadamente y justificaron de manera apropiada (mesas 2, 3 y 6). Los integrantes de la mesa de trabajo 4, contestaron y justificaron adecuadamente, a pesar de haber tenido un error en el diligenciamiento de la tabla. Cabe resaltar que dichos estudiantes fueron los únicos que obtuvieron de manera completa la respuesta correcta, gráficamente y en lenguaje natural, de la primera pregunta. Debido a esto, a pesar de no diligenciar acertadamente la tabla, lograron responder y justificar apropiadamente la segunda pregunta. Y finalmente, los alumnos que conforman las mesas 1 y 5, no contestaron bien, pero es importante recordar que tampoco lo hicieron con las anteriores preguntas.

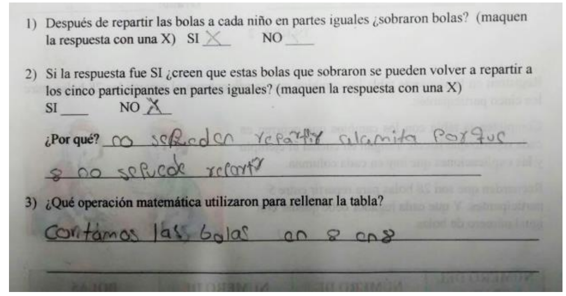
La pregunta 3, a diferencia de todas las anteriores, tuvo una gran mayoría de respuestas incorrectas. Sin embargo también, a diferencia de las anteriores, no tenía prerrequisitos. Solamente los integrantes de la mesa 3 contestaron apropiadamente. Este alto porcentaje de error se puede deber a que se trata de una pregunta que necesita recordar conceptos matemáticos y los nombres asociados a ellos. Debían contestar que la resta o sustracción fue la operación matemática que utilizaron para llenar la tabla, y aunque los otros estudiantes describieron el proceso que los llevó a la tabulación correcta de la tabla, no lograron conectarlo con la resta, algunos dijeron que lo que hicieron fue contar y otros que repartieron. Sólo dos grupos (mesas 1 y 5) dieron respuestas totalmente inapropiadas, como se puede observar en las *Figura 19*.


1) Después de repartir las bolas a cada niño en partes iguales ¿sobraron bolas? (maquen la respuesta con una X) SI X NO ___

2) Si la respuesta fue SI ¿creen que estas bolas que sobraron se pueden volver a repartir a los cinco participantes en partes iguales? (maquen la respuesta con una X)
SI X NO ___

¿Por qué? Por que repartimos dobese

3) ¿Qué operación matemática utilizaron para rellenar la tabla?
multiplicaiones y
sumas.


1) Después de repartir las bolas a cada niño en partes iguales ¿sobraron bolas? (maquen la respuesta con una X) SI X NO ___

2) Si la respuesta fue SI ¿creen que estas bolas que sobraron se pueden volver a repartir a los cinco participantes en partes iguales? (maquen la respuesta con una X)
SI ___ NO X

¿Por qué? no sepueden repartir alamita porque
e no sepuede repartir

3) ¿Qué operación matemática utilizaron para rellenar la tabla?
contamos las bolas en 8 en 8

Respuestas Mesa 1

Respuestas Mesa 5

Figura 19: Respuestas a la Tarea 2

5.2.3 Tarea 3 (Situación de formulación – Nivel de conexión). La tarea se compone de tres actividades en las cuales los estudiantes comparten sus experiencias con los integrantes de las otras mesas, lo cual sirve para la construcción colectiva del conocimiento, objeto de este estudio: en primer lugar, el expositor de cada mesa de trabajo debe contar a los demás cuál fue el procedimiento que utilizaron para tabular la tabla; luego, debe compartir a los demás su tabla diligenciada y las otras respuestas de la segunda tarea; finalmente, en diálogo con los integrantes de su mesa de trabajo, deben escribir las diferencias que encontraron entre sus respuestas y las de las otras mesas.

Las preguntas 1 y 2 no se tabularon ni graficaron, por ser situaciones en las que los estudiantes utilizaron la exposición oral. Se esperaba que la respuesta a la pregunta 3 fuera acertada para todas las mesas de trabajo, debido a que era de esperarse que hubiera diferencias de algún tipo en todos los grupos, sin embargo los integrantes de la mesa 4 respondieron que no encontraron ninguna diferencia en las respuestas.

Los resultados de esta tarea se pueden observar en la *Figura 20*.

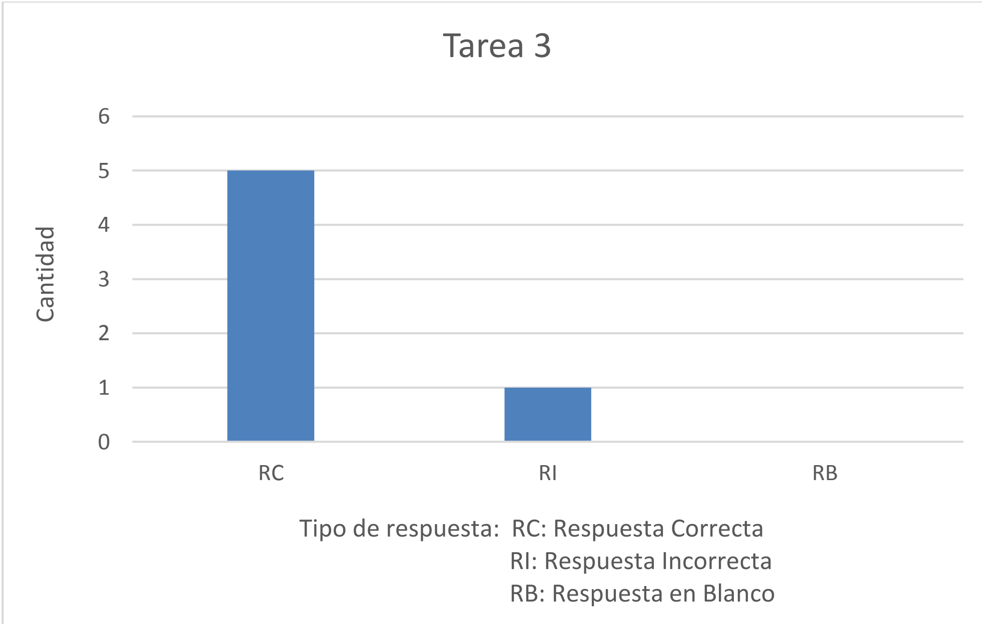


Figura 20: Resultados a la Tarea 3

5.2.4 Tarea 4 (Situación de Validación – Nivel de Conexión). En esta tarea, los estudiantes deben intuir que si después de repartir 28 canicas entre 5 participantes les sobraron 3, debe haber algún número de participantes específico para el cual no sobre ninguna canica después de repartir en partes iguales.

Esperábamos que los niños probaran con diferentes números de participantes para así encontrar al menos una respuesta por grupo. Además, también pensamos que iba a haber grupos con diferentes respuestas, e incluso alguno con más de una respuesta.

Como se puede observar en la *Figura 21,* en la primera pregunta que se refería a una repartición exacta, dónde los niños debían encontrar una cantidad de participantes tal que a cada uno le corresponda la misma cantidad de bolas sin que sobre ninguna, no se obtuvo lo esperado. Por una parte, la mitad de las mesas de trabajo no lograron encontrar ninguna cantidad, y por otra parte, todas las mesas de trabajo que respondieron correctamente, lo hicieron con una única respuesta.

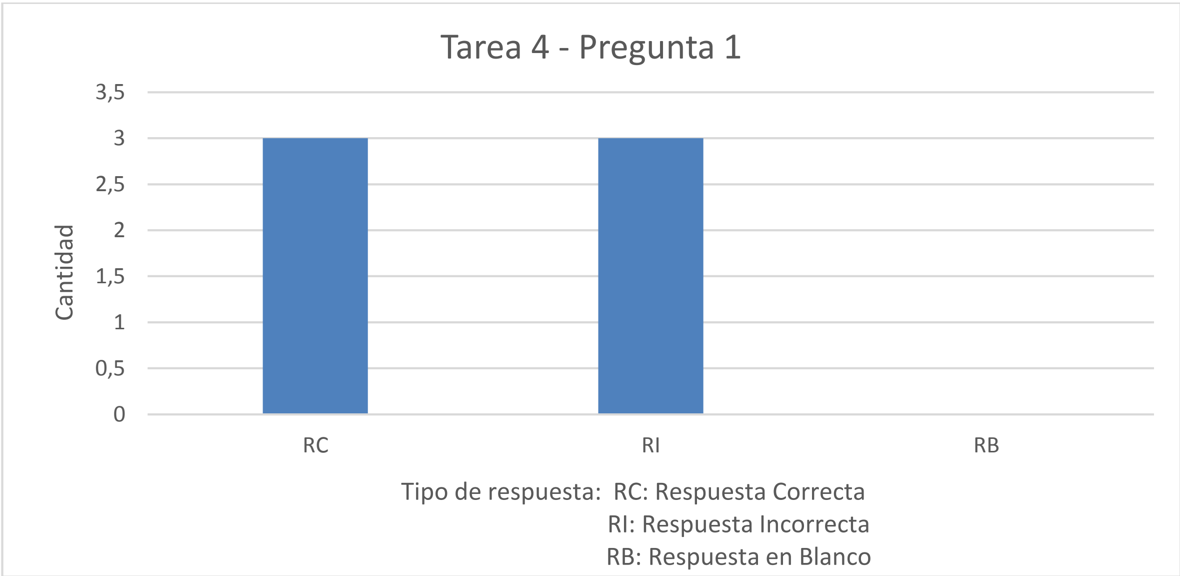


Figura 21: Resultados a la Tarea 4 – Pregunta 1

Cuando los grupos de trabajo contestan la primera pregunta, sólo aparecen dos números diferentes (dos grupos proponen 4 participantes y un grupo propone 7), tal como se ve en la *Figura 22*. Sin embargo, en *Figura 23* se puede observar que 4 grupos respondieron que sí podía haber diferente número de participantes de modo que no sobren canicas. Hubo dos grupos que lo hicieron, y estaban equivocados en la primera pregunta, y un grupo que a pesar de haber contestado bien la primera pregunta dijo que no, debido a una mala interpretación de la pregunta.

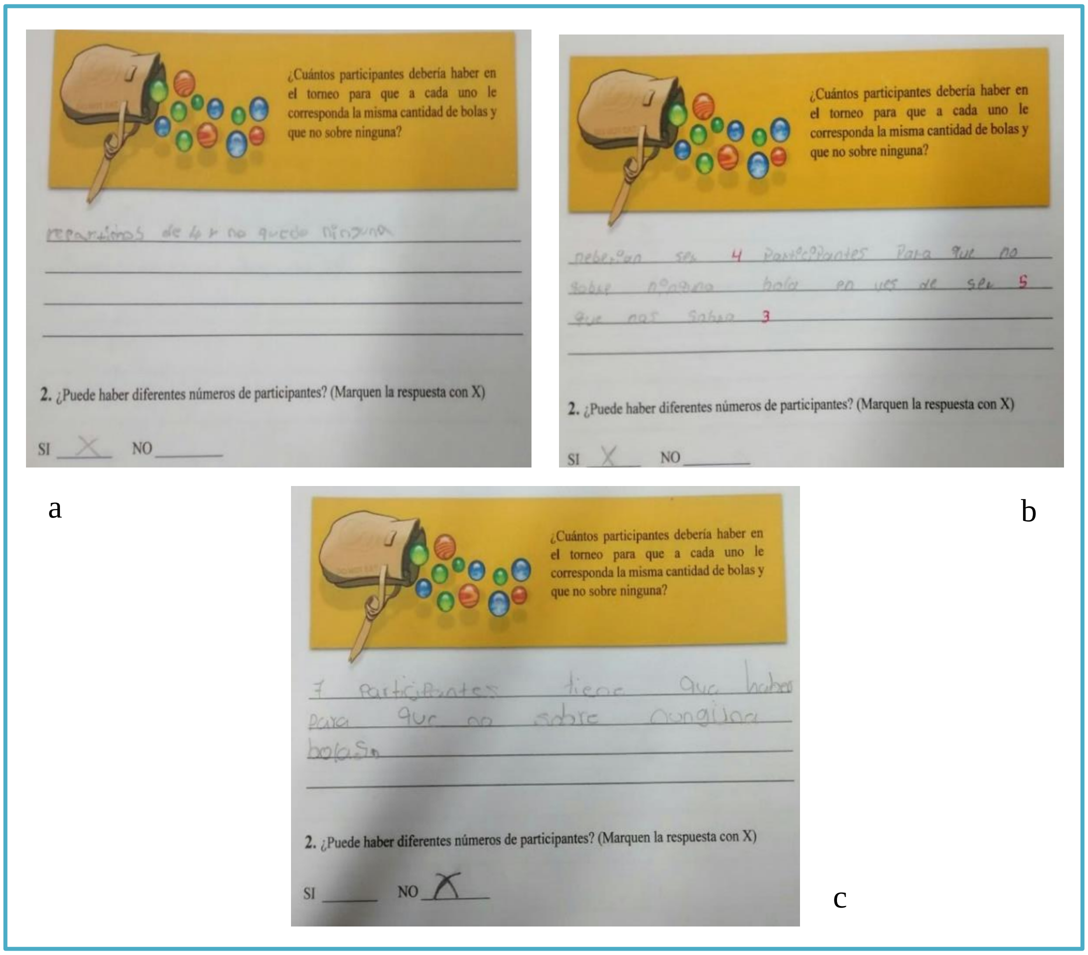


Figura 22: Respuestas a la Tarea 4 – Preguntas 1 – 2

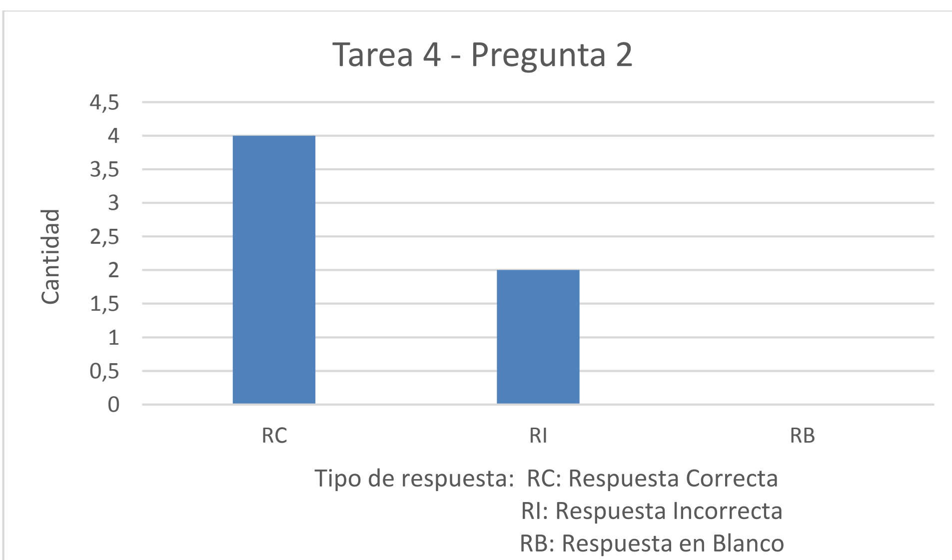


Figura 23: Resultados a la Tarea 4 – Pregunta 2

Por tratarse de una situación de validación, los estudiantes deben darse cuenta, a partir de los argumentos de sus compañeros, y de la discusión que surge a su alrededor, que para repartir 28 canicas en partes iguales, puede haber diferente número de participantes en el torneo, así: 2 participantes (14 canicas cada uno), 4 participantes (7 canicas cada uno), 7 participantes (4 canicas cada uno) y 28 participantes (1 canica cada uno).

Una vez realizada la sustentación de sus argumentos por parte de los expositores de cada mesa de trabajo (situación de validación), los niños que no lo habían notado, se dan cuenta de lo anterior. Dos grupos encontraron que con 4 participantes no sobraban canicas (*Figura 22* a y b), mientras que el otro grupo propuso 7 participantes (*Figura 22* c).

5.2.5 Tarea 5 (Situación de Validación – Nivel de Reflexión). Una vez planteadas las diferentes posturas por parte de los expositores de las mesas de trabajo, los integrantes de las mismas se reunieron para reflexionar acerca de lo ocurrido ¿por qué los tres grupos tuvieron la respuesta correcta, siendo que a dos de ellos les dio 4 y al otro le dio 7?

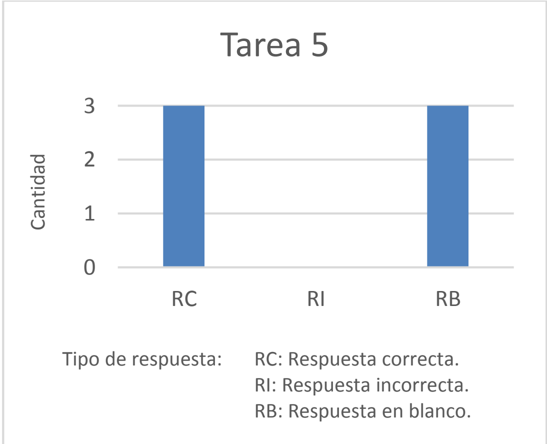


Figura 24: Resultados a la Tarea 5

Hubo tres mesas de trabajo cuyos integrantes no lograron ese nivel de reflexión, y su respuesta quedó en blanco. De los tres grupos que contestaron correctamente, sólo uno lo hizo utilizando un lenguaje apropiado, como se puede apreciar en la *Figura 25*. En la *Figura 26* (a), se puede ver como los integrantes de la mesa de trabajo 4, lograron intuir la respuesta y la formularon como una multiplicación, donde se puede ver que los números 4 y 7 (los que encontraron en la pregunta anterior) se relacionan entre ellos y a su vez con el 28 (números de canicas). Los integrantes de la mesa de trabajo 6, intentaron explicar aquello que intuyeron en un lenguaje natural y matemático al mismo tiempo, como se muestra en la *Figura 26* (b); aunque no fueron muy precisos en su apreciación, se puede ver que lograron abstraer lo que se estaba buscando.

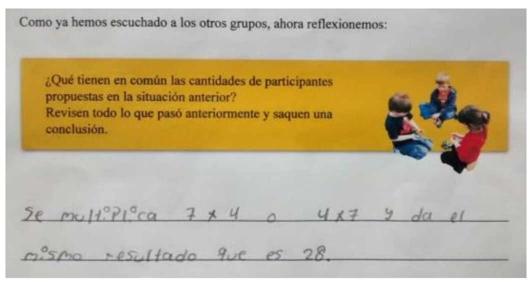


Figura 25: Respuesta apropiada a la Tarea 5

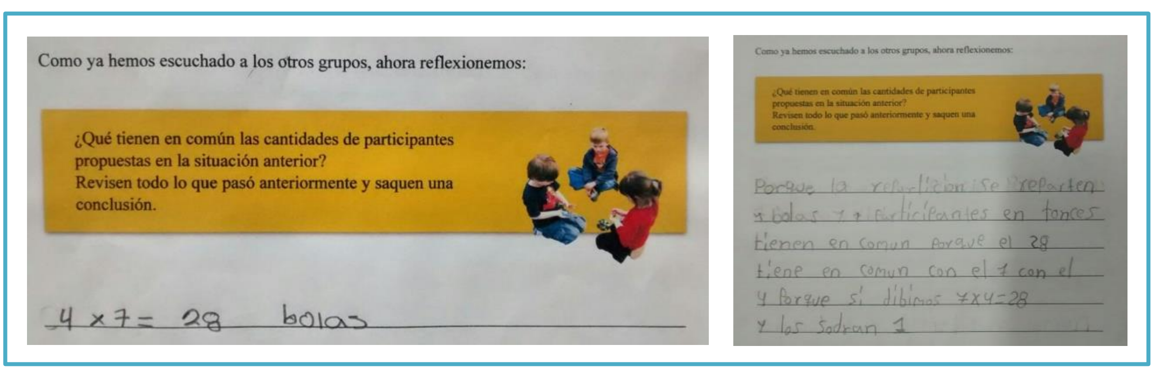


Figura 26: Respuestas a la Tarea 5

5.2.6 Situación de Institucionalización. Una vez terminada la primera parte de la situación didáctica (situación de acción, de formulación y de validación), se procedió a realizar la situación de institucionalización, para la cual fue diseñada una forma de representación bidimensional para estructuras multiplicativas enfocadas a la división.

La profesora explica a los estudiantes la metodología para trabajar con ese tipo de representaciones bidimensionales, de tal forma que se haga visible para ellos cómo la división resulta de restar reiterativamente, y una vez culminado el gráfico, puedan ver que este tipo de problemas termina con agrupamiento de objetos o repartición de los mismos. Lo cual se evidencia en los conjuntos que se conforman al final, tal como se mostró en el Capítulo 3, donde se habla del sistema de representación para el objeto matemático (*Figura 8)*.

La situación que los estudiantes realizaron, consta del enunciado del problema, un sistema de coordenadas bidimensional para que realicen la primera conversión (de lenguaje natural a representación gráfica) y tres preguntas para que respondan de acuerdo a los datos que sus representaciones gráficas les arrojen, lo cual corresponde a la segunda conversión que los niños deben realizar (de representación gráfica a expresión matemática).

Para el análisis de esta situación se tuvieron en cuenta las convenciones que se muestran en la **Tabla 20**.

Tabla 20

Convenciones para la situación de institucionalización

Tipo de Respuesta	Convención
Gráfico Correcto con Respuesta Correcta	GCRC
Gráfico Correcto con Respuesta Incorrecta	GCRI
Gráfico Incorrecto con Respuesta Incorrecta	GIRI
Gráfico Incorrecto con Respuesta Correcta	GIRC

En la **Tabla 21** se aprecian los resultados que se obtuvieron de la situación de institucionalización.

Tabla 21

Resultados de la situación de institucionalización

Convención	# estudiantes
GCRC	16
GCRI	1
GIRI	3
GIRC	6
TOTAL	26

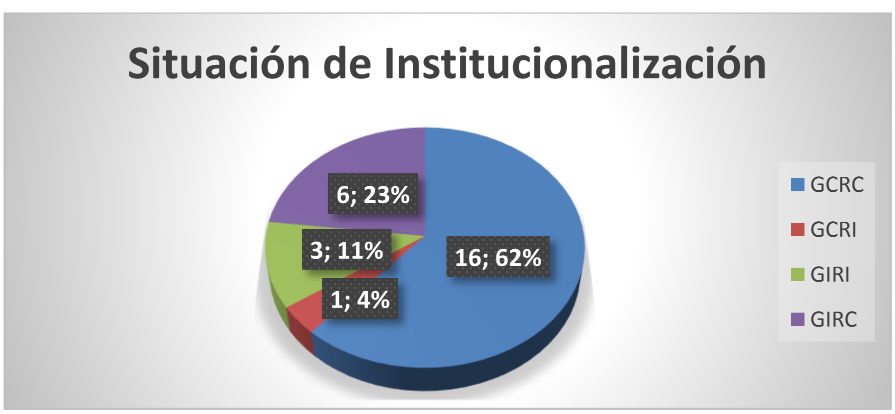


Figura 27 Respuestas a de la Situación de Institucionalización

Como se puede observar en la *Figura 27*, una vez realizada la situación de institucionalización, más de la mitad de los estudiantes (62%) pudieron culminar el problema sin ningún error, utilizando la forma de representación bidimensional. De 38% de los estudiantes que presentaron alguna dificultad para la resolución del problema, el 23% fue debido a dificultades con la precisión en que graficaron, sin embargo, llegaron a la respuesta correcta. Esto sucede porque los niños ya han interiorizado, de una manera espontánea, el concepto de división, lo cual hace que puedan expresar la respuesta correcta. Es decir que si sólo nos fijamos en la respuesta, el 85% de los estudiantes la tuvieron.

Solamente un 11% (3 estudiantes), no lograron realizar ninguna conversión. Estos estudiantes no lograron convertir el lenguaje natural a la representación gráfica, como se puede ver en la *Figura 28.*

Figura 28: Situación de Institucionalización

5.2.7 Descripción y análisis de las situaciones didácticas. La **Tabla 22** presenta el diseño de la rejilla de observación de la situación didáctica (acción, validación, formulación, institucionalización) y de sus indicadores del saber.

Tabla 22

Rejilla de Observación

<table>
<tr><th colspan="6">REJILLA DE OBERVACIÓN SITUACIONES DIDÁCTICAS.</th></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETO DE ENSEÑANZA</td><td colspan="4">Estructuras multiplicativas: la División (Lenguaje aritmético)</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTA PROBLEMA</td><td colspan="4">¿De qué manera las actividades de una situación didáctica contribuyen a que los estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa Cristóbal Colón de la ciudad de Santiago de Cali, desarrollen la competencia comunicar a partir de la construcción del concepto de división, propio del pensamiento numérico?</td></tr>
<tr><td>Clase 0</td><td>Describo y caracterizo al grupo</td><td colspan="4">El grupo experimental está compuesto de 13 niños y 20 niñas. Están en el grado 3. Hay 2 repitentes, son de estrato socioeconómico 1 y 2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competencias</td><td colspan="4">Comunicar</td></tr>
<tr><td>Clase 1</td><td>Índices iniciales de saber del estudiante</td><td colspan="4">Con el fin de conocer y analizar los saberes previos de los estudiantes se diseñó y aplicó una evaluación diagnóstica donde se pudo observar el nivel de comprensión de enunciados de problemas matemáticos y las dificultades y los desaciertos más comunes que se presentan al solucionarlos. En esta evaluación se tuvieron en cuenta los saberes y las habilidades que los estudiantes deben dominar para el aprendizaje del objeto matemático (estructuras multiplicativas centradas en la división). Los estudiantes debían poseer como saberes previos la sustracción o resta de números naturales, los conjuntos o agrupaciones, la comprensión e interpretación lectora.

La evaluación diagnóstica se aplicó a 27 estudiantes el 17 de Octubre de 2017 y tuvo una duración de 130 minutos. La prueba contiene 5 preguntas, cada una compuesta por un problema matemático y una tabla para consignar la respuesta y la explicación del proceso realizado para hallarla; todos direccionados al proceso de traducir (codificar y decodificar). Todos los problemas son del tipo reparto en los cuales los estudiantes deben realizar restas sucesivas. Algunos contemplan el reparto equitativo (pregunta 2 y 3) y otros los repartos con residuo (preguntas 1,4 y 5).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Clase 2</td><td rowspan="4">Información de las consignas y del tipo de trabajo</td><td colspan="2">Consignas</td><td>Trabajo grupal</td><td>Trabajo individual</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comprensión consignas por los alumnos.</td><td rowspan="3">Las situaciones didácticas se desarrollan bajo los parámetros del trabajo colaborativo pero en su interior hay tareas de asignación individual y grupal. Las tareas grupales se realizaron en las clases 3 y 4. En ambas clases posterior a</td><td rowspan="3">El trabajo se desarrolla de manera individual en las tareas 1, 2 y 3 (clase 2) y en el ejercicio posterior a la institucionalización.</td></tr>
<tr><td>Claramente</td><td>Poco o nada claras</td></tr>
<tr><td>23 estudiantes</td><td>3 1</td></tr>
</table>

		Por qué es clara	**Por qué es poco o nada clara**	la solución individual cada estudiante expone su respuesta a los integrantes del grupo, con el fin de validar la solución o generar otra de forma conjunta. En ambas sesiones de clase se presenta la codificación y decodificación en varias tareas.	
		Es clara porque los estudiantes entienden las reglas del trabajo por mesas, el manejo que le darán a los materiales concretos y la estructuras de las tareas que se presentan en el material impreso.	Es poco o nada clara pues el estudiante realiza preguntas sobre lo ya explicado, discute con sus compañeros por no saber usar los materiales y decide no trabajar.		
Clase 2 tomamos nota del tiempo	**Situación Acción** (es la situación cuyos primeros indicios nos informa de la acción del estudiante)	**Indicadores de saber**			
		Codifica	**Formula hipótesis**	**Plantea estrategias**	**Lanza ideas de cómo podría dar la respuesta**
		Decodifica	**Propone soluciones**	**Comprende**	**Reproduce**
		Traduce	**Compara**	**clasifica**	**Busca información por sí mismo**
		Intenta resolver el problema codificando y decodificando con mucha dificultad.	Algunos conversan con el compañero sobre cómo lo harían. Otros observan lo que su compañero hizo para comparar con su propuesta. Una minoría no realiza nada o evidencia frustración por no poder resolver el problema.	Plantea estrategias dibujando o haciendo grupos con el material concreto recibido (canicas).	Escribe la respuesta a partir de lo que concluye del dibujo realizado o lo inferido del trabajo hecho con el material concreto.
	Situación formulación (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción cognitiva del estudiante).	Se puede resolver dibujando o repartiendo las canicas.	Comunica a sus compañeros la forma como resolvería el problema. Escucha las propuestas de los otros para establecer entre todos una solución lógica.	Propone y comunica soluciones a partir de los datos de la tabla y con sus saberes previos.	Plantea una estrategia para completar la tabla y responder a las preguntas hechas.
		Analiza si los materiales entregados son suficientes para solucionar y	Plantea una idea para completar la primera fila de la tabla.	Redacta las respuestas a cada enunciado.	Comparte sus respuestas y anima al grupo a

		encontrar una respuesta acertada.			encontrar los demás valores.
		Analiza si los dibujos que realiza realmente ayudan s solucionar el problema.			
Clase 3 tomamos nota del tiempo	**Situación validación** (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción argumentativa porque explica cómo llegó el estudiante a la resolución del problema).	Describe cómo hizo para completar la tabla de la tarea 2 Es crítico y argumenta sus respuestas.	Es capaz de reconstruir el proceso que utilizo para realizar la tarea haciendo visibles la codificación y decodificación.	Elabora argumentos sólidos para defender sus respuestas.	La respuesta escrita está presente en el desarrollo de la situación didáctica y la oral se presenta en la a verificación y validación de la información obtenida individualmente.
		Infiere a partir del primer resultado cómo se puede llegar a los otros	Deduce a partir del proceso presentado por sus compañeros la operación que se realizó (resta)	Compara sus respuestas con la del resto del equipo.	Agrupa las estrategias presentadas para llegar a una respuesta lógica.
		Emite una respuesta clara a partir de los procesos realizados.	Explica escrita y oralmente cómo hizo para llegar a sus respuestas.	Diferencia sus errores y aciertos de los errores y aciertos de los demás, a la luz del consenso al que llegan como mesa de trabajo.	Comprende la relación entre la resta y las respuestas de la tabla.
			Sus explicaciones son claras para todos los integrantes del equipo.	Organiza las ideas en la hoja de respuesta.	Demuestra cómo usó la resta para completar la tarea.
	Situación formulación (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción cognitiva del estudiante).	Propone la manera de repartir para que el reparto sea equitativo. Analiza las diferencias entre la pregunta de esta tarea y la tarea 1 para plantear una solución lógica.	Comparte con sus compañeros su estrategia.	Propone y comunica soluciones de acuerdo a la información presentada.	Responde a los interrogantes de acuerdo a las discusiones que se dieron y teniendo en cuenta lo desarrollado en las situaciones anteriores.

Clase 4 tomamos nota del tiempo	**Situación validación** (es la situación cuyos indicios nos informa de la acción argumentativa porque explica cómo llegó el estudiante a la resolución del problema).	Describe cómo lo hizo Describe cómo hizo para hallar la respuesta y pasar de repartos con sobrantes a repartos equitativos.	Reconstruye el proceso utilizado demostrándolo usando el material concreto.	Presenta argumentos sólidos que defienden su respuesta.	La respuesta evidencia avances en los procesos codificar y decodificar desarrollados en las situaciones didácticas anteriores.
	Situación institucionalización (se presenta la estructura conceptual del objeto matemático y la propuesta de solución grafica del mismo)	Presentamos la estructura conceptual del objeto matemático y la propuesta gráfica que los estudiantes deben aplicar en la resolución de la siguiente situación.			
	Tarea de ejercitación	Los estudiantes resolvieron un problema del mismo tipo y (sustracciones repetitivas- reparto con residuo) del propuesto en la situación de acción, pero para su solución se les entregó el plano cartesiano en el que realizaran la propuesta de solución en lenguaje grafico que se les explico en la institucionalización.			

5.3 Análisis de los resultados de la Evaluación Post (Después de la aplicación de la Situación Didáctica).

Para conocer y analizar el estado de los saberes de los estudiantes después de la aplicación de la situación didáctica, se aplicó nuevamente la prueba que se usó para la evaluación diagnóstica. Esta prueba se realiza a los siete días de haber iniciado el grado cuarto, la presentaron sólo 22 de los 27 estudiantes que estuvieron en el proceso de diagnóstico. Esta prueba se aplicó más de dos meses después de la última sesión de clases de la situación didáctica. Cabe anotar que hubo un periodo de receso estudiantil entre una sesión y otra, y que los estudiantes en ese momento se encontraban iniciando el grado cuarto.

Para el análisis de la evaluación post se tuvo en cuenta un estudio individual de los resultados que luego se contrastarán con los resultados individuales de la evaluación diagnóstica. Y después se presentará una tabla que presenta los resultados de forma comparativa. Se establecen como tipo de respuestas consideraran las respuestas correctas en lenguaje aritmético (A), respuestas correctas en lenguaje simbólico (B), respuestas correctas en lenguaje natural (C), respuestas incorrectas (D), respuestas incompletas o en proceso (E) y respuestas en blanco (F).

Tabla 23

Respuestas por estudiante en la Evaluación Post

Estudiante / No. Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	B	A	A	D	D	B	D	D		B	D	D		D	D	C	D		D	D	D	D	D		D	A	
2	D	A	B	D	D	D	D	D		D	D	C		D	B	B	D		D	B	C	D	D		D	D	
3	A	A	B	A	B	F	D	F		E	D	C		C	B	B	A		A	A	D	D	D		A	A	
4	A	A	B	A	B	D	D	F		B	A	C		B	B	B	A		A	F	D	D	D		A	F	
5	A	A	B	A	B	B	D	F		F	A	C		F	B	F	A		A	F	E	F	B		A	F	

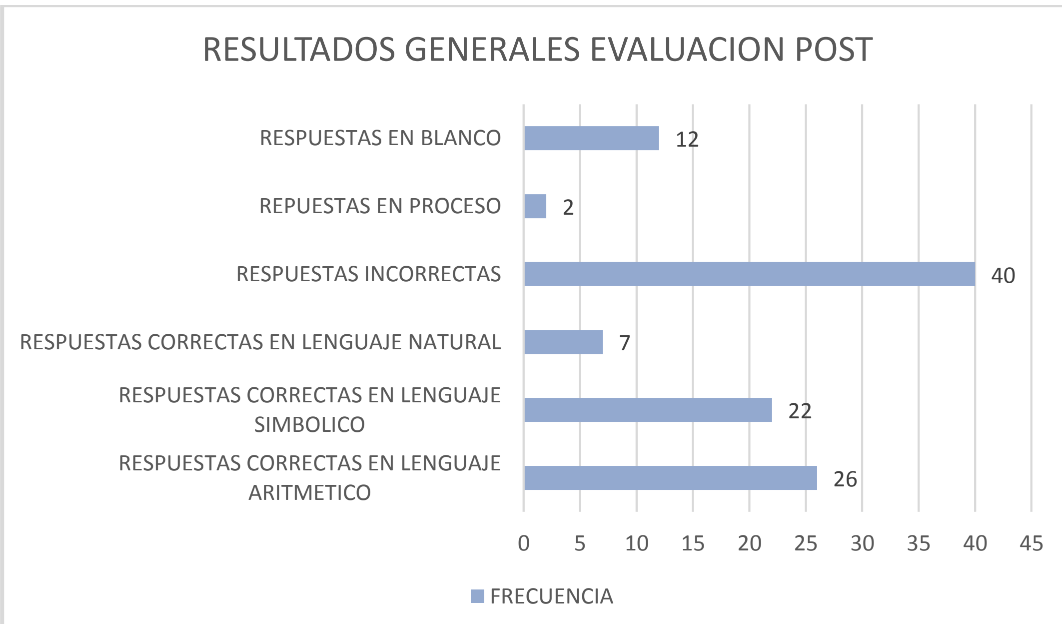


Figura 29: Resultados generales de la Evaluación Post

Tabla 24

Tabla de Frecuencias - Respuestas por estudiante en la evaluación Post

Pregunta	A	%	B	%	C	%	D	%	E	%	F	%
1	3	14%	3	14 %	1	4 %	15	68 %	0	0 %	0	0 %
2	1	5%	4	18 %	2	9 %	15	68 %	0	0 %	0	0 %
3	8	36 %	4	18 %	2	9 %	5	23 %	1	5 %	2	9 %
4	7	32 %	6	27 %	1	4 %	5	23 %	0	0 %	3	14 %
5	7	32 %	5	23 %	1	4 %	1	4 %	1	5 %	7	32 %

5.3.1 Análisis general. El presente análisis se realizó de manera comparativa con el análisis de la evaluación diagnostica. En los resultados obtenidos en la aplicación post se puede observar un incremento significativo en los porcentajes de respuestas correctas sin tener en cuenta el tipo. Mientras que en la aplicación Pre los aciertos y los desaciertos se presentaron en igual cantidad, en el post las respuestas acertadas estuvieron por encima de las erradas, con una diferencia de 15 puntos. Las respuestas en proceso pasaron de 5 a sólo 2 y las respuestas en blanco de 22 a tan sólo 12. Lo anterior evidencia un avance en el desarrollo de las habilidades que se potencializan con este tipo de pruebas. En el análisis comparativo que se hará a continuación, donde se tomaran los 4 mejores resultados de las pruebas y los 4 más bajos y se puntualizarán de manera más precisa los alcances y las dificultades observadas.

Tabla 25

Análisis comparativo Evaluación Pre y Evaluación Post

Estudiante	**1**		**2**		**3**		**4**		**22**		**23**		**25**		**26**	
PRUEBA	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**	**Pregunta**	**Tipo respuesta**
PRE (Evaluación Diagnóstica)	1	B	1	A	1	B	1	B	1	B	1	B	1	B	1	B
	2	C	2	A	2	A	2	A	2	B	2	A	2	A	2	D
	3	A	3	A	3	A	3	A	3	A	3	B	3	A	3	D
	4	B	4	A	4	B	4	A	4	B	4	B	4	B	4	D
	5	C	5	A	5	C	5	B	5	B	5	B	5	A	5	D
POST (Evaluación después de la situación)	1	B	1	A	1	A	1	D	1	D	1	D	1	D	1	A
	2	D	2	A	2	B	2	D	2	D	2	D	2	D	2	D
	3	A	3	A	3	B	3	A	3	D	3	D	3	A	3	A
	4	A	4	A	4	B	4	A	4	D	4	D	4	A	4	F
	5	A	5	A	5	B	5	A	5	F	5	B	5	A	5	F

5.3.2 Análisis comparativo por estudiante en las dos pruebas.

5.3.2.1 Estudiante 1. Este estudiante obtuvo en la prueba pre sólo 1 respuesta correcta, mientras en la prueba post obtuvo 4 respuestas correctas. Cabe anotar que a pesar de este gran avance, la sustentación de su respuesta presenta debilidades pues no interpreta el resultado de la división, toma el residuo como la información que debería suministrarle el cociente. Además confunde el termino multiplicar con dividir a pesar de que resuelve divisiones.

5.3.2.2 Estudiante 2. Esta estudiante ambas pruebas las realiza en su totalidad correctamente pues ya posee claridad sobre el concepto y el algoritmo para dividir. La única dificultad que presenta en para interpretar lo que representa el cociente y el residuo de la división que realiza para resolver la pregunta 5.

5.3.2.3 Estudiante 3. En la evaluación diagnóstica obtuvo sólo 2 respuestas correctas, mientras que en la evaluación post obtuvo todas las respuestas correctas. Este estudiante avanzó en la comprensión de los enunciados y en habilidades relacionadas con codificar y decodificar, pero no logró avanzar procesos de conversión, soluciona los problemas usando solamente el lenguaje natural y el simbólico.

5.3.2.4 Estudiante 4. Este estudiante no presenta diferencias en cuanto a la cantidad de preguntas acertadas, continúan en igual cantidad (3 correctas y 2 incorrectas). Lo significativo es que pasa de resolver en lenguaje simbólico a hacerlo en lenguaje aritmético pero con dificultades para interpretar correctamente los resultados de la operación. En las preguntas 4 y 5 responde solo una pregunta, la que se refiere al residuo o sobrante.

5.3.2.5 Estudiante 22. No obtiene respuestas correctas, a diferencia de la evaluación diagnostica en la cual obtuvo 1 sola respuesta correcta. Hace un intento por resolver usando el lenguaje grafico pero la alternativa propuesta no representa la información que proporciona el problema.

5.3.2.6 Estudiante 23. Utiliza gráficos para solucionar pero la argumentación no posee claridad ni conexión. Obtiene los mismos resultados 4 incorrectas y 1 respuesta correcta.

5.3.2.7 Estudiante 25. Obtiene nuevamente 3 respuestas correctas y e incorrectas. Traduce correctamente y en lenguaje aritmético, presenta dificultades al restar en la división.

5.3.2.8 Estudiante 26. Este estudiante nuevamente presenta repuestas en blanco, ahora sólo 2 y no 4 como en la primera evaluación, obtiene 2 respuestas correctas en lo cual avanza. Codifica y decodifica pero presenta confusión entre el significado del residuo y el del cociente.

5.3.3 Conclusiones de la los resultados de la Evaluación Post. Se evidencia avance en los procesos de codificar, decodificar y traducir. Son visibles las dificultades para comunicar su discurso en y con las matemáticas de forma escrita. Los estudiantes presentan debilidades en el nivel de complejidad reproducción que según García consiste en describir procesos y resultados algorítmicos sencillos de forma oral y escrita, generalmente conducentes a una única respuesta. (García Quiroga, Coronado, & Giraldo Ospina, 2015). Es perceptible la poca habilidad para realizar conexión entre los resultados de los procedimientos realizados y las respuestas que deben plantear, así mismo sustentarlos.

El lenguaje matemático fue un elemento complejo para algunos especialmente cuando se requería cambios de registros semióticos de representación (conversión).

Los estudiantes después de la situación didáctica desarrollada identifican con mayor facilidad las variables involucradas en un problema matemático, planteando alternativas de solución y ejecutando los procesos o algoritmos de cálculo requeridos, aunque en los procesos de reflexión sobre los resultados obtenidos evidencia confusión.

Conclusiones y recomendaciones

Este trabajo de investigación en el aula nos permitió evidenciar procesos que en la enseñanza de las matemáticas eran poco visibles para nosotras y que se convierten en pieza clave para la apropiación de los saberes. A partir de la aplicación de la situación didáctica 'Vamos a la meca' pudimos concluir lo siguiente:

1. La comprensión e interpretación de enunciados de problemas matemáticos, según García, Coronado, & Giraldo (2015) requiere de un conjunto de capacidades y habilidades que se ponen en juego al solucionarlos. Este proceso hace referencia a la competencia comunicar, la cual se movilizó dentro de la situación didáctica aplicada y permitió que los estudiantes consiguieran avances en la comprensión de los enunciados de problemas matemáticos. Lo anterior se pudo evidenciar por medio de los resultados que obtuvieron los estudiantes en la prueba Post con respecto a los de la evaluación diagnostica.

En la evaluación diagnóstica se percibió que gran parte del grupo presentó dificultades relacionadas con:

- Expresar en lenguaje aritmético enunciados verbales (codificar).
- Enunciar en lenguaje verbal expresiones del lenguaje aritmético (decodificar).
- Los procesos de comprender, reproducir y argumentar.

En la evaluación post se observó que la mayoría de los estudiantes lograron convertir del lenguaje natural al lenguaje aritmético, pasando por algún sistema de representación gráfico. Esto se puede comprobar mediante el análisis comparativo por estudiante en las dos pruebas. A partir de él y tomando como referentes a 8 estudiantes inicialmente escogidos para tal fin de acuerdo con su desempeño en la asignatura (los cuatro de mejor desempeño y los cuatro con desempeño inferior), se pueden identificar avances significativos no sólo en cuanto a respuestas correctas, sino en cuanto a la comprensión de los enunciados en lengua natural y a las habilidades relacionadas con decodificar y codificar. Es notable que los estudiantes ya realizan con mayor facilidad los cambios de registro de representación, aunque sus respuestas finales se vean afectadas con saberes previos como el de la sustracción.

2. Una de las dificultades asociadas a la resolución de problemas con estructuras multiplicativas es la metodología utilizada para la enseñanza de las matemáticas, donde por lo general los maestros comienzan por la presentación del algoritmo y finalmente abordan el concepto a través de situaciones ajenas al contexto escolar. La Teoría de las Situaciones Didácticas ha sido presentada como una solución a estas dificultades, es una estrategia metodológica eficaz para la enseñanza de las matemáticas donde la posibilidad del trabajo colaborativo contribuye a la interacción con el par, para que el estudiante movilice saberes que en el trabajo individualizado no podría hacer. La poca intervención del maestro lo lleva a fortalecer el planteamiento de una hipótesis que luego puede confirmar o refutar en la discusión con el equipo. La necesidad que presenta esta teoría de vincular situaciones contextualizadas facilita la comprensión de las mismas y su conversión a otros sistemas de representación.

La situación didáctica fue propuesta a partir de problemas de agrupamiento o sustracción repetida, que es uno de los tipos de problemas de división que plantea el MEN en los lineamientos matemáticos. Las tareas fueron desarrolladas en contextos familiares y reales para los estudiantes e incorporaron las expectativas de aprendizaje a corto plazo presentadas en la **Tabla 8**. El torneo "Vamos a la Meca" logró potenciar en los estudiantes el aprendizaje del concepto del objeto matemático división, dado que los estudiantes debieron leer el problema en lenguaje natural, a partir de trabajo con material manipulativo convertirlo a una representación tabular, y una vez culminada la situación de institucionalización, realizar nuevamente conversión a un registro gráfico bidimensional que fue diseñado durante la investigación y facilitó en los estudiantes la comprensión de la división como un proceso de sustracción repetida, teniendo en cuenta los tres factores de congruencia planteados por Raymond Duval, gracias a lo cual la mayoría de los alumnos lograron pasar por diferentes registros de representación de forma natural, para finalmente convertir esta representación gráfica en una respuesta en lenguaje natural.

3. La aplicación de la situación didáctica ‘Vamos a la meca’ confirma que contextualizar tareas a situaciones familiares y del agrado de los estudiantes permite desarrollar otros procesos a los que García y Coronado (2015) llaman afectivos y de tendencia de acción, los cuales se refieren a aquello que motiva al estudiante a querer desenvolverse matemáticamente y seguir intentando las veces que sea necesario para llegar a la solución de una tarea. Esto se evidenció en la solución de la tarea 4 que tenía un nivel de complejidad mayor. A pesar de esto los estudiantes probaron con diferentes números hasta lograr reconocer la necesidad de variar el divisor y fueron capaces de expresar una

nueva forma de repartir las canicas de modo que todos los participantes quedaran con la misma cantidad sin que sobrara ninguna.

Los niveles de complejidad creciente que poseen las tareas que conforman una situación didáctica desde la reproducción hasta la reflexión, permiten no solamente que los estudiantes resuelvan problemas matemáticos a través de un objeto matemático puntual, en este caso la división, sino también que logren transformaciones en los mismos y puedan escribir y leer con y en las matemáticas.

El mejor desempeño de los estudiantes en la evaluación post, como se puede ver en el apartado de análisis, confirma los planteamientos de Raymond Duval en su Teoría de las Representaciones Semióticas, en cuanto a que las conversiones que tuvieron que realizar al utilizar el sistema de representación bidimensional diseñado para esta situación didáctica, potenciaron su aprendizaje.

De acuerdo con las conclusiones anteriores, a manera de recomendaciones se presenta lo siguiente:

Al orientar los procesos de enseñanza de las matemáticas, es fundamental que el docente tenga plena conciencia de la importancia de incluir los cambios de representaciones en sus prácticas de aula cotidianas con estudiantes desde temprana edad. Además, la apropiación del lenguaje matemático por parte de los estudiantes puede llegar a ser un medio para mejorar su desempeño en las pruebas externas en esta área, al conseguir realizar tratamiento y/o conversión de un objeto matemático dentro de los diferentes registros semióticos.

Un docente a través de todos los años de experiencia tiene la oportunidad de replantear su práctica pedagógica. Cada grado, cada grupo, cada estudiante, es un reto que implica repensar las metodologías, estrategias y recursos que harán parte de su quehacer diario. Las investigaciones de intervención en el aula como la presente pueden considerarse una de las formas de mayor impacto en los procesos de reflexión escolar.

Todo lo anterior sugiere un plan de mejoramiento intensivo y prioritario para mejorar los resultados de los estudiantes y poder tener cada vez menos estudiantes en el nivel mínimo, ya que en este momento es el nivel de desempeño con mayor porcentaje, especialmente en el grado quinto.

Bibliografía

Bordas, M. I., & Cabrera, F. (17 de 5 de 2017). *Estrategias de evaluación de los aprendizajes centrados en el proceso*. Obtenido de Educrea: https://educrea.cl/estrategias-de-evaluacion-de-los-aprendizajes-centrados-en-el-proceso/

Bosch, M. A., Castro, E., & Segovia, I. (2007). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles: una investigación en curso. *Representaciones y resolución de problemas en educación matemática, 1*(4), 179-190.

D'Amore, B. (ENE-MAR de 2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. *Uno : Revista de Didáctica de las Matemáticas, X* (35), 90-106.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*.

Díaz Barriga, F., & Hernández Rojas, G. (2004). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo - Una interpretación constructivista* (Segunda ed.). México: McGraw Hill Interamericana.

Echeverry Materón, H. A. (2013). *ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS QUE PROMUEVEN EL APRENDIZAJE DE LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.* Palmira: Universidad Nacional de Colombia.

García Quiroga, B., Coronado, A., & Giraldo Ospina, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas.* Florencia: Universidad de la Amazonía.

García Quiroga, B., Coronado, A., & Giraldo Ospina, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas.* Florencia: Universidad de la Amazonía.

García Quiroga, B., Coronado, A., Montealegre Quintana, L., Giraldo Ospina, A., Tovar Piza, B. A., Morales Parra, S., & Cortés, J. D. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje.* Florencia: Artes Gráficas del Valle S.A.S.

García, C. F. (2014). *LENGUAJE Y COMUNICACIÓN EN MATEMÁTICAS* . Medellín: Universidad Nacional de Medellín.

García, S. (2010). *Problemas de Estructura Multiplicativa.*

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Guzmán Serna, M. (2010). *Diseño de un modelo de para la evaluación de las competencias comunicativa, tecnológica e investigativa, en la modalidad de educación virtual de la Institución Universitaria Politécnico Gran Colombiano.*

ICFES. (2016). *Informe Nacional Saber 3°, 5° y 9°. Resultados nacionales.* Bogotá: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) .

ICFES. (2017). *Informe Nacional.* Bogotá: Mineducación.

Mcleod , D., & Adams, V. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* New Cork: Springer-Verlag. Eds. 1989.

MEN. (1994). *Lineamientos en Matemáticas.* MEN.

MEN. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas* . Santa Fe de Bogotá.

MEN. (2006). *EStándares básicos de competencias.* Santafe de Bogotá, Colombia: Ministerio Nacional de Educación.

MEN. (2011). *Nivelemos matemáticas 3 - Guía del docente.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mora Castor, D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía, 24*(70), 181-272.

Oviedo, L. M., & Kanashiro, A. M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria 13*, 29-36.

Perrenoud. (2011). *Revista de Docencia Universitaria*.

PISA. (2003). *Aprender para el mundo del mañana.* Madrid: Santillana.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Pozo, J., & Carles, M. (2001). El aprendizaje estratégico. *Docencia universitaria, II*(2).

Qualding, D. A. (1982). La importancia de las matemáticas en la enseñanza. *Revista trimestral de educación, XII*(4), 449.

Riera de Montero, E. (13 de enero de 2018). *http://servicio.cid.uc.edu.ve/educacion/revista/a4n23/23-11.pdf*. Obtenido de http://servicio.cid.uc.edu.ve/educacion/revista/a4n23/23-11.pdf

Tobón. (2006). *Resolver problemas con base en el lenguaje y procedimientos de la matemática.*

UNESCO. (2009). *Aportes para la enseñanza de la Matemática.* Santiago de Chile: Salesianos Impresores S.A.

Villota, J. L. (2014). *División, errores y soluciones metodológicas.* Pasto: Universidad de Nariño.

Anexos

Situación didáctica aplicada: “Vamos a la meca”.

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________________ ___________________________________

______________________________ ___________________________________

____

Fecha: ______________________________ **Grado:** ____________________

TAREA 1

En la escuela se desarrollará el torneo “Vamos a la Meca”.

Para jugar se debe hacer un agujero en el suelo llamado MECA. Cada niño, respetando el turno, tirará una de sus bolas intentando que entre en la meca.

El jugador que consiga introducir la bola se queda con las canicas que estén por fuera del círculo rojo que está pintado en el suelo.

Los jugadores también podrán alejar las bolas de sus rivales tirando contra ellas.

Para poder comenzar a jugar el torneo se debe resolver la siguiente situación para saber con cuántas bolas comienza cada niño:

Si tenemos 28 bolas para repartir entre cinco participantes del juego “VAMOS A LA MECA”, de manera que a cada uno de ellos le corresponda la misma cantidad ¿Cuántas bolas se le deben entregar a cada participante?

RESPUESTA *(Escriban la respuesta y realicen un dibujo que ayude a explicarla.)*	¿CÓMO LO HICE? *(Expliquen con sus palabras cómo encontraron la respuesta.)*

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________________ ___________________________________

______________________________ ___________________________________

____

Fecha: _______________________________ **Grado:** ____________________

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________________ ____________________________________

______________________________ ____________________________________

____

Fecha: _______________________________ **Grado:** ____________________

TAREA 2

Registren en la siguiente tabla los cambios que se presentaron al repartir las 28 bolas entre los cinco participantes.

Completen la tabla con los cambios que ocurren en cada reparto que hacen. Tengan en cuenta el ejemplo y las explicaciones que hay en cada columna.

Recuerden que son 28 bolas para repartir entre 5 participantes. Y que cada jugador debe quedar con igual número de bolas.

NÚMERO DEL REPARTO. (Escriban aquí el número del reparto que van a hacer así: primer reparto, segundo reparto,…etc.)	**NÚMERO DE BOLAS A REPARTIR.** (Cuenten las bolas que tienen antes de repartir y escriban aquí el número).	**NÚMERO DE BOLAS REPARTIDAS.** (Escriban cuántas bolas repartieron entre todos los participantes).	**BOLAS RESTANTES.** (Cuenten las bolas que les quedaron después de repartir y escriban el número aquí).
Primer reparto	28 bolas	5 bolas	23
Segundo reparto			

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________________ ___________________________________

______________________________ ___________________________________

____

Fecha: ______________________________ **Grado:** ____________________

Respondan las siguientes preguntas:

1) Después de repartir las bolas a cada niño en partes iguales ¿sobraron bolas? (maquen la respuesta con una X) SI ____ NO ____

2) Si la respuesta fue SI ¿creen que estas bolas que sobraron se pueden volver a repartir a los cinco participantes en partes iguales? (maquen la respuesta con una X)
SI ____ NO ____

¿Por qué? ____

____

3) ¿Qué operación matemática utilizaron para rellenar la tabla?

____

____

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________________ ____________________________________

______________________________ ____________________________________

____

Fecha: _______________________________ **Grado:** ____________________

TAREA 3

1. Cuéntenle a sus compañeros cómo hicieron para rellenar la tabla de la tarea 2.
2. Compartan con sus compañeros las respuestas de la tarea 2.
3. ¿Qué diferencias encuentran entre sus respuestas y las de sus compañeros?

____

____

____

____

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________________ ____________________________________
______________________________ ____________________________________
____

Fecha: ______________________________ **Grado:** ____________________

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________ ______________________

______________________ ______________________

____

Fecha: ______________________ **Grado:** ______________

TAREA 4

1. ¡Nos hemos dado cuenta que después de la repartición han sobrado tres bolas!

¿Cuántos participantes debería haber en el torneo para que a cada uno le corresponda la misma cantidad de bolas y que no sobre ninguna?

____

____

____

____

2. ¿Puede haber diferentes números de participantes? (Marquen la respuesta con X)

SI ________ NO __________

3. Expliquen a los compañeros por qué llegaron a esa conclusión.

Vamos a la Meca

Nombres: ______________________ ______________________
______________________ ______________________
____

Fecha: ______________________ **Grado:** ______________

TAREA 5

Como ya hemos escuchado a los otros grupos, ahora reflexionemos:

¿Qué tienen en común las cantidades de participantes propuestas en la situación anterior?
Revisen todo lo que pasó anteriormente y saquen una conclusión.

____

____

____

____

____

____