SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y LA METODOLOGÍA PAVOC PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON ESTRUCTURAS ADITIVAS

PHANOR HELÍ PIEDRAHITA TOBAR

HEYDER FRANCISCO AMÚ MOSQUERA

UNIVERSIDAD ICESI.

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN.

SANTIAGO DE CALI

2017

SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y LA METODOLOGÍA PAVOC PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON ESTRUCTURAS ADITIVAS

PHANOR HELI PIEDRAHITA TOBAR

HEYDER FRANCISCO AMÚ MOSQUERA

DOCENTE DIRECTOR DE TESIS:

MGR. PAOLA ORTIZ ORDÓÑEZ

DOCENTE EVALUADOR:

MGR. BERNARDO GARCÍA QUIROGA

UNIVERSIDAD ICESI.

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN.

SANTIAGO DE CALI

2017

AGRADECIMIENTOS

Le agradecemos a Dios por habernos acompañado y guiado a lo largo de la maestría, por ser nuestra fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarnos una vida llena de aprendizajes, innovaciones y sobre todo felicidad.

Gracias a nuestras esposas por su apoyo en todo momento, por la comprensión en este tiempo tan importante de nuestras vidas, por su amor incondicional pero sobre todo por sus oraciones para que todo fuera un éxito.

Gracias a nuestros hijos por su compresión ya que dejamos de dedicarles mucho tiempo y dedicación para estar más concentrados en nuestro estudio.

Gracias a nuestros padres por su amor, consejos y apoyo en todo momento para continuar con las metas propuestas.

Gracias a nuestros hermanos porque siempre están fortaleciéndonos con sus palabras y apoyo.

Gracias a nuestra directora de tesis Paola Ortiz Ordóñez, por su dedicación, por su tiempo, por sus palabras de ánimo, por su metodología para asesorar tan efectiva y por la tolerancia.

Gracias los docentes que orientaron cada uno de los seminarios durante la maestría, por sus enseñanzas, consejos y dedicación.

Gracias a los compañeros de la maestría, por sus enseñanzas, colaboración, por el compartir de cada sesión y por su amistad.

Gracias a todas las personas de la universidad Icesi, por su atención y amabilidad en todo lo relacionado a nuestras vidas como alumnos de maestría.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

INTRODUCCIÓN

La situación actual de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, respecto a los resultados en el área de matemáticas, debe llevar a recapacitar acerca de la importancia y fundamentos de los estudios sobre la solución de problemas matemáticos, su trascendencia a nivel institucional, nacional e internacional. El mejoramiento de los estudiantes en esta competencia requiere de una serie de acciones pedagógicas y curriculares dentro y fuera del aula, las cuales deben centrar sus esfuerzos en la implementación de un plan de mejoramiento, liderado por un equipo de trabajo que, usando los parámetros proporcionados por esta propuesta educativa, pueda evaluar sus resultados y dar vía a su institucionalización para obtener mejores resultados en el contexto matemático.

El objetivo de este trabajo es el de promover la aplicación de una secuencia didáctica basada en la teoría de las situaciones didácticas y la metodología PAVOC, como recurso metodológico que favorezca el desarrollo de habilidades, para la resolución de problemas que involucran dos operaciones matemáticas básicas: suma y resta, en estudiantes de 5° grado de primaria. Para lograrlo, se presentan una serie de elementos de tipo teórico y práctico que han permitido la estructuración de un procedimiento que genera el fortalecimiento y desarrollo de las habilidades para resolver problemas de estructura aditiva en los estudiantes y ser más competentes.

La determinación del empleo de secuencias didácticas y metodologías que aproximen al estudiante al entendimiento y desarrollo de estrategias novedosas en resolución de problemas, genera un punto de partida hacia el mejoramiento en este componente y los otros que se desarrollan en la competencia matemática. Así mismo, vale la pena reflexionar acerca de las dificultades en los niños para la resolución de problemas matemáticos, reconociendo en estos, una situación compleja, la cual implica habilidades metacognitivas por parte del profesor y del estudiante para lograr comprenderlos y solucionarlos. Es en este aspecto donde la propuesta de estudio, presenta al docente información teórica y práctica aplicable a su contexto escolar, sirviendo de guía para la construcción de secuencias didácticas matemáticas usando un ordenamiento de la competencia por componentes, por procesos matemáticos asociados, establecer su perspectiva didáctica, las expectativas de aprendizaje a corto y largo plazo y su perspectiva curricular. Como lo resume García et al (2015)

Esta forma de organización permite a la institución y su grupo de docentes, planificar no solo secuencias matemáticas, sino, planificar el desarrollo completo del área a lo largo del año escolar. A su vez, permite al profesor planificar su propio curso de matemáticas en los diferentes grados que orienta y en los periodos particulares. (pág. 45)

Se debe agregar que, se requiere también de una enseñanza explícita de las estrategias por medio del modelamiento del profesor y luego la decisión profesional y personal de “intensionar” el uso de una de ellas, de acuerdo al contexto en que se encuentre el profesor y las características de sus alumnos. Pero más allá de este hecho, es necesario ser consciente que la resolución de problemas es una tarea que no debe “naturalizarse” y presentarla a los estudiantes sin más, ya que estas situaciones lo que representan es una matematización de la vida real, por lo cual, muchas veces estos problemas no involucran emocionalmente al estudiante. Como afirma Angulo, E., y Solano, J (2013)

> compartir intenciones de aprendizaje puede convertirse en una oportunidad para la realización de acciones y, al mismo tiempo, puede permitir que las estudiantes encuentren significado a su proceso educativo como una experiencia compartida y no sólo individual; es decir, es posible la construcción de nuevas formas de interpretar el proceso de aprendizaje como un proceso colectivo. (Pág. 97)

El proceso propuesto en este trabajo hace aportes valiosos al docente para entendimiento de la forma como se enseñan las matemáticas para la comprensión de los estudiantes, lo cual se verá reflejado en las pruebas SABER, los análisis del ISCE y la calidad de la educación institucional. Por otro lado, se desarrollan procesos curriculares y pedagógicos que redundan en una enseñanza de calidad, lo cual proporciona al maestro, una guía que le permite trabajar con los estudiantes con miras a salvar sus deficiencias en la asignatura y en el área, específicamente los componentes de resolución y numéricos. Para lograr esta meta, la investigación se estructura en tres capítulos: el primero, explica cuáles son los fundamentos de la propuesta de investigación tales como presentación del problema, sus referentes teniendo en cuenta los desempeños de los estudiantes, recoge los antecedentes de investigaciones a nivel nacional e internacional sobre resolución de problemas de estructura aditiva y recoge los antecedentes legislativos que le dan soporte a las estructuras aditivas y resolución de problemas. El segundo capítulo, se enfoca en la perspectiva curricular para el aprendizaje de las estructuras aditivas básica primaria, su organización, las bases teóricas y científicas, la resolución de problemas matemáticos y su importancia, las operaciones básicas matemáticas: suma y resta, los tipos de problemas aditivos y su resolución, los procesos específicos de los problemas con estructura aditiva, los sistemas de representación semiótica, la fenomenología del objeto matemático, el pensamiento numérico y sistemas numéricos, la perspectiva didáctica, las expectativas de aprendizaje, las tareas matemáticas y su enfoque desde las teorías de las Situaciones Didácticas y la Metodología PAVOC. El tercer capítulo, es la propuesta de aplicación de la secuencia didáctica que une la teoría de las situaciones didácticas y la metodología PAVOC.

Se debe reconocer que el trabajo realizado es un esquema teórico-práctico novedoso y aplicado a la resolución de problemas, su diseño parte de Gay Brousseau y Puig- Cerdán, reconocidos pedagogos cuyos estudios y propuestas tienen vigencia actual y son de gran aplicabilidad en la didáctica moderna, los cuales, se puede hacer extensivos a otros componentes y competencias de la matemática. También están abiertos a la crítica y se pueden adaptar al contexto escolar del estudiante, como es el caso de la tesis propuesta. Solo se necesita la dinámica del docente y su interés por innovar.

La propuesta tiene en cuenta también los planes de acción y acompañamiento, se diseñó con aportes valiosos del programa “Todos a Aprender”, el cual se caracteriza por el enfoque novedoso que aporta a los docentes para el cambio en la enseñanza del conocimiento matemático. Hay que mencionar además, que los procesos educativos del área, el ambiente escolar y la metodología de trabajo se ven beneficiados con esta propuesta, al brindar una estructura de orden en la planeación escolar, desde su análisis contextual, diseño metodológico, implementación en el aula y evaluación de los resultados obtenidos. Elementos claves en el desarrollo de un modelo institucional matemático basado en la competencia de resolución de problemas, del cual carece la institución. Como asevera Zocco:

> "la resolución de problemas es una competencia fundamental que los alumnos deben adquirir en la escuela; es necesario prepararlos para la aplicación de conocimientos y habilidades matemáticas aprendidas, en situaciones reales del mundo. A su vez, es indispensable favorecer la construcción de aprendizajes significativos anclándolos en situaciones experienciales de los alumnos" (2006:147).

En conclusión, la propuesta de investigación o secuencia didáctica que aquí se propone, va a beneficiar a los diversos grupos que interactúan en el proceso educativo: en primer lugar a los estudiantes, ya que la estrategia se fundamenta en su quehacer y la forma en que se aprenden las matemáticas, en segundo lugar, a los profesores, ya que proporciona un modelo novedoso, flexible y adaptable a la enseñanza del conocimiento matemático en resolución de problemas. En tercer lugar, se encuentra la institución, la cual va a mejorar sus resultados en pruebas estatales, posicionando la calidad de su enseñanza y liderando los procesos educativos de la zona. Por último, la entidad territorial se beneficia con los resultados obtenidos por la institución, ya que esto le permite presentar resultados ante organismos nacionales e internacionales, todo en la búsqueda de aportar para que Colombia llegue a ser, la más educada; meta propuesta por el MEN[1] para el año 2015.

---

[1] Para efectos dela presenta investigación, se usa la sigla MEN para designar: Ministerio de Educación Nacional.

CAPÍTULO 1

1. FUNDAMENTOS DE LA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN: SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DOS OPERACIONES BÁSICAS, SUMA Y RESTA

1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El aprendizaje de las matemáticas supone, junto a la lectura y la escritura, uno de los aprendizajes fundamentales de la educación elemental. Uno de los principales problemas asociados a las dificultades en las matemáticas, observados por los docentes en los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, es la solución de problemas que involucran dos operaciones básicas matemáticas. Para algunos autores e investigadores, entre ellos Orrantia (2006, pág. 18) "las causas de estos problemas obedecen a dos factores principales: la no comprensión de la situación problémica o la falta de conocimientos conceptuales para resolver problemas". También se destacan opiniones diversas de expertos en el estudio de esta problemática, como Vergnaud (2003, pág. 36), quien se refiere a factores como la metodología escolar, la formación docente, el contexto familiar, social, las directrices gubernamentales, la motivación, dificultades de atención y concentración; causas asociadas al bajo desempeño de los niños en el área de las matemáticas, lo cual hace cada vez más difícil la obtención de buenos resultados en el área.

Todos estos elementos hacen que reconozcamos que existe en la institución dificultades en el desarrollo de la capacidad para que los niños puedan crear soluciones posibles a problemas matemáticos, las cuales pueden ser aprendidas con mayor éxito cuando se comparte e interactúa con docentes, padres de familia y otros niños. Esto lleva a la importancia de construir estrategias que promuevan la práctica de las capacidades para la solución de problemas y lleven a los niños hacia a una confianza en sí mismos y ayudar a que se perciban como personas capaces de resolver problemas. Lo anterior hace que formulemos la siguiente pregunta problema: ¿Cuáles son los elementos a tener en cuenta para generar una secuencia didáctica basada en la teoría de las situaciones didácticas y la metodología: Problemas Aritméticos con Varias Operaciones Combinadas (PAVOC), como recursos metodológicos que favorezcan el desarrollo de habilidades en la solución de problemas que involucran dos operaciones matemáticas básicas: suma y resta, en estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo?

1.2. PRECEDENTES DEL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO EN LOS ÚLTIMOS AÑOS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

En la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, específicamente en el área de matemáticas, los resultados son mínimos[2] y se evidencian en el transcurso del año escolar con la pérdida masiva

[2] Para efectos de la presente investigación, cuando se habla del nivel de desempeño en que se encuentran los estudiantes, se usan los términos con los cuales la prueba describe los resultados.

del área, en Colombia, este problema se refleja en las pruebas nacionales como la SABER y la interpretación que el ISCE hace de la misma, aplicada a niños en los grados 3º, 5º y 9º de educación básica. En educación media, se observa que se mantienen en este mismo nivel los resultados mínimos en la prueba SABER aplicada a estudiantes de grado 11° (ver tabla 1). Todo esto, hace necesario que le demos una mirada a las dos herramientas básicas con la que la institución educativa cuenta para determinar los avances de los desempeños en las competencias básicas en matemáticas y de esta manera orientar esfuerzos para alcanzar las metas propuestas para cada año; es decir, mejorar las habilidades para que eleven su desempeño y esto se vea reflejado en los resultados de las pruebas SABER.

Para este trabajo se realizó un estudio comparativo de los tres últimos resultados de la prueba SABER: 2013, 2015 y 2016. Al revisar estos resultados institucionales a través del ISCE, se pueden identificar dificultades en los estudiantes para la resolución de problemas matemáticos y vemos que los avances son mínimos. Como se observa a continuación:

Tabla 1.Comparación de los niveles de desempeño institucional de los estudiantes grado 11° prueba SABER: 2013,2015 y 2016[3]

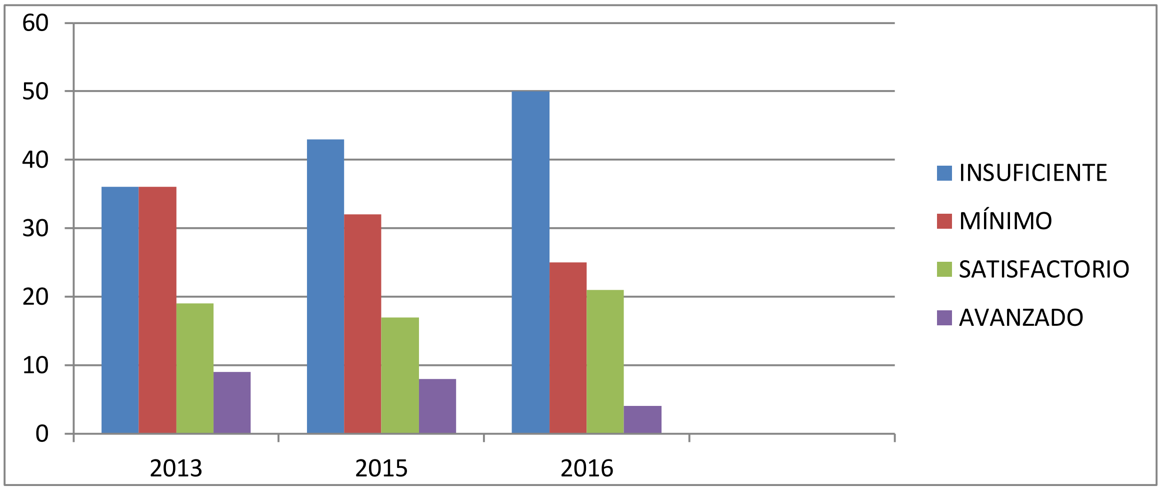
AÑO	INSUFICIENTE	MÍNIMO	SATISFACTORIO	AVANZADO
2016	50%	25%	21%	4%
2015	43%	32%	17%	8%
2013	36%	36%	19%	9%

Fuente: Los datos son tomados de los resultados de la prueba Saber 2014 a 2016 publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

Al observar la tabla 1 de comparación de los desempeños, se contempla como los porcentajes en nivel avanzado disminuyen progresivamente, pasando de 9% en 2013 a 4% en 2016; por otro lado el nivel mínimo bajó de 36% a 25% en los mismos años. En este estudio también, podemos observar que el porcentaje de estudiantes en insuficiente ha aumentado, pasando de un 36% en 2013 a un 43% en el 2015. Posteriormente en el 2016 se vuelve a incrementar llegando a un 50%. Así mismo los resultados en el nivel mínimo DISMINUYE, lo cual corrobora las falencias en el área de matemáticas. Una visualización gráfica de la tabla 1, es la que a continuación se observa:

[3] Las tablas 1 al 4 son diseño propio de los investigadores utilizando los datos aportados por las fuentes que se mencionan.

Figura 1.Gráfica comparativa de los resultados institucionales de los estudiantes de grado 11° en la prueba SABER 2013, 2015 y 2016[4]



Fuente: Los datos son tomados de los resultados de la prueba Saber 2014 a 2017publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

Así mismo, la lectura que presenta el ISCE respecto al desempeño, progreso, eficiencia y ambiente para los años 2015, 2016 y 2017, indican que estamos progresando pero a un ritmo muy bajo. Esto se evidencia en la siguiente Tabla 2.

[4] Las gráficas 1 y 2 son diseño propio de los investigadores utilizando los datos aportados por las fuentes que se mencionan.

Tabla 2.Índice sintético de calidad educativa ISCE 2016 y 2017.

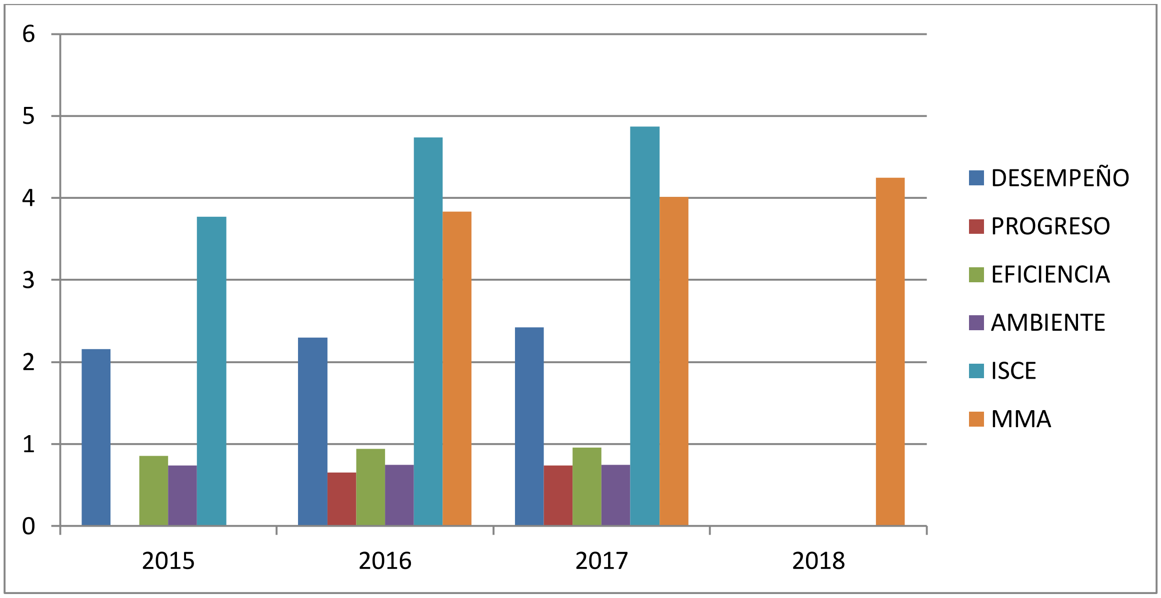
AÑO	DESEMPEÑO	PROGRESO	EFICIENCIA	AMBIENTE	ISCE	MMA
2018						4,25
2017	2,42	0,74	0,96	0,75	4,87	4,01
2016	2,30	0,65	0,94	0,75	4,74	3,83
2015	2,16	0,01	0,86	0,74	3,77	

Fuente: Los datos son tomados de la interpretación que hace el ICSE a los resultados de la prueba Saber 2015 a 2017 publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

Por ejemplo, el porcentaje de crecimiento entre 2015 y 2017 es de 1,1%, alcanzando un total de 4,87 % en 2017. También existen avances en la Meta de Mejoramiento Anual (MMA), pasando de un 3,83% en 2015 a un 4,25% en 2017. Es necesario aclarar que la evaluación que realiza el ISCE en las instituciones educativas del país, usa como referente los resultados de la prueba SABER, pero a estos, se suman otros componentes como: progreso, desempeño, eficiencia y ambiente escolar. Son estos componentes los que conforman el puntaje obtenido en el estudio[5]. En la gráfica 2, se visualiza la forma como han variado los porcentajes respecto a desempeño, progreso, eficiencia y ambiente presentados en la Tabla 2. Gráfica 2: Comparación índice sintético de calidad ISCE 2016. Elaboración propia

[5] Para mayor conocimiento e interpretación precisa de los datos, se pude consultar el documento: Metodología del Cálculo del ICSE que para esto ha publicado el ICFES. Disponible en www.icfesinterctivo.com

Figura 2. Gráfica de los porcentajes respecto a desempeño, progreso, eficiencia y ambiente 2015-2017



Fuente: Los datos son tomados de los resultados de la prueba Saber 2015 a 2017 publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

Con respecto a los aspectos comparativos del establecimiento-municipio-país y establecimiento-otros establecimientos del sector y la zona, vemos que la Institución es superada en el desempeño de la prueba. Por ejemplo, en 2016 el nivel de insuficiencia de los estudiantes pasó de un 43% a 50%, es decir, el porcentaje de estudiantes que no superaron la prueba creció un 7%. Respecto al municipio y país, el aumento fue menor: solo 2% para Cali y 0% para Colombia, manteniéndose en un 36% respecto a los estudiantes que obtuvieron desempeño insuficiente.

Tabla 3.Comparación de resultados del establecimiento educativo frente al municipio y el país.

AÑO	ENTE CERTIFICADO	PORCENTAJES			
		INSUFICIENTE	MÍNIMO	SATISTACTOTIO	AVANZADO
2016	ESTABLECIMIENTO	50%	25%	21%	4%
	CALI	33%	31%	21%	15%
	COLOMBIA	36%	29%	21%	14%
2015	ESTABLECIMIENTO	43%	32%	17%	8%
	CALI	31%	33%	24%	13%
	COLOMBIA	36%	30%	21%	13%
2013	ESTABLECIMIENTO	36%	36%	19%	9%
	CALI	31%	33%	23%	13%
	COLOMBIA	37%	30%	20%	13%

Fuente: Los datos son tomados de la interpretación que hace el ICSE a los resultados de la prueba Saber 2013, 2015 y 2016 publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

De igual manera, al establecer una comparación de los resultados institucionales y las entidades oficiales y privadas del sector, encontramos que se está por debajo de éstas. Por ejemplo, al revisar el porcentaje de insuficiencias para 2016, en el establecimiento pasa de 43% a 50%, es decir aumentó un 7%. Si se observa, los establecimientos oficiales urbanos y privados, tienen menor aumento de insuficiencias; solamente los establecimientos oficiales rurales están por debajo del resultado institucional.

Tabla 4.Comparación de los resultados obtenidos por la institución frente a otros establecimientos del sector y zona.

AÑO	CATEGORÍA	ESTABLECIMIENTO	CALI OFICICIAL URBANO	CALI OFICIAL RURAL	CALI PRIVADOS
2016	INSUFICIENTE	50%	37%	42%	27%
	MÍNIMO	25%	34%	33%	27%
	SATISFACTORIO	21%	20%	17%	23%
	AVANZADO	4%	9%	9%	23%
2015	INSUFICIENTE	43%	32%	34%	28%
	MÍNIMO	32%	35%	35%	31%
	SATISFACTORIO	17%	24%	22%	24%
	AVANZADO	8%	10%	9%	18%
2013	INSUFICIENTE	36%	36%	19%	9%
	MÍNIMO	33%	34%	22%	11%
	SATISFACTORIO	38%	32%	22%	8%
	AVANZADO	28%	31%	25%	17%

Fuente: Los datos son tomados de la interpretación que hace el ICSE a los resultados de la prueba Saber 2013, 2015 y 2016 publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

Igualmente, al revisar el estudio de la prueba SABER 2016, el ISCE explica que los estudiantes de quinto presentan dificultades en la competencia plantear y resolver problemas. En lo que respecta al indicador: resolver problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación e igualación; los niños de quinto no interpretan condiciones necesarias para su solución. En 2015, el porcentaje era del 51% en el nivel mínimo, en el 2016 el porcentaje aumentó al 53%.

En los tres aspectos que resume el documento encontramos lo siguiente:

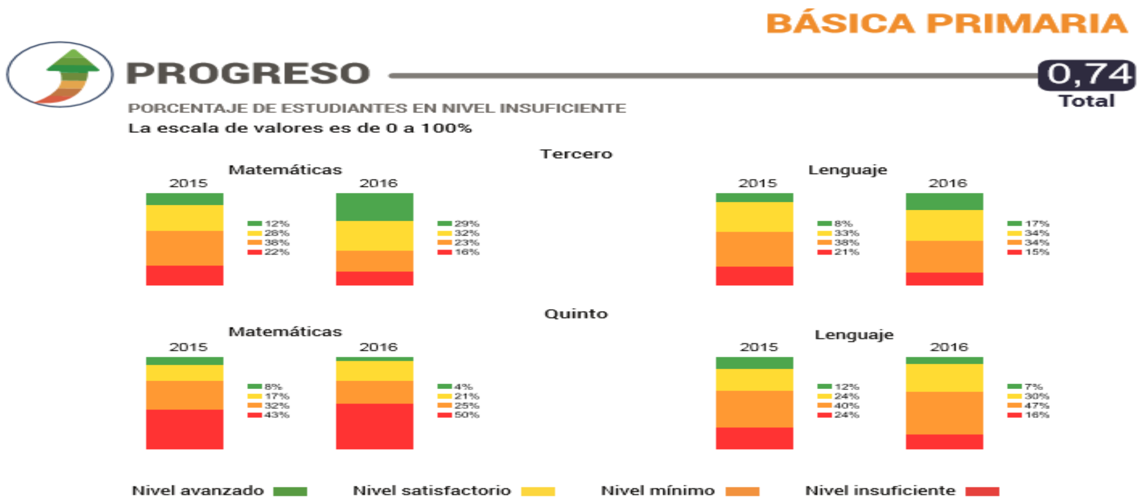
PROGRESO: el porcentaje de estudiantes en nivel insuficiente, en una escala de valores de 0 a 100% pasó de un 43% en el 2015 a un 50% en el 2016.

DESEMPEÑO: en una escala de valores de 100 a 500, siendo 500 el puntaje promedio más alto posible, obtuvimos un total de 282 puntos, un poco por encima de la media total.

Tabla 5.Estudio hecho por el ISCE para la prueba saber 2017 en básica primaria.

Año	Desempeño	Progreso	Eficiencia	Ambiente	ISCE	MMA
2018						4,25
2017	2,42	0,74	0,96	0,75	4,87	4,01
2016	2,30	0,65	0,94	0,75	4,64	3,83
2015	2,16	0,01	0,86	0,74	3,77	

BÁSICA PRIMARIA



Fuente: Los datos son tomados de la interpretación que hace el ICSE a los resultados de la prueba Saber 2015 y 2016 publicados por el ICFES. Fecha de consulta: (2017:10:11). Disponible a través de www.icfesinterctivo.com

Hay que mencionar, además, que según la interpretación hecha por el ISCE para las pruebas SABER de los dos últimos años, una de las competencias donde prevalecen debilidades en los estudiantes es en la resolución de problemas.

Tabla 6.Estudio hecho por el ISCE para la prueba saber del año 2016.

Descripción general de la competencia		
PRUEBA: Matemáticas COMPETENCIA: Resolución		
Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
55%	48%	51%
Interpretación: El 55% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia Resolución en la prueba de Matemáticas.		

Descripción general de los aprendizajes		
Color	Nivel de desempeño alcanzado	Porcentaje (%)
Rojo	Insuficiente	25
Naranja	Mínimo	63
Amarillo	Satisfactorio	13
Verde	Avanzado	0
Interpretación: De los aprendizajes evaluados en la competencia Resolución, su Establecimiento educativo tiene el 25% de aprendizajes en rojo, el 63% en naranja, el 13% en amarillo y 0% en verde.		

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en las que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo las que están en amarillo y verde.

Aprendizajes

El 76% (rojo) de los estudiantes no utiliza relaciones ni propiedades geométricas para resolver problemas de medición.
El 72% (rojo) de los estudiantes no resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones.
El 60% (naranja) de los estudiantes no usa representaciones geométricas ni establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.
El 55% (naranja) de los estudiantes no resuelve ni formula problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.
El 53% (naranja) de los estudiantes no resuelve problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación, e igualación ni interpreta condiciones necesarias para su solución.
El 47% (naranja) de los estudiantes no resuelve ni formula problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adición repetida, factor múltiplicante, razón y producto cartesiano.
El 46% (naranja) de los estudiantes no resuelve problemas que requieren encontrar y/o dar significado a la medida de tendencia central de un conjunto de datos.
El 36% (amarillo) de los estudiantes no resuelve ni formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.
Interpretación: El 76% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

Fuente: tabla adaptada de los resultados publicados por el ISCE sobre la prueba saber 2016. Fecha de consulta: (2017:10:12). Disponible a través de www.icfesinteractivo.com

A nivel internacional las dificultades se hacen aún más evidentes, ya que no se logra superar la media establecida por la UNESCO y su Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), para las pruebas PISA, lo que no le permite al país avanzar y llegar a formar parte de la OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, de la cual el gobierno actual quiere hacer parte[6]. De igual forma en estudios internacionales sobre logros académicos en matemáticas y ciencias TIMSS, los estudiantes colombianos de más alto rendimiento obtuvieron puntajes por debajo del promedio internacional especialmente en matemáticas y apenas se acercan a los puntajes inferiores de los niños de Corea y Singapur. El resultado de la prueba para 2015 dejó en evidencia una dicotomía en sus resultados:

> Los estudiantes colombianos lograron en conjunto una puntuación de 390 frente a los 423 de Chile y los 408 de México. Se superó el puntaje de Brasil con 377 y se igualó a Perú, Líbano e Indonesia. Frente a estos datos positivos, la OCDE alerta que el 66 % de los estudiantes de Colombia no alcanzan los objetivos mínimos en esta materia, frente al 23 % del resto de estados miembros que tampoco lo logra.
>
> Las pruebas PISA son el termómetro mundial más importante para evaluar la educación. Se realizan cada tres años. En la última edición, la de 2015, se presentaron estudiantes de 70 países de todo el mundo. Colombia aportó a la muestra internacional 13.718 estudiantes de 380 colegios de todo el país, 258 oficiales y 122 privados.
>
> Colombia pasó de tener 376 a 390 puntos, y ascendió una posición. Al igual que en lectura, superamos a los mismos países con excepción de México que se unió a Chile,

[6] Como se evidencia en las cifras proporcionadas por el ICFES a través del informe: Resumen Ejecutivo Colombia en Pisa 2015 y del cual se cita.

> Uruguay y Costa Rica con un puntaje mayor. El país ahora ocupa el puesto 57 de entre 72 que presentaron la prueba. (Semana, 12 /06 /2016)

En todas estas pruebas, cada una desde su propio nivel de complejidad, deja claro que los conocimientos adquiridos por los alumnos resultan ser poco significativos, identificándose serias dificultades en la resolución de problemas y en el razonamiento de los mismos, sobre todo si estos implican un nivel de abstracción muy alto o requieren utilizar varias operaciones lógicas matemáticas.

Todos estos resultados, sumados al contexto de las instituciones educativas del país, derivan en la pérdida del área y si se suma a los resultados en otras áreas del conocimiento, conlleva a fenómenos como la pérdida y/o retiro del año escolar. Según Bask & Aro (2013) y Baquerizo (2014), quienes citan a García Sánchez (2010), De White, Rogge (2013)

> "la deserción y la repitencia escolar, es un problema cada vez más fuerte en los centros educativos, ya que esto afecta de manera crucial a las familias especialmente las de estratos bajos, debido a que si los niños y/o los jóvenes no se educan, esto se puede convertir en uno de los promotores y agentes causales del bajo nivel educativo, desempleo, la falta de oportunidades, la informalidad, la delincuencia común y el estancamiento del país" (Pág.3 y 4)

La visión de este contexto, hace necesario que en la institución se implemente un proyecto educativo escolar que involucre a docentes y estudiantes en la consolidación de una propuesta metodológica que permita construir un conocimiento y una serie de habilidades aplicadas a la resolución de problemas matemáticos, y por qué no, aplicada o adaptada a otros procesos y competencias.

1.3. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES A NIVEL NACIONAL E INTERNACIONAL SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

En los diversos trabajos de investigación que fueron consultados como referencia tesis de grado e investigaciones, tanto a nivel nacional como internacional, se puede observar la continua reflexión sobre la concepción y la búsqueda de metodologías que permitan a los estudiantes el acercamiento y manejo del objeto matemático: estructuras aditivas[7] . Las estrategias propuestas en estas tesis o trabajos investigativos se enmarcan en el desarrollo de la competencia resolución de problemas, la cual es considera determinante como uno de los procesos a desarrollar en los alumnos para un verdadero aprendizaje de las matemáticas. Respecto a este tema, surgen diversas opiniones y conclusiones sobre las principales dificultades en los niños a la hora de resolver problemas combinados de suma y resta. Así mismo, se evidencian los esfuerzos de estos docentes y pedagogos, por generar recursos prácticos para el aula que permitan una enseñanza eficaz de

[7] Problemas de estructura aditiva son aquellos que se resuelven con una operación de suma o de resta. Modelan situaciones de la vida cotidiana, lo que implica la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal.

las situaciones aditivas. Las reseñas citadas abarcan tres trabajos nacionales y cuatro a nivel internacional. Además, se mencionan algunos artículos importantes sobre el tema[8].

1.3.1. Análisis de propuestas de investigación sobre resolución de problemas de estructura aditiva a nivel nacional

Para el desarrollo de la propuesta de investigación que se plantea en el presente trabajo de grado, se adelantó una amplia búsqueda de referentes que sirvieran de apoyo a la pregunta problema que se formuló. Los resultados encontrados mostraron que un alto porcentaje de trabajos se enfocan en la solución de problemas desde diversos enfoques, pero muy pocos abordan una metodología para la enseñanza de las estructuras aditivas a través de problemas combinados de suma y resta.

En 2014 la docente Leysa Ibeth Ordoñez Marquinez[9] presenta un a propuesta de trabajo en calidad de requisito para obtener el título de Magister: *Estructuras Aditivas en la Resolución de Problemas Aditivos de Enunciado Verbal (PAEV)*. La docente hace una propuesta metodológica a partir de la necesidad de buscar estrategias didácticas que le permitan una mejor comprensión de las estructuras aditivas con números enteros y que los estudiantes logren además identificar la posición de la incógnita en problemas aritméticos en un enunciado verbal (PAE).

---

[8] Otros trabajos relacionados con el tema son los de: Agudelo Gloria et al (2008) y Angulo Edgar (2013).

[9] Estudiante de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Palmira Facultad de Ingeniería y Administración Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales Colombia 2014.

La estrategia de trabajo estuvo aplicada a tres grupos de estudio de la siguiente forma: el grupo G1, redactan sus propias historias con diferentes estructuras y contextos, identifican la incógnita y resuelven los problemas. El G2 resolvió situaciones problémicas con la metodología tradicional y el uso del libro texto, al G3 se le aplicó la metodología resolver situaciones donde los estudiantes solucionan problemas presentados por el profesor, variando el grado de dificultad de diferentes estructuras y contextos.

Al analizar los resultados y realizar las pruebas de hipótesis se observó que ninguna de las tres estrategias tuvo diferencias significativas entre los grupos con sus diferentes metodologías, ni entre hombres y mujeres en la calificación final, pero los porcentajes en las tablas comparativas (Tablas 7 y 8)[10], muestran aumentos en las calificaciones entre la prueba inicial y la prueba final en la identificación de la incógnita y en la resolución de los PAEV. También se identificó problemas en la comprensión de lectura y en fundamentos conceptuales en las operaciones básicas de suma y resta. Lo descrito por la investigadora, sirve para poner de manifiesto la relevancia de los enunciados de problemas matemáticos como metodología para conseguir aprendizajes significativos y mejorar el nivel de comprensión y desempeño de los niños, objetivo propuesto con el procedimiento PAVOC

[10] Para efectos de numeración y orden en el trabajo, a las tablas se les ha cambiado su número original de la tesis de referencia: Tablas 4-10 y 4-11.

Tabla 7

Tabla 4-10: Análisis comparativo por porcentajes de la variable resolución del problema en las pruebas inicial y final por grupo

% Respuestas a los problemas		Prueba Inicial % Grupo			Total por respuesta	Prueba Final % Grupo			Total por respuesta
		G1	G2	G3		G1	G2	G3	
P1 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Nivel del Mar, I1	0	80	76,2	54,5	60(66,7%)	88	81	56,6	64(71,1%)
	1	12	19	27,3	19(21,1%)	12	9,5	29,5	18(20%)
	S	8	4,8	18,2	11(12,2%)	0	9,5	13,6	8(8,9%)
P2 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Dinero, I2	0	28	52,4	47,7	39(43,3%)	32	38,1	36,4	32(35,6%)
	1	56	42,9	43,2	42(46,7%)	68	47,6	52,3	50(55,6%)
	S	16	4,8	9,1	9(10%)	0	14,3	11,4	8(8,9%)
P3 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Desplazamiento, I3	0	64	52,4	34,1	42(46,7%)	64	42,9	47,7	46(51,1%)
	1	12	23,8	34,1	23(25,6%)	28	33,3	40,9	32(35,6%)
	S	24	23,8	31,8	25(27,8%)	8	23,8	11,4	12(13,3%)
P4 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Temperatura, I2	0	52	52,4	43,2	43(47,8%)	52	66,7	34,1	40(46,7%)
	1	24	42,9	29,5	28(31,1%)	40	19	56,8	39(43,3%)
	S	24	4,8	27,3	19(21,1%)	8	14,3	9,1	9(10%)
P5 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Carretera, I3	0	40	47,6	56,8	45(50%)	40	33,3	43,2	36(40%)
	1	40	38,1	25	29(32,2%)	40	47,6	29,5	33(36,7%)
	S	20	14,3	18,2	16(17,8%)	20	19	27,3	21(23,3%)
P6 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Profundidad, I2	0	44	66,7	56,8	50(55,6%)	64	42,9	61,4	52(57,8%)
	1	32	23,8	20,5	22(24,4%)	20	38,1	20,5	22(24,4%)
	S	24	9,5	22,7	18(20,%)	16	19	18,2	16(17,8%)
P7 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Cronología, I3	0	72	90,5	81,8	73(81,1%)	76	52,4	84,1	67(74,4%)
	1	16	4,8	2,3	6(6,7%)	8	28,6	15,9	15(16,7%)
	S	12	4,8	15,9	11(12,2%)	16	19	0	8(8,9%)
P8 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Dinero, I3	0	16	38,1	31,8	26(28,9%)	24	19	13,6	16(17,8%)
	1	76	57,1	63,6	59(65,6%)	76	71,4	84,1	78(78,9%)
	S	8	4,8	4,5	5(5,6%)	0	9,5	2,3	3(3,3%)
P9 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder Nivel, I3	0	60	71,4	68,2	60(66,7%)	56	57,1	59,1	52(57,8%)
	1	16	23,8	4,5	11(12,2%)	36	28,6	38,6	32(35,6%)
	S	24	4,8	27,3	19(21,1%)	8	14,3	2,3	6(6,7%)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8

Tabla 4-11: Análisis comparativo por porcentaje de la variable identificación de la incógnita en las pruebas inicial y final por grupo.

% Identificación de la Incógnita / Problema		Prueba Inicial % Grupo G1	G2	G3	Total por respuesta	Prueba Final % Grupo G1	G2	G3	Total por respuesta
P1 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	80	26,6	59.1	52(57,8%)	52	33,3	56,8	45 (50%)
Nivel del Mar	1	12	66,7	22,7	27(30%)	48	57,1	29,5	37(41,1%)
Incógnita 1	S	8	4,8	18,2	11(12,2%)	0	9,5	13,6	8 (8,9%)
P2 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	60	76,2	70,5	62(68,9%)	76	61,9	75	65(72,2%)
Dinero	1	24	19	20,5	19(21,1%)	24	23,8	13,6	17(18,9%)
Incógnita 2	S	16	4,8	9,1	9(10%)	0	14,3	11,4	8(8,9%)
P3 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	48	47,6	27,3	34(37,8%)	16	42,9	20,5	22(24,4%)
Desplazamiento	1	28	28,6	40,9	31(34,4%)	76	33,3	68,2	56(62,2%)
Incógnita 3	S	24	23,8	31,8	25(27,8%)	8	23,8	11,4	12(13,3%)
P4 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	64	76,2	52,3	55(61,1%)	72	38,1	65,9	55(61,1%)
Temperatura	1	12	19	20,5	16(17,8%)	20	47,6	25	26(28,9%)
Incógnita 2	S	24	4,8	27,3	19(21,1%)	8	14,3	9,1	9(10%)
P5 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	36	42,9	38,6	35(38,9%)	24	42,9	13,6	21(23,3%)
Carretera	1	44	42,9	43,2	39(43,3%)	56	38,1	59,1	48(53,3%)
Incógnita 3	S	20	14,3	18,2	16(17,8%)	20	19	27,3	21(23,3%)
P6 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	64	81	72,7	65(72,2%)	72	52.4	65.9	58(64,4%)
Profundidad	1	12	9,5	4,5	7(7,8%)	12	28.6	15.9	16(17,8%)
Incógnita 2	S	24	9,5	22,7	18(20%)	16	19	18.2	16(17,8%)
P7 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	48	57,1	47,7	45(50%)	20	38,1	29,5	26(28,9%)
Cronología	1	40	38,1	36,4	34(37,8%)	64	42,9	70,5	56(62,2%)
Incógnita 3	S	12	4,8	15,9	11(12,2%)	16	19	0	8(8,9%)
P8 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	32	47,6	22,7	28(31,1%)	20	33,3	15,9	19(21,1%)
Dinero	1	60	47,6	72,7	57(63,3%)	80	57,1	81,1	68(75,6%)
Incógnita 3	S	8	4,8	4,5	5(5,6%)	0	9,5	2,3	3(3,3%)
P9 0 Incorrecto, 1 Correcto, S Sin responder	0	56	90,5	63,6	61(67,8%)	32	42,9	18,2	25(27,8%)
Nivel	1	20	4,8	9,1	10(11,1%)	60	42,9	79,5	59(65,5%)
Incógnita 3	S	24	4,8	27,3	19(21,1%)	8	14,3	2,3	6(6,7%)
Total Estudiante por grupo		25	21	44	90	25	21	44	90(100%)

Fuente: Elaboración propia

Raúl Octavio Morales Díaz (2014), en su trabajo de tesis *Dificultades y errores en la Solución de Problemas con Números Racionales*[11] , propone como objetivo reconocer los errores y las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica al enfrentarse a la resolución de problemas con los números racionales. Para llevar a cabo esta experiencia, se diseñaron cuatro momentos en los cuales se llevó a cabo la recolección y estudio de la información. Se hace una aclaración al respecto, indicando que todos los talleres de aplicados se estructuraron con cinco situaciones problema, desde los constructos teóricos del número racional planteados por Kieren (1983).

En un primer momento se aplica un taller diagnóstico para determinar los conceptos e ideas previas que tienen los estudiantes frente a la solución de problemas en contextos significativos. El grupo consta de 50 estudiantes a los cuales se les plantean 5 situaciones problema, fundamentadas en los constructos teóricos del número Racional elaboradas por Kieren (1980). Dicha sesión duró 3 horas.

Para el segundo momento se analiza la información que arrojó el instrumento del primer taller, se planeó una nueva serie de situaciones problema en contextos significativos para los estudiantes haciendo énfasis en la observación del procedimiento usado por los estudiantes para resolver las situaciones problémicas. Así mismo, se analizan los argumentos de los alumnos, ya que los talleres, como todos los demás van acompañados de un espacio para la argumentación

[11] Trabajo de grado para acceder al título de Magister en educación de la Universidad Autónoma de Manizales

preguntándoles cómo resolvieron la situación planteada y el procedimiento empleado. En la aplicación de este instrumento participan 35 estudiantes, ya que algunos de los estudiantes que participaron en la primera fase no asistieron a clase o no mostraron interés por continuar con la investigación. La sesión duró 3 horas.

Un tercer momento se lleva acabo con 10 estudiantes los cuales muestran gran compromiso con la investigación y según su registro académico asisten normalmente a clase. Se aplica otro taller, basado en los resultados obtenidos con el anterior y proponiendo un grado mayor de dificultad para evidenciar otros tipos de errores con respecto a los números racionales, lo que Morales explica, citando lo que plantea Godino (2004): en algunas situaciones el error no se produce por falta de conocimiento, este radica en que algunas veces, el estudiante emplea un conocimiento que es válido en ciertas circunstancias, lo utiliza en otras en las cuales no es válido (Pág. 76).

Finalmente para el cuarto momento se aplica el taller número cuatro, a 10 estudiantes seleccionados y se proponen situaciones problema partiendo de los errores recurrentes, presentados en el tercer instrumento. En esta fase se emplea un tiempo de 3 horas y media; haciéndose énfasis a los estudiantes para que justificarán cómo resolvían las situaciones planteadas. A partir de lo expresado por los alumnos y lo que muestra tres instrumentos anteriores se verifica la recurrencia de los errores y se categorizan desde la tipología propuesta por Radatz (1979).

De este modo, basado en este trabajo de campo y el análisis de los resultados obtenidos, se tipifican las dificultades presentadas con relación a la aritmética empleada en los procesos de solución y a los números racionales. En su trabajo investigativo, Morales concluye entre otras cosas que

> algunos errores de los estudiantes pueden deberse a dificultades en el manejo del lenguaje matemático, esto se demuestra en las dificultades de comprensión de los problemas, la falta de comprensión semántica de las situaciones que lleva generalmente a errores, debido a las diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. La comprensión del problema se convierte en una de las dificultades esenciales a la hora de solucionar problemas con números racionales, de acuerdo con los datos se puede afirmar que existe una necesidad de encontrar los datos cuantitativos con los cuales hacer cualquier operación matemática, de tal manera que si no se encuentra explícito, se asume que no se comprende el problema (2014, pág.115).

Todas estas observaciones, hechas por el docente examinador, se relacionan también con PAVOC ya que este modo de resolución pone especial atención en los procesos de pensamiento, estrategias de aplicación y, además, considera a los contenidos matemáticos como herramientas indispensables para aplicar estrategias de resolución de problemas cotidianos.

1.3.2. Propuestas de investigación sobre resolución de problemas de estructura aditiva a nivel internacional

Al revisar los aportes en el plano internacional, existen trabajos e investigaciones que han servido de apoyo a la orientación de esta propuesta de estudio.

Astola, Salvador y Vera (2012), en su propuesta de grado Efectividad del Programa “GPA-RESOL” en el Incremento del Nivel de Logro en la Resolución de Problemas Aritméticos Aditivos y Sustractivos en Estudiantes de Segundo Grado de Primaria de dos Instituciones Educativas, una de Gestión Estatal y otra Privada del Distrito de San Luis[12], proponen como objetivo de trabajo establecer la efectividad del programa “GPA-RESOL” en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de San Luis. El trabajo consistió en una investigación de tipo experimental con manipulación de la variable independiente: programa GPA - RESOL, en los niveles de presencia y ausencia, sobre la variable dependiente en la resolución de problemas. Para llevarlo a cabo, diseñaron un estudio cuasi experimental pre test - post test, con estudio de comparación de dos grupos no equivalentes.

Después del análisis los datos obtenidos, las estudiantes investigadoras, llegan a las siguientes conclusiones

el nivel de logro en resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas es altamente

---

[12] Tesis para acceder al título de Magister en Educación de la Pontificia Universidad Católica de Perú

significativo. En el momento del pre test y el post test, el grupo experimental difiere del grupo control y al interior de los grupos, los estudiantes de la institución de gestión privada evidencian un mejor nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos.

Entre las sugerencias que hacen, expresan que es necesario

-Realizar un seguimiento sobre el nivel de logro en resolución de problemas de los alumnos que participaron de esta investigación.

-Realizar una investigación del nivel de logro en resolución de problemas que permita el análisis específico de las frecuentes dificultades que se presentan en los estudiantes según los tipos de problemas de cambio, combinación, comparación e igualación.

-El MINEDU debería organizar programas de capacitación al personal docente para que conozcan y trabajen la resolución de problemas de forma sistemática (pág.106).

Las recomendaciones hechas por el evaluador del trabajo, apuntan al proceso aplicativo PAVOC, ya que en él se trata de mostrar la importancia de la creación de enunciados de problemas matemáticos atractivos y novedosos para que sean resueltos heurísticamente. Además, la intención de este trabajo es el de servir de guía a maestros en el uso de secuencias con este aplicativo, de tal manera que se puedan establecer conexiones de la matemática con la vida real y con otras ramas de la propia matemática, y proponer modelos que puedan ayudar a los profesores de educación primaria para crear enunciados con una finalidad determinada.

Por su parte, Ayllón (2012), en su propuesta de grado *Invención Resolución de Problemas por Alumnos de Educación Primaria*[13], presenta un proyecto investigativo, donde establece como objetivo principal del trabajo estudiar el proceso de invención/resolución de problemas que realizan estudiantes de educación primaria.

Algunas de las conclusiones que recoge su trabajo son las siguientes

- La invención de problemas no es una práctica habitual en los centros educativos. De hecho, esta actividad resultó completamente novedosa para los alumnos ya que ninguno de ellos manifestó haber realizado tal tarea alguna vez.
- Los estudiantes se mostraron muy interesados en la tarea de inventar problemas.
- Con esta actividad se ha obtenido información acerca de los conceptos numéricos y las capacidades que sobre la aritmética y el sentido numérico poseen los alumnos de educación primaria.
- Los problemas presentan mayor facilidad cuando la incógnita es la cantidad final, y los más difíciles son los que la presentan en la cantidad inicial. Como manifiestan Castro, Batanero, Rico y Castro (1991), la posición de la incógnita repercute significativamente en el nivel de dificultad de un problema.

[13] Memoria de tesis Doctoral, realizada para la Universidad de Granada, España.

- El tamaño de los números también influye sobre la elección de la operación adecuada, ya que los ítems con números pequeños, les resultan más fáciles de reconocer a los alumnos que los números grandes (Hart, 1981). Los resultados corroboran que para los estudiantes de educación primaria los problemas de estructura aditiva con números pequeños son más fáciles que los que tienen números grandes. (Ayllón, 2012. Pág. 470)

El estudio de Ayllón, está relacionado con PAVOC, ya que ella afirma que su indagación coincide con lo manifestado por Puig y Cerdán (1988): ―los enunciados que construyen los niños solo reproducen las formas de expresiones aritméticas aprendidas en la escuela‖.

> Por lo tanto es necesario que la resolución de problemas llegue a interiorizar el proceso como algo propio, permitiendo que los estudiantes manipulen autónomamente el problema, se familiaricen con la situación planteada, descubran sus dificultades, elaboren estrategias de resolución, ensayen procedimientos de resolución utilizando ciertos contenidos matemáticos y lo resuelvan. Posteriormente, es conveniente hacer un análisis crítico de la solución. (Ortega, T et. al. 2011, Pág. 114)

También López de los Mozos (2001), al realizar una Memoria de su trabajo *Desarrollo de la Operaciones de Sumar y Restar: Comprensión de los problemas Verbales*[14], estudia los problemas matemáticos que los niños resuelven en los primeros años de escolaridad. Para llevar a cabo esto,

[14] Tarea desarrollada como requisito para optar por el título de Doctorado de la Universidad Complutense de Madrid

se propone el análisis y determinación de la evolución que siguen los niños en la comprensión y resolución de los problemas elementales de suma y resta. El trabajo se desarrolló con estudiantes de los grados primero, segundo y tercero de primaria. La muestra utilizada estuvo formada por noventa y seis niños elegidos al azar, del colegio público Carlos Eraña de Ciudad Real. Se utilizaron como problemas tipo en el estudio, los propuestos por Riley y Greeno, (1988, p. 53-54); estos autores proponen seis problemas de Cambio (Ca), seis problemas de Combinación (Co) y seis problemas de Comparación (Cp); dieciocho en total. Las pruebas se pasaron de forma individual por el mismo experimentador, en la misma clase para todos los alumnos y dentro del horario escolar. Cada niño pasó cuatro sesiones experimentales. Posteriormente se llevó a cabo el proceso de análisis de los datos obtenidos, tomando como criterio si las respuestas de los niños eran correctas o incorrectas, en función únicamente de si la solución del problema era o no exacta.

Realizado el estudio, López de los Mozos llega a varias conclusiones, entre las que destaco:

> […]Con respecto a la ubicación de la incógnita, podemos afirmar que hay diferencias significativas, cuando se comparan las soluciones de los niños en las distintas situaciones en las que está situada la incógnita. Los niños alcanzan el mayor nivel de éxito cuando la incógnita se ubica en el Resultado. Resultan un poco más difíciles los problemas en los que la solución consiste en encontrar el segundo término. Y la dificultad es mayor cuando la cantidad desconocida se sitúa en el primer sumando.
>
> […] No existen diferencias significativas entre los resultados obtenidos por los niños en los problemas que se resuelven por suma y los de aquellos que se resuelven

> por resta. El hecho de no existir diferencias entre los grupos en la operación, hace pensar que los niños tienen igual competencia para una u otra operación desde muy temprano, y que no hay razones para postergar la enseñanza de la resta a cursos superiores.

Para concluir, la autora hace una valiosa recomendación respecto a su trabajo y para ser tenido en cuenta para próximas investigaciones

> como síntesis, debe decirse que los resultados coinciden con otras investigaciones en el sentido de que la edad de los niños, situación de la incógnita y tipo de variables determinan la dificultad de los problemas. Sin embargo, la coincidencia o no de estructura y procedimiento añade una variable más, que generalmente no ha sido tenida en cuenta, salvo, en algunos trabajos para problemas de comparación, por lo que serían deseables futuras investigaciones extensivas a todos los tipos de problemas, que constaten estos datos y añadan otros nuevos, con la finalidad de alcanzar conclusiones que puedan ser aplicadas a la enseñanza de los problemas de sumar y restar. (López de los Mozos, 2001. Pág. 425)

Los aportes de la investigación de López de los Mozos, son tenidos en cuenta en el sistema PAVOC, ya que en este modelo se estructuran los problemas aritméticos para su estudio y aplicación según el nivel de dificultad, distinguiendo entre los problemas de una etapa y los de más de una etapa. En esta técnica se aborda el estudio de los problemas de una etapa y dos etapas, entendiendo que el proceso de resolución de esos problemas depende fundamentalmente de la traducción del enunciado verbal a la expresión aritmética, y que esta traducción se realiza en función de las interpretaciones de las operaciones aritméticas: suma y resta y los significados evocados por el texto del problema.

Igualmente, Martínez (2012) realiza una propuesta de trabajo investigativo sobre *Resolución de Problemas de Estructura Aditiva con estudiantes de Segundo Grado de Educación Primaria*[15],para esto, se traza como objetivo investigar las estrategias y las representaciones externas que hacen los niños al resolver problemas aditivos, así mismo, diseñar una secuencia con tipos y subtipos de problemas aditivos, verificando su viabilidad. La metodología de estudio fue de corte cualitativo, de tipo descriptivo-explicativo y se usó como grupo de estudio a diez estudiantes. Su trabajo se basó en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1.990).

El trabajo se realizó en cuatro etapas: la primera, diseño y aplicación de cuestionarios iniciales de escritura numérica y resolución de problemas aditivos, seguidos de entrevistas clínicas individuales, la segunda, se trató del diseño y aplicación de secuencias didácticas sobre problemas aditivos explorando el modelo funcional (tipos de problemas aditivos); en la tercera, se aplicó un cuestionario final para evidenciar progresos en los estudiantes después del uso de las secuencias, y la cuarta etapa fue el estudio de los datos obtenidos y resultados.

Martínez, aporta como conclusión sobre su indagación que

[15] Trabajo realizado para su tesis de grado y obtener el título de Maestría en Desarrollo Educativo de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

> después de la intervención didáctica se observan mejoras en la resolución de problemas; los niños comprenden mejor la estructura semántica y sintáctica de los problemas, pasando de resolver problemas por medio de representaciones internas y externas con objetos, dibujos o la manipulación de sus dedos a tener mayor familiaridad con el uso del algoritmo. Esto muestra que la capacidad de los estudiantes para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas es un proceso largo que requiere la exploración de diversos aspectos en el salón de clases: didácticos, matemáticos y cognitivos, para que, finalmente, los estudiantes puedan desarrollar otro tipo de habilidades matemáticas (2012, pág. 3)

Finalmente, Martínez sugiere al docente lector de su tesis

> que se considere primordial para una mejor práctica docente de los problemas aditivos, el conocimiento del docente sobre el contenido matemático, pedagógico, didáctico, del pensamiento infantil; con esos elementos propiciar el pasaje del conocimiento intuitivo de sus estudiantes al conocimiento formal. Pues el responsable directo de la enseñanza y aprendizaje de sus alumnos es el profesor frente al grupo. (2012, pág.198)

Las observaciones derivadas del trabajo de Martínez se relacionan con la técnica PAVOC ya que esta considera problemas aritméticos, generalmente de aplicación, lo que hace que aparezcan enunciados en contextos variados y reales. Por otro lado, estos se resuelven haciendo uso de conceptos y relaciones aritméticas, las cuales no se consideran consecuencia inmediata de la realización de operaciones aritméticas. Tales elementos son cruciales para la resolución de problemas si van acompañadas de técnicas tales como el examen de posibilidades, el análisis de los supuestos implícitos o la utilización de representaciones adecuadas.

Debido a que la teoría de las situaciones didácticas logra gran aceptación entre docentes e investigadores que ven en ella un saber constituido entre docente y estudiantes, los cuales ordenan sus actividades y conocimientos bastante cercanos a lo erudito. Esto permite que se contemple como uno de los modelos de la didáctica de amplia aplicación a las matemáticas, como lo afirma Godino (2011):

> en los países desarrollados la didáctica de las matemáticas ha adquirido un reconocimiento sólido, como se muestra en la constitución de departamentos universitarios, el desarrollo de programas de maestría y doctorado específicos, la publicación de revistas especializadas, etc. […] Esta visión de los procesos educativos, donde se le da un espacio importante a la didáctica ha hecho que se formulen tesis de grado con aplicación de situaciones didácticas con resultados alentadores. (Artículo, numeral 3.1)

Considerando el aporte valioso que esta teoría le hace a este trabajo investigativo, siendo una de las bases de su diseño, se recogen también, algunos referentes de propuestas realizadas, basadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas y sus principales conclusiones:

En el año 2015, la Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal, en su número 28, publica el trabajo de investigación de Castañeda, Hernández y González titulado

Ruptura del contrato didáctico en la solución de un problema de geometría con estudiantes de secundaria. En sus apartes, presentan el diseño de una situación didáctica con estudiantes de 12-14 años para construcción de triángulos, dados sus tres segmentos. Para su elaboración abordan entre otras, la propuesta de Brousseau conocida como contrato didáctico, elemento adyacente al trabajo con situaciones. Del estudio se concluye que "el abordar la solución de problemas de tipo abierto, donde se generan incertidumbre en su resultado, promueve una gran motivación y novedad por el aprendizaje de los estudiantes. La ruptura del contrato didáctico tradicional o a-didáctico, como lo refiere Brousseau, favorece la aparición de manifestaciones de autonomía y responsabilidad; también el sentido crítico y la meta-reflexión"[16] (Castañeda et al. 2015. Pág. 121). Esta observación del autor está estrechamente relacionada con la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, ya que este considera que al presentar una situación problema, se establece un contrato didáctico mediante un conjunto de los comportamientos específicos de los profesores, para un conocimiento a enseñar, los cuales son previstos por el estudiante y el conjunto de sus comportamientos, esperados por el profesor. Este es un modelo de obligaciones recíprocas y sanciones, donde el estudiante o profesor impone o cree haberlas impuesto explícita o implícitamente respecto a un conocimiento en cuestión (1980, pág. 147).

Insuasty (2014), presenta su trabajo de grado titulado: Cambios producidos en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado noveno a través de situaciones didácticas utilizando geogebra, en la categoría de Maestría. Este trabajo expone el análisis de los

---

[16] Lester, F.K (2013). En su libro "Thoughts about research on mathematical problem solving instruction". The Mathematics Enthusiast, 10 (1 y 2), pp. 245-278

cambios que se producen en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado noveno, implementando situaciones didácticas de enseñanza con el software Geogebra y su aplicación para la movilización de saberes en torno a este concepto. La investigación se sustenta a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas fundada por el investigador y didacta francés Guy Brousseau (1986), es de tipo cualitativo descriptivo y se inscribe en la modalidad cuasi-experimental.

En sus conclusiones anotan que las hipótesis y objetivos planteados respecto a la intervención con el modelo de las Situaciones Didácticas, constatan que hubo favorecimiento de nuevos aprendizajes. En el desarrollo de la situación, agregan, la fase de validación resulta fundamental para aprendizajes como parámetro y variación; en la fase de validación se destaca la poca intervención del docente debido a que los estudiantes lograron hacer construcciones acertadas del saber propuesto. Concluyen reconociendo el acierto en cada etapa de la situación didáctica y su aplicabilidad para futuras propuestas pedagógicas.

Al observar los aportes del trabajo de Insuasty, se ve la relación con la idea de Brousseau en su teoría de las Situaciones Didácticas, cuando se refiere al momento en que el maestro devuelve al estudiante una situación a-didáctica, absteniéndose de brindarle pautas de resolución, hipótesis o métodos heurísticos. El alumno se ve ligado entonces al juego matemático de cuestionar, formular y discutir procedimientos que lo llevan a una situación didáctica nueva, la cual le genera nuevos aprendizajes y fortalece su autonomía.

En 2013 Figueroa, en su propuesta: *Resolución de ecuaciones con sistemas de dos variables*[17], detalla la implementación y aplicación de una situación didáctica para que sus estudiantes logren desarrollar y aplicar sistemas de ecuaciones con dos variables. La propuesta se enfocó desde la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau. En sus resultados destacan que el objetivo del trabajo respecto al diseño, análisis y aplicación de la secuencia didáctica fue exitoso. También avalan su contribución a la construcción de saberes respecto a la solución de ecuaciones. Aclaran el valor que aportó el uso del programa geogebra para el desarrollo creativo de las situaciones y destacan el entusiasmo de los estudiantes en la secuencia, a pesar de no ser cotidiana.

Los resultados arrojados por esta propuesta, se relacionan con las ideas propuestas por Brousseau, relacionadas por Cerda-Morales en su artículo, quien considera acerca del conocimiento matemático que

> el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos. (2012, pág. 1)

---

[17] Trabajo para el cuarto año de secundaria desde la teoría de las situaciones didácticas, en la categoría de tesis en Maestría

1.4. ANTECEDENTES LEGISLATIVOS DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta propuesta didáctica tiene sustento legal de acuerdo a diferentes lineamientos de la legislación colombiana para la educación. Primero la Ley General de Educación de 1994; segundo, los Lineamientos Curriculares de matemáticas de 1998; tercero, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de 2006; Cuarto, los Derechos Básicos de aprendizaje de 2015. Quinto el PEI de la institución educativa Carlos Holmes Trujillo de la ciudad de Cali año 2017 y por último, el plan de área de matemáticas del grado quinto de primaria de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, hacia donde se enfoca la presente propuesta didáctica.

En seguida se describen elementos tomados de los documentos relacionados, con el propósito identificar los principios a tener en cuenta para generar una secuencia didáctica basada en la teoría de las situaciones didácticas y la metodología PAVOC, como recursos metodológicos que favorezcan el desarrollo de habilidades en la solución de problemas que involucran dos operaciones matemáticas básicas: suma y resta, en estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo.

A cerca de La Ley General de Educación 115 de 1994, en esta se fijan objetivos generales y específicos de la básica primaria. Uno de los objetivos generales, considerado en el artículo 20 (numeral c), es el de *"ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana"*. Así mismo, en el artículo 21(numeral c), uno de los objetivos específicos estipula el *"desarrollo* *de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos"* (Pág. 7).

En cuanto a Lineamientos Curriculares de matemáticas del MEN (1998), se plantean argumentos valiosos, reconociendo en ellos "un contexto para acercarse al conocimiento matemático de la escuela". Entre las sugerencias, se menciona que

> el acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas (Pág. 24).
>
> […] se tiene que: "Otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pista para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables" (Pág. 26).

Con lo anterior se pretende que los estudiantes resuelvan y formulen problemas de acuerdo a su propio entorno, de modo que se puedan identificar con ellos y por lo tanto les sean significativos.

Los estándares Básicos de matemáticas del MEN (2006) para el conjunto de grados cuarto y quinto plantean lo siguiente: "Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones; resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación, e igualación; uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas" (Pág. 82).

Con los estándares antes mencionados, se puede apreciar con claridad la necesidad que tiene el MEN, en formar estudiantes competentes en plantear y resolver problemas matemáticos de su vida cotidiana mediante el buen manejo de las operaciones básicas como son la suma y la resta entre números naturales.

Al mismo tiempo, los derechos básicos de aprendizaje en matemáticas para grado quinto orientan que los estudiantes deben "interpretar y utilizar los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación". También "describir y desarrollar estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de potenciación" (DBA; 2016, pág. 37).

Al respeto, el PEI de la institución educativa Carlos Holmes Trujillo, en su misión, contempla el desarrollo de competencias básicas ciudadanas, laborales y de pensamiento crítico para fortalecer la convivencia social y mejorar la calidad de vida de sus estudiantes; además, uno de los objetivos de la política de calidad (numeral 1.5.1) es que "todo Holmista estará en la capacidad de resolver situaciones polémicas, asumiendo los retos de un mundo cambiante y competitivo, ya sea en su desempeño académico, o artístico o laboral”. Así mismo, el plan de área y el plan de aula, contemplan la resolución de problemas aditivos, dentro de las competencias a alcanzar para el primer periodo del año lectivo en el grado quinto. Lo anterior queda evidenciado en la construcción de los planes de aula y área de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo (ver anexo 1-2).

En consecuencia, es posible evidenciar el interés que tiene la institución por formar personas competentes en resolución de situaciones de su propio contexto y que puedan asumir los retos del mundo globalizado en el campo académico y laboral.

CAPÍTULO 2

2. PERSPECTIVAS CURRICULARES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS Y SUSTRACTIVAS EN BÁSICA PRIMARIA

Con respecto a la perspectiva curricular para el aprendizaje de las estructuras aditivas, se hace necesario tomar algunas ideas fundamentales que aportan los *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (1998),* los cuales entre sus apartes, aclaran que

> En el conocimiento matemático se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el *saber qué y el saber por qué*. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo.
>
> Estas dos facetas (práctica y formal) y estos dos tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) señalan nuevos derroteros para aproximarse a una interpretación

> enriquecida de la expresión *ser matemáticamente competente*. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con *el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué* hacerlo. Por tanto, la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Si bien es cierto que la sociedad reclama y valora el saber en acción o saber procedimental, también es cierto que la posibilidad de la acción reflexiva con carácter flexible, adaptable y generalizable exige estar acompañada de comprender qué se hace y por qué se hace y de las disposiciones y actitudes necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y percibir las ocasiones de hacerlo. (MEN, 2006, pág.50)

Esta visión acerca de los elementos que dan estructura al proceso de las competencias en matemáticas y que busca hacer al individuo matemáticamente competente, debe ser la que proporcione los conceptos para la organización de currículos centrados en el desarrollo de las competencias matemáticas, de manera que éstas involucren los distintos procesos generales descritos. Se debe considerar que en la enseñanza enfocada a lograr este tipo de aprendizaje no se puede valorar apropiadamente el progreso en los niveles de una competencia si se piensa en ella en un sentido disyuntivo (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales en donde se desarrolla. Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia de progresiva complejidad.

Por todo lo anterior, se hace necesario que en la Institución se considere el rediseño y la reestructuración del currículo de tal manera que responda a las necesidades del contexto escolar, donde se conjuguen en forma armónica, el entorno, los aspectos del desarrollo humano, sistemas, competencias, procesos y las tareas matemáticas. Para alcanzar esta meta, se hace necesaria la planeación de una perspectiva curricular clara y organizada.

El seguimiento de la línea de orden sugerida anteriormente, conduce a una reorganización del área de matemáticas, teniendo en cuenta sus lineamientos y particularidades necesarias, para que se generen procesos de resolución de problemas matemáticos con estructuras aditivas. Como lo describe García, Coronado y Giraldo (2015).

Una de las principales rupturas que introducen las competencias matemáticas en las matemáticas escolarizadas es su organización curricular. La organización tradicional de las matemáticas escolares se ha dado en torno a los contenidos principalmente. En un enfoque por competencias, esta organización curricular se hace en términos de actuaciones, de procesos y no de conocimientos, es decir, las matemáticas se organizan curricularmente en términos de procesos matemáticos; es pasar de una lógica de los contenidos a una lógica de la acción orientada por los procesos matemáticos que están en la base de las competencias. (Pág. 44)

2.1. ORGANIZACIÓN DE LA PERSPECTIVA CURRICULAR

Los estándares curriculares en matemáticas del MEN, contemplan cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares del MEN y son: *Formular y resolver problemas,* *Modelar procesos y fenómenos de la realidad, Comunicar, razonar y formular, Comparar, y Ejercitar procedimientos y algoritmos.* Cada proceso se estudia desde las particularidades presentes en la actividad matemática que ocurre en su enseñanza y en su aprendizaje: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, manejo de la información y la actitud hacia el estudio de las matemáticas.

Estos procesos están muy relacionados con las competencias en su sentido más amplio y aun en el sentido restringido, con el "saber hacer en contexto", pues ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia. Estos procesos matemáticos, son concretados en forma lógica y en el pensamiento matemático, al ser subdivididos en cinco pensamientos que se proponen: *el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probalístico y el variacional*.

Otro aspecto relevante en la planeación curricular y al cual hace referencia los Estándares de Competencia en Matemáticas, tiene que ver con el contexto. Teniendo en cuenta el aporte que se hace a este aspecto, se enfatiza en que el contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar –no sólo físico, sino ante todo sociocultural– desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, y por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas [...] . Así pues, los contextos, los tipos de pensamiento con sus sistemas conceptuales y simbólicos más afines y los procesos generales de la actividad matemática se entrecruzan en cada clase, en cada situación problema, en cada unidad temática, proyecto de aula o período académico (MEN, 2006, pág.70).

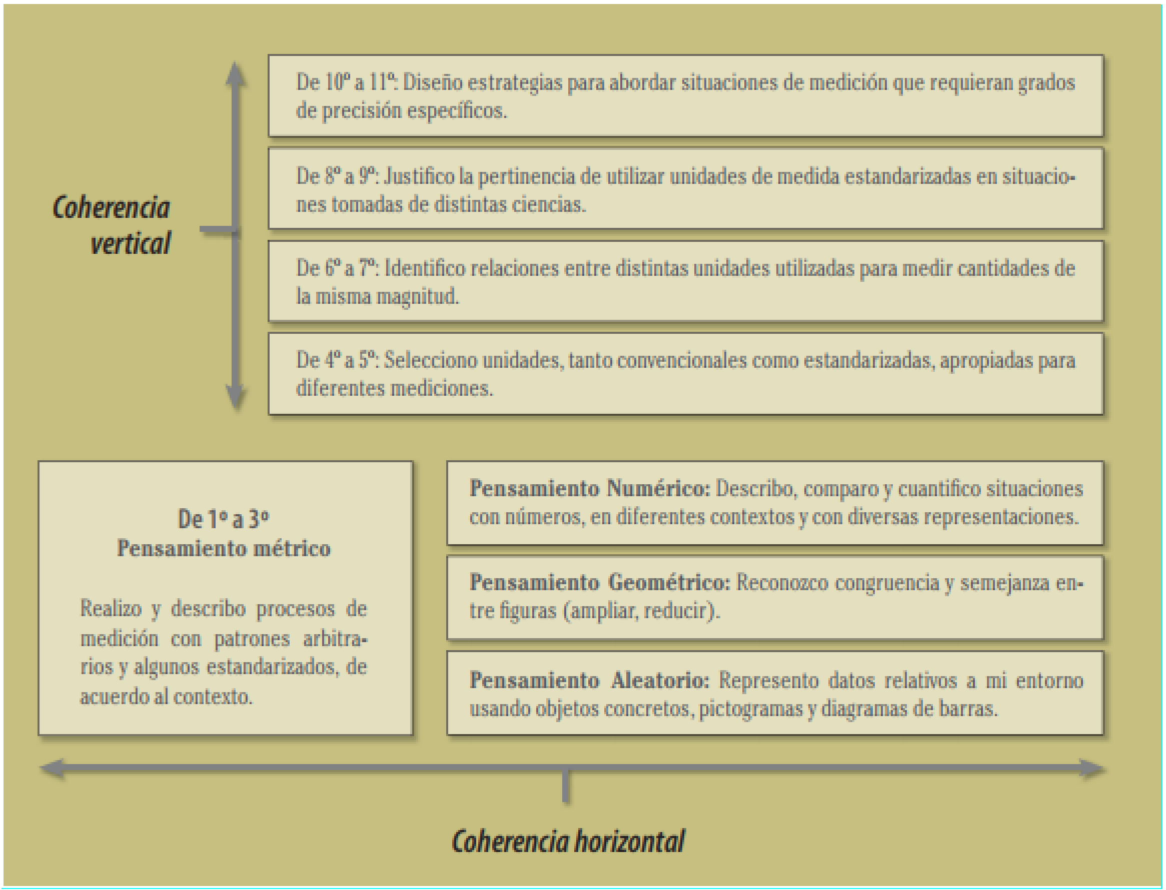
> La visión anterior del contexto, hace necesario considerar que en el aprendizaje de las matemáticas se relaciona tres tipos de contexto, los cuales es necesario como tener en cuenta en la planeación y desarrollo de las situaciones matemáticas: el contexto inmediato o de aula, el contexto escolar o institucional y el contexto extra escolar o sociocultural. Estos se entrecruzan en cada clase, para ser aprovechadas en muchos temas y proyectos bien contextualizados.

Finalmente, se tiene en cuenta para la estructuración del currículo la organización de los procesos matemáticos propuesta por García, Coronado y Giraldo (2015, pág. 45), quienes afirman

Para que los procesos matemáticos contribuyan a la organización curricular de las matemáticas deben atender a dos condiciones:

> -primero, deben formularse a lo largo de los diferentes conjuntos de grados de escolaridad (organización horizontal) y
>
> -segundo, deben expresarse como procesos matemáticos propios de los diferentes pensamientos matemáticos en los que se organiza el currículo escolar (organización vertical).

Tabla 9.Ejemplo de coherencia vertical y horizontal de los estándares en matemáticas



Fuente: Estándares básicos de competencias en matemáticas del MEN 2002, página 79. Documento en línea

Este tipo de organización, permite planear el desarrollo completo del área a lo largo del año escolar en los diversos grupos y periodos del año lectivo. La explicación de esta organización queda referenciada claramente en los estándares básicos de competencias en matemáticas del MEN (pág. 79), al mencionar que

> […] la coherencia vertical se hace evidente en el primer ejemplo, porque –si bien el contenido matemático es el mismo: la medición– aquello que varía en los estándares

de pensamiento métrico de un conjunto de grados a otro es la complejidad y precisión del proceso de medición o la de las unidades utilizadas. La coherencia horizontal también es clara en el ejemplo siguiente, porque en los procesos de medición (pensamiento métrico) es necesario describir la situación numéricamente (por ejemplo un área o volumen, la hora del día, la temperatura del salón, etc., en donde los resultados de las mediciones implican el pensamiento numérico); tener en cuenta las características geométricas de los patrones y gráficos usados para describir los datos (por ejemplo, si en los pictogramas o en las gráficas de barras es importante sólo la altura o también el área de la barra, como sí es importante en las gráficas circulares, lo que involucra el pensamiento espacial) y seleccionar los tipos de gráficas y las convenciones necesarias para traducir los datos numéricos de las tablas de datos en el tipo de gráfica seleccionado (pensamiento aleatorio).

Podemos concluir que, teniendo en cuenta esta forma ordenada como se estructuran los Estándares, y la necesidad de una planeación por procesos que se artículen a las directrices ministeriales, la perspectiva curricular que se propone para este trabajo de investigación será la siguiente: el eje articulador del proceso matemático es la resolución de problemas, desde el cual se aborda como objeto matemático de estudio, las estructuras aditivas. Estas estructuras se estudian dentro de un contexto que involucra situaciones de la vida cotidiana del niño, que lo llevarán a desarrollar una serie de tareas matemáticas, estructuradas en orden creciente de complejidad (reproducción, conexión y reflexión) para el desarrollo de habilidades en cualquier escenario, incluso en pruebas matemáticas nacionales y extranjeras.

En conclusión, lo anterior se concreta en el trabajo de investigación mediante la propuesta de los procesos matemáticos como organizadores curriculares, entre los cuales se tienen: 1. Analizar: representar, razonar y matematizar, 2. Sintetizar: argumentar y comunicar. (Ver tabla 15)

2.2. BASES TEÓRICAS Y CIENTÍFICAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS CON VARIAS OPERACIONES COMBINADAS

En la presente capítulo consideran algunos aspectos teóricos relacionados con la temática de investigación, tales como: la resolución de problemas, operaciones aritméticas básicas: suma y resta, estructura de los problemas de suma y resta, tipos de problemas de suma y resta, fases de resolución de problemas y secuencia didáctica. Veremos cómo estos elementos se relacionan entre si y son de gran importancia para la generación de una propuesta didáctica que promueva en los estudiantes procesos efectivos para resolver problemas con dos operaciones matemáticas básicas: suma y resta. También se analizarán los fundamentos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas y la propuesta didáctica para la solución de Problemas Aritméticos con Varias Operaciones Combinadas (PAVOC); elementos argumentales de esta propuesta de trabajo.

2.2.1. Resolución de problemas matemáticos y su importancia

Es necesario reflexionar acerca de la resolución de problemas matemáticos. En ellos se reconoce una situación compleja, la cual implica habilidades metacognitivas por parte del profesor y del estudiante para lograr comprenderlos y solucionarlos, pero además requieren de una enseñanza explícita de las estrategias por medio del modelamiento del profesor y luego la decisión profesional y personal de “intensionar” el uso de una de ellas, de acuerdo al contexto en que se encuentre el profesor y las características de sus alumnos. Pero más allá de este hecho es necesario ser consciente que la resolución de problemas es una tarea que no debe “naturalizarse” y presentarla a los estudiantes sin más, ya que estas situaciones lo que representan es una matematización de la vida real, por lo tanto, muchas veces estos problemas no están situados en un contexto familiar o en un lenguaje cercano a los estudiantes, o la mayoría de las veces no presentan un desafío real o un interés particular para resolverlas, por lo tanto, no se involucra fácticamente a los estudiantes (Martínez, 2010).

Otra definición sobre la significación de resolución de problemas, es la que Campistrous y Rizor (2013, pág. 5) hace en su trabajo: *La Enseñanza Basada en Problemas*; allí se refieren a estos como

> “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo pero que en su solución hay, al menos, dos condiciones necesarias: la vía de solución que tiene que ser desconocida y el individuo que quiere hacer la transformación, es decir, quiere resolver el problema”.

Esto significa que se debe considerar la reestructuración o transformación del problema para hacerlo un instrumento fundamental de cambio a la situación planteada, ya que una vez que se percibe y se aprende una alternativa de solución, sumado a la metodología con la cual el docente ha explicado y enseñado al estudiante; resulta difícil que éste retome su antigua forma de resolverlo, posibilitando así la omisión del desespero y la frustración que son propios de la imposibilidad de resolver una tarea en los niños.

Hay que mencionar también que la resolución *de problemas matemáticos* y su inclusión como competencia en los estándares del Ministerio de Educación Nacional MEN, es uno de los ejes vertebrales del currículo de matemáticas en todos los niveles elementales de la enseñanza y se le considera de gran importancia en la actualidad dado que, su dificultad en el estudiante es uno de los factores asociados a los bajos resultados escolares en pruebas a nivel local y nacional como la prueba SABER e Índice Sintético de Calidad Educativa ISCE.[18]

Podemos determinar cuatro tipos de dificultades implícitas en los niños que hacen de las matemáticas algo difícil de comprender y practicar la resolución de problemas. Las cuatro categorías son:

- Dificultades de aprendizaje y de atención
- Dificultades para comprender el texto del problema
- Dificultades respecto al contexto y contenido semántico
- Dificultades en la construcción y aplicación de la estrategia aritmética

Las dificultades respecto al aprendizaje y de atención hacen referencia a estados psicológicos o trastornos relacionados con la capacidad de aprendizaje, tales como: discalculia, dislexia y

---

20. Los resultados se expresan en la Tabla 6, numeral 3.

dificultades de tipo visual. Para esta clase de dificultades es necesario el tratamiento con especialistas y el docente debe a partir de una observación minuciosa de los estudiantes, identificar y remitir a la institución correspondiente. En el siguiente cuadro se resume algunas de ellas

Tabla 10.Dificultades de aprendizaje en matemáticas

TRANSTORNO	QUÉ ES	CONEXIÓN CON LAS MATEMÁTICAS	DIFICULTADES ESPECÍFICAS
Discalculia	Condición del cerebro que afecta principalmente las destrezas matemáticas. Esta discapacidad específica del aprendizaje complica poder entender los números y los conceptos matemáticos. Otra capacidad afectada por esta condición es también la que complica entender el lenguaje matemático	Una falta de sentido numérico que afecta la habilidad para contar y dominar información matemática básica. Los niños con discalculia podrían no saber intuitivamente cómo se relacionan los números entre sí, como que 7 es mayor que 2.	Dificultad para sumar, restar y multiplicar. Dificultad para reconocer patrones y ordenar objetos por tamaño, forma y color. No poder relacionar números con situaciones de la vida real, como que el número 3 se usa para cualquier grupo que incluya tres cosas. No entender el lenguaje matemático, como el significado de “mayor que” o “menor que”. Problemas para leer la hora, gráficos u otras representaciones visuales de conceptos matemáticos

TRANSTORNO	QUÉ ES	CONEXIÓN CON LAS MATEMÁTICAS	DIFICULTADES ESPECÍFICAS
Dislexia	Una condición cerebral que afecta cómo los chicos procesan la información escrita y hablada. Esta discapacidad del aprendizaje específica dificulta conectar las letras con los sonidos que ellas producen. También causa dificultad para escribir.	Resolver problemas matemáticos implica procesar información visual y auditiva. No poder procesar palabras importantes dificulta saber qué operación matemática hay que emplear. Los chicos con dislexia puede que no sean capaces de recordar las instrucciones verbales el tiempo suficiente para poder procesarlas.	Dificultad para decodificar, entender y completar problemas matemáticos de lógica. Dificultad para recordar instrucciones con varios pasos. Dificultad para escuchar instrucciones mientras escribe. Anotaciones deficientes en la clase de matemáticas debido a problemas con la ortografía.

TRANSTORNO	QUÉ ES	CONEXIÓN CON LAS MATEMÁTICAS	DIFICULTADES ESPECÍFICAS
Dificultades del procesamiento visual	Dificultad para procesar o interpretar información visual (no se trata de un problema de visión). Las dificultades con el procesamiento visual no son lo mismo que la dislexia, pero pueden ocurrir conjuntamente y tener síntomas parecidos. Pueden generar problemas para diferenciar, con las secuencias, la memoria visual y la percepción viso-espacial	Hacer cálculos matemáticos requiere distinguir números y símbolos. Puede que los chicos no sean capaces de distinguir los símbolos de +, - e =, o números como 6 y 9. Puede que también tengan problemas para reconocer patrones, alinear problemas matemáticos e interpretar gráficos y tablas.	Errores de cálculo debido a que ignoran la función de los signos y a que confunden símbolos y números parecidos. Se "distraen" cuando se enseña usando gráficos y tablas. Errores debidos a columnas de números mal alineadas.

Fuente: tomada de: Cómo las diferentes dificultades de aprendizaje y de atención pueden causar problemas con las matemáticas, por Kate Kelly 2015.

Respecto a las dificultades descritas por Kelly, especialista en este tema, es conveniente que como maestros comprendamos las limitaciones del estudiante para el desarrollo de algunos procesos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas: cálculo, símbolos, interpretación, asociación, lenguaje matemático. Así mismo, desarrollar actividades especiales que permitan al niño su inclusión en el grupo, sirviendo de apoyo al procedimiento terapéutico correspondiente que le asigne el profesional encargado.

En cuanto a las dificultades respecto a la comprensión del texto del problema y su contenido, así mismo las relacionadas al contexto y contenido semántico, tienen que ver con diversas situaciones numéricas de transposición didáctica; es decir, poner en marcha una serie de procesos cognitivos y de razonamiento para los cuales el estudiante debe poseer las herramientas que le permitan modelar y aplicar un procedimiento, que más allá de una operación matemática mecánica, posibilite la planificación, esquematización, formulación de hipótesis, ejecución, evaluación y constatación del resultado.

Para el logro de lo expresado anteriormente, se debe identificar las características comunes acerca de las principales dificultades implícitas que enmarcan una situación problémica y generan en los estudiantes dificultades. Estas se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 11.Dificultades implícitas en la solución de problemas Martínez (2002)

El texto del problema	El tamaño del problema	El problema puede ser más o menos sencillo en función de su tamaño, número de palabras y de frases que consta. La importancia de esta variable deviene de la facilidad o dificultad con la que el texto permite reconstruir la situación que intenta resolver con el problema. Por lo cual se sugiere que el problema sea corto, bien expresado en lenguaje usual y suficientemente conocido por los niños.
	La situación de la pregunta del texto	Esta se puede presentar aislada al final del texto, o todo el texto completo es una interrogación en la que se entremezclan la información y la pregunta del problema. Para mayor facilidad, se sugiere que la pregunta debe ir al final del texto, una vez que el alumno ha reconstruido la situación con el enunciado y sin que el elemento conclusivo (pregunta) interfiera con los elementos informativos.
	Orden en la aparición de los datos	La recomendación que se ofrece en esta situación es que los problemas se comiencen a presentar con la secuencia de datos que represente el orden que se ha de seguir para su resolución.
	El tamaño de los números empleados	La investigación ha demostrado que los niños resuelven los problemas con números pequeños o muy pequeños, que los problemas que llevan números grandes o con números con los que el alumno no tiene más remedio que emplear las

		operaciones: el tamaño de los números incrementa la dificultad del problema, por lo tanto, se recomienda la graduación en el tamaño de los números, ir accediendo a los números grandes poco a poco.
Contexto y contenido semántico	Contextos	Se habla de contextos de una tarea cuando se hace referencia a las circunstancias entornos, los formatos, las instrucciones y advertencias que hacen. Pueden ser manipulativo, pictórico, simbólico y verbal.
	Sentido y significado	Existe dependencia semántica, de significado entre las oraciones del texto y las proposiciones que forman el problema. Se pueden dar los siguientes casos: -La dependencia semántica se establece entre los sujetos. -La dependencia semántica se establece entre los adjetivos que califican o determinan a los nombres del texto -La dependencia semántica depende de la relación espacial que se da entre los objetos -La dependencia semántica depende de la relación temporal que se establece en el texto del problema - La dependencia semántica queda establecida mediante verbos que aparecen en el texto - La dependencia semántica queda establecida en términos relacionales que afectan a diversas partes de la frase

La tabla anterior, es un aporte importante para el análisis de las dificultades en la solución de problemas, ya que centra la atención en los déficits que tiene los alumnos en interpretar el texto del problema y su contexto y contenido semántico. Para ello, hacen un registro concreto de cada proceso y los subprocesos que involucran el análisis, interpretar algunas de las dificultades que pueden surgir en este proceso. Este estudio, permitirá al docente, considerando un proceso de enseñanza y aprendizaje más significativo y adaptado a las necesidades de cada alumno en función de sus conocimientos, dificultades y posibilidades.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que los aportes de Polya al estudio de metodología en la resolución de problemas matemáticos es también de gran ayuda ya que su enseñanza se enfatiza en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás[19].

2.2.2. Las operaciones básicas matemáticas: suma y resta

Las operaciones básicas matemáticas son de gran importancia para el ser humano y forman parte de su vida diaria. Desde muy pequeños, los niños se ven involucrados en el uso de ellas, al

---

[19] Las aportaciones de Polya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro Cómo Plantear y Resolver Problemas que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas.

interactuar con su entorno: ven a sus familiares comprar artículos, cambiar un billete por otros de menor valoración, recibir devueltas, contar y totalizar por reagrupación, etc. Como lo asevera Salycan en su ensayo *La Importancia de las Operaciones Básicas*:

> la aportación que deja la enseñanza-aprendizaje de las operaciones básicas tiene su importancia en que ayudan a desarrollar el conocimiento lógico matemático, la creatividad, el razonamiento deductivo e inductivo; combinar conceptos conocidos para generar otros. Ayudan a comprender y solucionar problemas cuantitativos, su memorización comprensiva y la interiorización de procedimientos. (2014, pág.1)

Esto quiere decir que el desarrollo de las operaciones básicas matemáticas están estrechamente relacionadas con la resolución de problemas, dado que además del entendimiento del planteamiento y la teoría a desarrollar para resolverlo, el estudiante requiere del manejo de los algoritmos específicos que le permitan operar los números involucrados y de esta manera, que el resultado de las operaciones deberá ser coherente con la respuesta al problema. Al ejercitar ambas competencias, se logra la matematización en el niño.

Por otro lado, es evidente que las operaciones aritméticas de suma y resta, se encuentran presentes en todo momento alrededor del niño, ya que necesita siempre realizar una operación, un cálculo, o un razonamiento lógico en situaciones cotidianas, para programar o para cualquier técnica que quieras aprender o manejar. Mediante la adición, el niño es capaz de solucionar situaciones en las que se realizan actividades como agrupar, agregar o comprar. Al mismo tiempo, la sustracción le permite solucionar situaciones en las que es necesario quitar, comparar y buscar diferencias. Así pues, como lo asevera Maza (2006, pág. 21)

> la cuantificación de las situaciones aditivas y sustractivas que nos rodean corresponden fundamentalmente a una acción descriptiva, mientras que las operaciones aritméticas de suma y resta remiten a una acción transformadora por la que dos situaciones interactúan para dar lugar a una nueva situación que de nuevo se describe numéricamente

Se puede afirmar, que sumar y restar es vital ya que permite al estudiante el uso de las relaciones aditivas y sustractivas en la solución de situaciones problémicas dentro y fuera del contexto de las matemáticas, es decir, de forma voluntaria o involuntaria, el estudiante matematiza el conocimiento y lo aplica en su quehacer diario.

2.2.3. Tipos de problemas de suma y resta

La resolución de problemas ha sido objeto de estudios profundos en los últimos años, con el propósito de identificar necesidades de didáctica y metodología por parte de los docentes para su enseñanza, que permitan pasar de enunciados rutinarios que los estudiantes resuelven de forma mecánica, a ser, situaciones contextualizadas que provoquen y activen el trabajo mental del estudiante. Por otra parte, es importante conocer el concepto y la clasificación de los problemas de estructura aditiva, según la cual, son considerados por Vergnaud (2010) como *"las estructuras o las relaciones matemáticas en juego que solo están formadas de adiciones o sustracciones"*, esto significa, aquellos problemas que requieren de una suma o una resta para su resolución. Por otro lado, es posible reconocer la clasificación y estructura particular de los problemas matemáticos aditivos; según Nesher (1999), investigadores como Carpenter, Moser, Romberg, Riley, De Corte y Verschaffel, entre otros, han estudiado los enunciados de los problemas aritméticos verbales agrupándolos en categorías, de acuerdo a su estructura semántica.

Al respecto, Pérez y Ramirez (2008), citan a Poggioli (1999), quien incluye el estudio desarrollado por Carpenter y Moser donde se clasifican los problemas en términos de las siguientes operaciones básicas: cambiar, combinar, comparar e igualar. Las autoras, al respecto afirman que

> esta taxonomía de problemas verbales de adición y sustracción es compartida por los diversos investigadores, que ha llevado a producir una clasificación dentro de cada categoría, en función del nivel de dificultad de los problemas agrupados en cada una de ellas. (Pág.176)

En el siguiente, se describen las cuatro categorías de problemas de tipo verbal señalados anteriormente.

Tabla 12.Clasificación de los problemas de tipo verbal, según Carpenter y Moser (1984)[20]

Cuadro 1. Clasificación de problemas de tipo verbal, según Carpenter y Moser (1984)

CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN	SUBCATEGORÍA	EJEMPLO
Cambio	Los problemas de cambio se caracterizan por la presencia de una acción de transformación aplicada sobre una cantidad inicial, la cual experimenta un cambio (aumento o disminución) y resulta una cantidad final.	Cambio 1 (Aumento.Se pregunta por conjunto final).	Connie tenía 5 metras. Jim le dio 8 más. ¿Cuántas metras tiene Connie en total?.
		Cambio 2 (Disminución. Se pregunta por conj. final).	Connie tenía 13 metras. Le dio 5 a Jim. ¿Cuántas metras le quedan?.
		Cambio 3. (Aumento. Pregunta acerca del cambio).	Connie tiene 5 metras. ¿Cuántas metras más necesita para tener 13?.
		Cambio 4. (Disminución Pregunta acerca del cambio).	Connie tenía 13 metras. Le dio algunas a Jim y ahora le quedan 8. ¿Cuántas metras le dio Connie a Jim?
		Cambio5. (Aumento. Pregunta acerca del conjunto inicial).	Connie tenía algunas metras. Jim le dio 5 más y ahora tiene 13 metras. ¿Cuántas metras tenía Connie al principio?
		Cambio 6. (Disminución Pregunta acerca del conjunto inicial).	Connie tenía algunas metras. Le dio 5 a Jim. Ahora le quedan 8. ¿Cuántas metras tenía Connie°° al principio?.
CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN	SUBCATEGORÍA	EJEMPLO
Combinación	Se caracterizan por la presencia de dos cantidades que pueden considerarse aisladamente o como partes del todo, sin que exista ningún tipo de acción.	Combinación 1. (Pregunta sobre el conjunto unión o total).	Connie tiene 5 metras rojas y 3 azules. ¿Cuántas metras tiene en total?.
		Combinación 2. (Pregunta sobre un subconjunto o parte).	Connie tiene 13 metras. Cinco son rojas y el resto es azul. ¿Cuántas metras azules tiene Connie?
Comparación	En este tipo de problemas se establece una relación comparativa entre dos cantidades distintas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas o bien para hallar una cantidad desconocida a partir de una conocida y la relación entre ellas.	Comparación 1 (usando "más" Pregunta sobre conjunto diferencia).	Connie tiene 13 metras y Jim tiene 5. ¿Cuántas metras más tiene Connie que Jim?
		Comparación 2 (usando "menos" Pregunta sobre conjunto diferencia).	Connie tiene 13 metras y Jim tiene 5. ¿Cuántas metras menos tiene Jim que Connie?.
		Comparación 3 (usando "más" Pregunta sobre lo "comparado").	Jim tiene 5 metras. Connie tiene 8 más que Jim. ¿Cuántas metras tiene Connie?.
		Comparación 4 usando "menos" Pregunta sobre lo "comparado").	Jim tiene 5 metras. Él tiene 8 metras menos que Connie. ¿Cuántas metras tiene Connie?
		Comparación 5 (usando "más" Pregunta sobre el referente).	Connie tiene 13 metras. Ella tiene 5 metras más que Jim. ¿Cuántas metras tiene Jim?.
		Comparación 6 (usando "menos" Pregunta sobre el referente).	Connie tiene 13 metras. Jim tiene 5 metras menos que Connie. ¿Cuántas metras tiene Jim?.
Igualación	Contienen elementos de los problemas de cambio y comparación. En ellos se presenta una acción implícita basada en la comparación de dos cantidades distintas.	Igualación 1	Connie tiene 13 metras. Jim tiene 5. ¿Cuántas metras tiene que ganar Jim para tener tantas metras como Connie?.
		Igualación 2	Connie tiene 13 metras. Jim tiene 5. ¿Cuántas metras tiene que perder Connie para tener tantas como Jim?.
		Igualación 3	Jim tiene 5 metras. Si él gana 8, tendrá el mismo número de metras que tiene Connie. ¿Cuántas metras tiene Connie?.
		Igualación 4	Jim tiene 5 metras. Si Connie pierde 8 metras, tendrá tantas metras como Jim. ¿Cuántas metras tiene Connie?.
		Igualación 5	Connie tiene 13 metras. Si Jim gana 5 metras, tendrá tantas metras como Connie. ¿Cuántas metras tiene Jim?.
		Igualación 6	Connie tiene 13 metras. Si ella pierde 5, tendrá tantas metras como Jim. ¿Cuántas metras tiene Jim?

Elabora y adaptado de Poggioli (1999); Bethencourt (1994); y Nesher (1999)

[20] La numeración de la tabla: cuadro 1 del texto original, se ha cambiado por efectos de orden y numeración al ser referenciados en el trabajo por Tabla 9.

2.2.4. La resolución y formulación de problemas matemáticos y sus procesos específicos

El procedimiento y resolución de un problema, es un proceso que requiere de otros subprocesos específicos para su concreción. Entre los diversos autores existen varias estrategias propuestas para el desarrollo de problemas, aunque se debe aclarar que, no existe una fórmula aplicable a todos los casos de problemas. A continuación se presentan algunas estrategias y sus procesos, desde el punto de vista de cada autor

Polya (1945), propone cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, estas son: comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar los resultados. Estos pasos se pueden asociar, según el autor con los procesos de comprender, idear, ejecutar y examinar.

La OCDE (PISA 2003), orienta sus evaluaciones a que los estudiantes participantes de la prueba, demuestren capacidad para razonar matemáticamente en la solución de problemas cotidianos. Para lograr esto, expresa que es necesario el desarrollo de los procesos de razonamiento, análisis y comunicación de operaciones matemáticas, los cuales se organizan en niveles de complejidad progresiva, a los cuales PISA denomina: reproducción, conexión y reflexión.

Por su parte Espinoza Salfate et. Al. (2009, pág. 41), afirma que la resolución de problemas involucra procesos como: entender el problema, modelizar, desarrollar y/o adaptar estrategias, aplicar estrategias, interpretar respuestas y formular nuevos problemas. Para el desarrollo de estos procesos, se plantea una estrategia basada en la resolución de problemas tipo PISA, donde se estructuran en los tres niveles mencionados: reproducción, conexión y reflexión.

García et al (2015), los procesos considerados para la solución de problemas matemáticos son: representar (codificar, decodificar y traducir), razonar, matematizar, argumentar y comunicar.

Solar et al (2015), destaca y propone para su modelo de competencia matemática(MCM), tener en cuenta procesos tales como la modelización, resolución de problemas, argumentación, razonamiento y comunicación; aclara que dichos procesos son diferentes de los contenidos matemáticos y son transversales a los objetos matemáticos, desarrollados a largo plazo en el currículo de forma cíclica.

Puyg y Cerdán (1990), abordan un procedimiento teniendo en cuenta dos etapas: el *Análisis*, o camino propuesto por el profesor a sus estudiantes para llevarlos de la incógnita a los datos del problema. Es progresivo y proporciona al niño un plan de solución del problema mediante la esquematización. La segunda etapa: *Síntesis*, la cual parte del plan de solución que aporta la etapa de análisis, orientando al alumno para la obtención de la solución.

Para la propuesta de diseño e investigación del trabajo, se escogió el procedimiento de Puig y Cerdán asociado al de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau: por ser innovadoras y centrarse en el objetivo de la propuesta de grado, la implementación de una secuencia didáctica para la resolución de problemas que involucran dos operaciones matemáticas combinadas: suma y resta.

2.3. LOS PROBLEMAS CON ESTRUCTURA ADITIVA

Las estructuras aditivas según la Mgtr. en matemática Alicia Bruno en su conferencia *Estructuras aditivas* (Bruno; 2000: pág. 1) modelan situaciones cotidianas e implican la resolución de problemas aditivos (conocidos como problemas aditivos de enunciado verbal, PAEV). También son situaciones numéricas que se describen con una adición a + b = c. Además, cada estructura aditiva de la forma a + b = c, da lugar a tres problemas aditivos simples, dependiendo de cuál de las tres anteriores cantidades se convierta en incógnita. Diremos que los problemas son de incógnita 1, 2, ó 3 según que la incógnita sea a, b o c, respectivamente I1 (incógnita 1), I2 (incógnita 2), I3 (incógnita 3).

Las estructuras tienen tres tipos de variables, estos son los *estados*, las variaciones y las comparaciones. Los primeros expresan la medida de una cantidad de una magnitud en un cierto instante, por ejemplo: La temperatura es 5 grados sobre cero. Los segundos, expresan los cambios que producen en una función *estado* con el transcurso del tiempo, por ejemplo: La temperatura subió 8 grados. Los terceros, expresan la diferencia entre dos estados, por ejemplo: tengo 15 pesos más que Juan (Pags. 8-10).

"Las estructuras más usuales en la enseñanza de los problemas aditivos son las tradicionalmente conocidas como Cambio, Combinación, Comparación e Igualación" (págs. 7, 9 y 10). La primera de ellas es cambio o variación de *estado,* se explica así: *Estado* inicial + variación = *estado* final, simbólicamente expresado como sigue: ei + v = ef; por ejemplo: En la bodega de cierto almacén se tenían 252.410 cajas de panela. Se compró 273.768 cajas más ¿Cuántas cajas se tienen ahora?, en este problema la incógnita a resolver es el *estado* final. El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es la variación: En el camino al colegio se han pavimentado trescientos cuarenta y tres metros. La vía entera debe tener mil doscientos veintitrés metros ¿Cuántos metros de vía faltan por pavimentar? El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es el *estado* inicial: Una panadería ha vendido varios panes por la mañana y por la tarde vende trescientos siete panes. Al final del día se han vendido quinientos panes. ¿Cuantos se vendieron por la mañana?

La segunda estructura es la combinación o combinación de *estados*, se explica así: Estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total, simbólicamente expresado como sigue: e1 + e2 = et; cada uno de los elementos de la estructura aditiva se puede presentar como incógnita a resolver, por ejemplo veamos el siguiente problema en el que la incógnita a resolver es estado total: En el centro de abastos CAVASA, se tienen 10.500 racimos de plátano verde y 7475 racimos de plátano maduro ¿Cuántos racimos de plátano se tienen en total? El siguiente es un ejemplo en el que el problema a resolver es hallar la incógnita de estado parcial 2: En un bus del MIO caben ochenta pasajeros. Sentados pueden estar treinta y cuatro, y el resto de pie. ¿Cuántos pasajeros están de pie? El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es el estado parcial 1: En un salón de clase hay cuarenta estudiantes entre niños y niñas. Si veinticinco de los estudiantes son niñas. ¿Cuántos serán niños?

La tercera estructura es la Comparación o comparación de estados, se explica asi: estado 1 + comparación = estado 2, simbólicamente expresado como sigue: e1 + c = e2; por ejemplo: Simón tiene 563.593 pesos y Jonás tiene 110.795 pesos más que Simón ¿Cuántos pesos tiene Jonás (pág. 10), en este problema la incógnita a resolver es *estado* 2. El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es la comparación: Laura tiene ochenta y dos años, cuatro menos que Eulalio. ¿Cuántos años tiene Eulalio? El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es el *estado* 1: La diferencia en edades entre Laura y Eulalio es de cuatro años, si Eulalio tiene noventa y seis años. ¿Cuántos años tiene Laura?

La cuarta estructura es dos cambios o combinación de variaciones sucesivas, se explica así: variación 1+ variación 2 = variación total, simbólicamente expresado como sigue: v1+ v2 = vt; por ejemplo: Jonás ganó 20.834 pesos por la mañana y ganó 14. 345 pesos por la tarde ¿Cuántos pesos Jonás a lo largo del día?, en este problema la incógnita a resolver es variación total (pág. 10). El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es variación 2: James y Cristiano pudieron marcar 37 goles en la temporada 2016 – 2017. Si james marcó 17 goles ¿cuantos goles marco Cristiano? El siguiente es un ejemplo en el que la incógnita a resolver es variación 1: Una lechonería vendió 300 platos en todo el día. Si en la tarde vendió 197 platos ¿Cuántos platos vendió en la mañana?

A continuación, aparece un resumen de los tipos de problemas en la tabla 10 y en la tabla 11 aparece la síntesis con sus respectivos ejemplos.

Tabla 13.Notación de los problemas aditivos (Estructuras e Incógnitas)

Incógnita Estructura	I1	I2	I3
Cambio	¿? + v = ef Cambio1	ei + ¿? = ef cambio2	ei + v = ¿? Cambio3
Combinación	¿? + e2 = et Combinación1	e1 + ¿? = et Combinación2	e1 + e2 = ¿? Combinación3
Comparación	¿? + c = e2 Comparación1	e1 + ¿? = e2 Comparación2	e1 + c = ¿? Comparación3
Dos cambios	¿? + v2 = vt Dos cambios1	v1 + ¿? = vt dos cambios2	v1 + v2 = ¿? Dos cambios3

Fuente: (Bruno; 2000: pág. 11).

Tabla 14.Síntesis de problemas aditivos con sus respectivos ejemplos

Variables **Estructura**	**V1**	**V2**	**V3**
cambio	**Estado inicial (ei)**	**Variación (v)**	**Estado final (ef)**
Ejemplo 1: Una librería tenía 532.410 libros. Compró 273. 765 libros más ¿Cuántos libros tiene ahora?	Librería tenía 532.410 libros.	Compró 273.765 libros más	¿?
Ejemplo 2: En el camino al colegio se han pavimentado trescientos cuarenta y tres metros. La vía entera debe tener	En el camino al colegio se han pavimentado trescientos cuarenta y tres metros.	¿?	La vía entera debe tener mil doscientos veintitrés metros.

mil doscientos veintitrés metros ¿Cuántos metros de vía faltan por pavimentar?			
Ejemplo 3: Una panadería ha vendido varios panes por la mañana y por la tarde vende trescientos siete panes. Al final del día se han vendido quinientos panes. ¿Cuantos se vendieron por la mañana?	¿?	Por la tarde vende trescientos siete panes.	Al final del día se han vendido quinientos panes.

Combinación	**Estado parcial 1 (e1)**	**Estado parcial 2 (e2)**	**Estado total (et)**
Ejemplo 1: En el centro de abastos CAVASA, se tienen 10.500 racimos de plátano verde y 7.475 racimos de plátano maduro ¿Cuántos racimos de plátano se tienen en total?	En el centro de abastos CAVASA, se tienen 10.500 racimos de plátano verde.	7.475 racimos de plátano maduro.	¿?

Ejemplo 2: En un bus del MIO caben ochenta pasajeros. Sentados pueden estar treinta y cuatro, y el resto de pie. ¿Cuántos pasajeros están de pie?	Sentados pueden estar treinta y cuatro.	¿?	En un bus del MIO caben ochenta pasajeros.
Ejemplo 3: En un salón de clase hay cuarenta estudiantes entre niños y niñas. Si veinticinco de los estudiantes son niñas. ¿Cuántos serán niños?	¿?	Si veinticinco de los estudiantes son niñas.	En un salón de clase hay cuarenta estudiantes entre niños y niñas.

Comparación	**Estado 1 (e1)**	**Comparación (c)**	**Estado 2 (e2)**
Ejemplo 1: Simón tiene 563.593 pesos y Jonás tiene 110.795 pesos más que Simón ¿Cuántos pesos tiene Jonás	Simón tiene 563.593 pesos.	Jonás tiene 110.795 pesos más que Simón.	¿?
Ejemplo 2: Laura tiene ochenta y dos años, cuatro menos que	Laura tiene ochenta y dos años.	¿?	Laura tiene ochenta y dos años, cuatro menos que Eulalio.

Eulalio. ¿Cuántos años tiene Eulalio?			
Ejemplo 3: La diferencia en edades entre Laura y Eulalio es de cuatro años, si Eulalio tiene noventa y seis años. ¿Cuántos años tiene Laura?	¿?	Eulalio tiene noventa y seis años.	La diferencia en edades entre Laura y Eulalio es de cuatro años.

Dos cambios	**Variación 1 (v1)**	**Variación 2 (v2)**	**Variación total (vt)**
Ejemplo 1: Jonás ganó 20.834 pesos por la mañana y ganó 14. 345 pesos por la tarde ¿Cuántos pesos Jonás a lo largo del día?	Jonás ganó 20.834 pesos por la mañana.	Ganó 14. 345 pesos por la tarde	¿?
Ejemplo 2: James y Cristiano pudieron marcar 37 goles en la temporada 2016 – 2017. Si James marcó 17 goles ¿Cuántos goles marco Cristiano?	James marcó 17 goles	¿?	James y Cristiano pudieron marcar 37 goles en la temporada 2016 – 2017.

Ejemplo 3: Una lechonería vendió 300 platos en todo el día. Si en la tarde vendió 197 platos ¿Cuántos platos vendió en la mañana?	¿?	En la tarde vendió 197 platos	Una lechonería vendió 300 platos en todo el día.

Fuente: Elaboración propia.

2.4. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

La actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”. Por ejemplo, los números naturales se pueden representar con material como palillos (|||| |||||), con puntos, con gráficas, y también con el sistema de notación decimal, que tiene un signo algo extraño, el cero (Duval, 2006, Pág. 144).

Esto es, los estudiantes puedan reconocer los números naturales en diferentes registros de representación lo cual mejora su comprensión y uso.

> así mismo, los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran.
>
> (1)Lo que importa es su propiedad de transformación porque *el procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas.

> En matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo. Además esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una "mediación semiótica" sino "mediaciones semióticas" bastante diferentes.
>
> (2)La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras la actividad matemática requiere una *coordinación interna,* que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto (Pág. 145).

Con esto se quiere decir, que las representaciones semióticas siempre están presente en la matemática. En el caso particular de las estructuras aditivas, los enunciados verbales con los cuales se expresan las situaciones cotidianas es un registro y se debe llevar al mundo de las matemáticas pasándolo a un registro simbólico. La actividad matemática debe garantizar esa coordinación.

Habría que decir también, que en el análisis de cualquier actividad matemática se debe tener en cuenta dos clases de transformación que son conversión y tratamiento. En la primera es cambiando el sistema semiótico (el registro) usado sin cambiar los objetos indicados. En el segundo se da manteniendo el mismo sistema semiótico (Pág. 146). Esto es, en la transformación de conversión los niños deben tomar situaciones de la vida cotidiana y pasarlas a las matemáticas, es decir, hay un cambio de registro. En la transformación de tratamiento se da en el mismo registro de representación.

Para comprender mejor los fenómenos matemáticos de representación y conversión en matemáticas podemos analizar los siguientes ejemplos:

Ejemplo de conversión

Sistemas de representación	
Verbal	Numérica
Una panadería ha vendido varios panes por la mañana y por la tarde vende trescientos siete panes. Al final del día se han vendido quinientos panes. ¿Cuantos se vendieron por la mañana?	a + 307 = 500

Ejemplo de tratamiento

a + 307 = 500

a = 500 – 307

a = 193

2.5. FENOMENOLOGÍA DEL OBJETO MATEMÁTICO

Para entender el concepto de fenomenología respecto al objeto matemático, es importante los aportes que al respecto hace el matemático Hans Freudenthal, quien es citado por Rico (1997) y plantea que

> las matemáticas son un instrumento cognitivo (conocimiento público) para organizar, estructurar y matematizar partes de la realidad. Mediante este organizar, estructuras y matematizar cada individuo se apropia personalmente de las matemáticas. Por tanto, hay que buscar aquellos fenómenos del entorno de los niños que puedan matematizarse mediante ciertas partes de las matemáticas. Hay que volver a la historia, en particular, y comprobar cómo fue descubierta mediante ensayo y error en su época. Descubrir cómo las matemáticas organizan los fenómenos, etc. Mostrar como las cosas pensadas (noumena) describen los fenómenos (phenomena), los analizan y los hacen accesibles para el pensamiento y el cálculo, ayudan a entenderlos mejor, permiten predecirlos, etc. Esto se denominó fenomenología, el método fenomenológico como lo vió H.F. (pág. 1 y 2).

Teniendo en cuenta las ideas del autor, podemos decir que: los niños deben tomar situaciones del mundo real preferiblemente cotidiano y pasarlas a las matemáticas para darles solución. Además de esto, Freudenthal afirma que

> la fenomenología de los conceptos, estructuras e ideas matemáticas significa su descripción mediante sus relaciones con los fenómenos para los que fueron creados y

> a los que se ha extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad; en tanto que implica en el proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, se trata de Fenomenología Didáctica, un camino para mostrar al profesor los lugares por donde el aprendiz debe caminar en el proceso de aprendizaje humano (Pág. 2).

Esto significa que la didáctica se encarga de la enseñanza, su fenomenología y todo lo que sucede en ese proceso de enseñanza-aprendizaje, como lo sostiene Rico, quien explica

> los conceptos son el núcleo de nuestras estructuras cognitivas. Pero en las actuaciones usuales no se consideran como materia de enseñanza. Aunque los niños aprendan lo que es una silla, lo que es un alimento o la salud, no se les enseñan los conceptos de silla, alimento y salud. Las matemáticas no son diferentes. Los niños aprenden lo que es un número, lo que es un círculo, lo que es sumar, lo que es trazar una gráfica. Ellos lo captan como objetos mentales y los utilizan en actividades mentales. Es un hecho que los conceptos de número y círculo, de suma y trazado de gráficas son susceptibles de mayor precisión y claridad que los de silla, alimento y salud. Por ello, es usual que los profesores prefieran enseñar el concepto de número antes que los números y, en general, los conceptos antes que los objetos y actividades mentales. Se debe agregar que, las matemáticas surgen de los fenómenos: abstraen, organizan y estructuran grandes familias de fenómenos, dando lugar a los conceptos matemáticos (pág. 2).

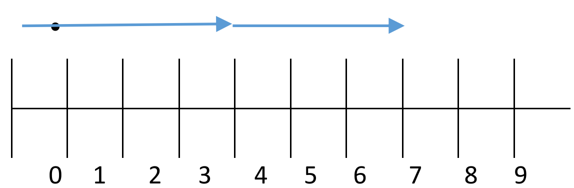
Esto significa que en matemáticas se les da prioridad a los conceptos antes que a los objetos y actividades mentales debido a la precisión que se requiere para poder operar con ellos. Otro aspecto que expone el autor es la relación de la fenonomenología con los conocimientos. En este punto argumenta que

> en relación con la fenomenología de los conocimientos, hay que reconocer y distinguir mediante ejemplos los diferentes fenómenos y situaciones en los que se utilizan los números naturales: Secuencia, recuento, cardinalidad, medida, ordinalidad, código o símbolo, representación figurativa y operatividad (Pág. 2).

Con esto se quiere decir, que la fenomenología se puede dar en las matemáticas a través de los diferentes conocimientos matemáticos, sus representaciones y también en las diversas estrategias y procesos de pensamiento.

En la siguiente tabla encontramos ejemplos de representaciones semióticas de las estructuras aditivas.

Tabla 15.Ejemplos de representaciones semióticas para las estructuras aditivas

Representaciones semióticas	Estructura aditiva
verbal	José tenía 4 lápices. Le regalaron 3 lápices más ¿Cuántos lápices tiene ahora?
Pictórica	
Recta numérica	
Simbólica	+
Numérica	4 + 3= 7

Fuente: Elaboración propia

2.6. PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS COMO BASE PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS

El MEN en los lineamientos curriculares de 1998 plantea que el pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera (Pág. 26). Es decir, pensamiento numérico es sentido numérico, operacional, habilidades y destrezas numéricas, comparaciones, estimaciones, ordenes de magnitud, etc. Es otras palabras es un concepto mucho más amplio.

En los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989), sentido numérico es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número" (página 38). Los autores de estos estándares afirman que los niños con sentido numérico comprenden los números y sus múltiples relaciones, reconocen las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos, y han desarrollado puntos de referencia para cantidades y medidas (Pág. 26).

Es necesario aclarar que, en este punto cuando se menciona Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989), se trata de un referente que tomo el MEN para formular los Lineamientos Curriculares de 1998.

En este sentido Mcintosh (1992) amplía este concepto y afirma que "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". Así se refleja una inclinación y una habilidad para usar números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información, y se crea la expectativa de que los números son útiles y de que las matemáticas tienen una cierta regularidad (Pág. 26).

Es decir, con el pensamiento numérico se busca que el niño comprenda los números, adquiera la habilidad para operar con ellos y así pueda comunicar, procesar e interpretar información de la vida cotidiana, las matemáticas y en otras ciencias. Así mismo los sistemas son el conjunto de números y sus operaciones. Para el caso particular de esta propuesta didáctica es el conjunto de los números naturales y sus operaciones.

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático. En particular es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos. La invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas. Cuando se usa un algoritmo ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora, el pensamiento numérico es importante cuando se reflexiona sobre las respuestas (Pág. 26).

Es necesario recalcar que, el pensamiento numérico no se alcanza en un nivel escolaridad, sino que se hace de manera sucesiva a través de los diferentes grados que cursa el niño en su formación donde tiene la oportunidad de usar números y operaciones en diferentes contexto de la vida cotidiana.

Otras situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hacen referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes interpretaciones y representaciones, a la utilización de su poder descriptivo, al reconocimiento del valor (tamaño) absoluto y relativo de los números, a la apreciación del efecto de las distintas operaciones, al desarrollo de puntos de referencia para considerar números. En general estos puntos de referencia son valores que se derivan del contexto y evolucionan a través de la experiencia escolar y extraescolar de los estudiantes. Otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables (Pág. 26).

Conviene subrayar, que el pensamiento numérico está presente en la formulación y resolución de problemas con la utilización de los números y sus operaciones.

El contexto mediante el cual se acercan los estudiantes a las matemáticas es un aspecto determinante para el desarrollo del pensamiento, por tanto, para la adquisición del sentido numérico es necesario proporcionar situaciones ricas y significativas para los alumnos.

Claramente, el pensamiento numérico es a veces determinado por el contexto en el cual las matemáticas evolucionan, por ejemplo, mientras un estudiante en la escuela no se incomoda porque 514 sea la suma de 26 + 38, el mismo estudiante en una tienda puede exigir que se le revise la cuenta si tiene que pagar $5140 por dos artículos cuyos precios son $260 y $380. Para otro estudiante resulta más fácil decir que en 1/2 libra de queso hay más que en 1/4 de libra, que determinar cuál es mayor entre 1/4 ½ (Pág. 26).

Con esto se quiere decir, que se deben proporcionar al estudiante situaciones de su vida cotidiana que les sean significativas y de esta manera puedan desarrollar el pensamiento numérico.

2.7. PERSPECTIVA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS EN BÁSICA PRIMARIA

La perspectiva didáctica hace referencia a dos puntos esenciales: el primero es la relación competencia matemática – actividad matemática de aprendizaje del estudiante. Esto es, el desarrollo de la competencia está enfocado al estudiante, a la calidad de su actividad matemática y no a la enseñanza; el segundo son las dos expectativas de aprendizaje que coexisten y se complementan en el desarrollo de las competencias: "Las expectativas a corto plazo relacionadas con los objetivos de las tareas matemáticas, de la clase, de la unidad o del período académico; y, de otro lado, las expectativas de aprendizaje a largo plazo que hacen referencia al desarrollo mismo de las competencias matemáticas del estudiante". (García et al; 2015, pág. 41).

Cabe anotar que la primera expectativa es la ruta, el medio, la forma como se puede avanzar de una manera coherente y planificada hacia la segunda. Es decir, es necesario articular los objetivos y las competencias en términos de expectativas de aprendizaje. Esta concepción didáctica orienta los procesos dando una mejor organización curricular a las matemáticas y reconceptualiza profundamente las prácticas de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en los niños.

Se puede concluir que la perspectiva didáctica de las competencias matemáticas se focaliza en la competencia del profesor y del estudiante para planificar, ejecutar y evaluar la adecuada y oportuna articulación de las dos expectativas de aprendizaje que no es otra cosa que articular objetivos, tareas, procesos y competencias. (García et al; 2015, pág. 44).

2.7.1. Expectativas de aprendizaje a corto plazo

El desarrollo de competencias requiere de un proceso a largo plazo. Para esto, se hace necesario de una planificación de este desarrollo desde el aula, en términos de “expectativas” a corto plazo (posibilidades, perspectivas, esperanzas, intereses, etc.). Estas expectativas se relacionan con los objetivos que se formulan para las tareas matemáticas y contempla el diseño de tareas, movilización del estudiante a encontrar recursos y apartar respuestas, promover la metacognición para el éxito de la acción. Esto hace que el rol de los objetivos cambie, desarrollándose no en término de conocimientos sino, en término de actuaciones. Se pasa así de una lógica de contenidos a una lógica de acción. (García et al; 2015, pág. 43).

En el caso de las expectativas de aprendizaje a corto plazo para las operaciones de adición y sustracción, se busca que los estudiantes analicen, representen, resuelvan, argumenten, justifiquen y formulen diferentes clases de problemas con dichas operaciones; para ello, se proponen actividades de matemática que desarrollen procesos matemáticos que movilicen una mayor riqueza cognitiva, afectiva, de tendencia de acción y metacognición.

2.7.2. Expectativas de aprendizaje a largo plazo

El desarrollo de las competencias matemáticas, es un proceso complejo y prolongado. Como todo proceso de formación humano, se promueve a lo largo del tiempo. Los estudiantes en actividad matemática de aprendizaje, resuelven tareas complejas que les requieren desarrollar procesos cognitivos, metacognitivos, afectivos y de tendencia de acción con niveles crecientes de complejidad que no se consiguen a corto plazo, requiere un tiempo de maduración y de apropiación de la disciplina y de las formas más adecuadas de trabajo en las clases de matemáticas. (García et al, 2015, pág. 43).

Por otro lado, esta cultura matemática representa un conjunto de significados socialmente compartidos y decantados a lo largo de la historia de la humanidad. Ningún proceso de enculturación es espontáneo y lineal, todo lo contrario, es prolongado, complejo y sus resultados solo son apreciados a largo plazo. Esto nos indica que las expectativas a largo plazo, como procesos de formación humana y de enculturación, nunca terminan, son continuos y dinámicos, nadie será absolutamente competente ni incompetente, siempre habrá evolución, movilización, desarrollo.

Por otro lado, los procesos matemáticos están en la base de las competencias. Desarrollar procesos como el de comprender, idear, ejecutar y examinar; requieren un tiempo de formación y conocimiento de la cultura matemática. Ello implica el desarrollo de habilidades y pragmática de uso que se ponen en juego al resolver tareas complejas. Además, no se puede dejar de lado lo relacionado con el lenguaje de las matemáticas: para leer y escribir matemáticas, es básico comprender el proceso de representar en matemáticas. Esto requiere la capacidad del estudiante para codificar, decodificar traducir y objetivar La cultura matemática. Es decir, conocer, comprender y usar sus conceptos, estructuras y procesos matemáticos.

Lo expuesto anteriormente, nos da una idea de lo que significan las expectativas a largo plazo y su importancia para desarrollar verdadera competencia matemática. Los objetivos se formulan en término de actuaciones y metas específicas a corto plazo, relacionándose con los contenidos, tareas y procesos también específicos. La calidad de la actividad matemática de aprendizaje conduce al estudiante a alcanzar los objetivos y desarrollar los procesos requeridos. Los objetivos alcanzados, van mostrando las evidencias de los procesos desarrollados y capacidades matemáticas del estudiante. La continuidad, persistencia y complejidad creciente de los procesos específicos conducen al desarrollo de capacidades cognitivas, afectivas y de tendencia de acción del estudiante a lo largo de su escolaridad. Es decir, a partir del cumplimiento de las expectativas de aprendizaje a corto plazo se alcanzan las expectativas a largo plazo, esto es, el desarrollo de las competencias matemáticas del estudiante. (García et al; 2015, pág. 44).

2.7.3. Las tareas matemáticas

Una tarea matemática es la representación de un trabajo matemático, el cual hace uso de diversos objetos y procedimientos establecidos para su resolución. Esta labor genera en el estudiante una situación problémica que a través de preguntas, le exige el desarrollo de una serie de hipótesis, procedimientos, argumentos, aplicaciones que permitan lograr solucionarla. Para el desarrollo efectivo de estas tareas matemáticas, el maestro necesita una planeación efectiva de la metodología que oriente la labor del alumno, de lo contrario, estas carecerán de significación y pueden generar dificultades en la aprehensión del conocimiento matemático. Como lo afirma Herbst, 2012 *las alteraciones que el maestro inflige a las tareas obedecen a necesidades en la gestión de los procesos de instrucción; en particular a la necesidad de encontrar un entorno de trabajo viable y a la necesidad de darle un valor al trabajo hecho.*

A continuación se estudia la estructuración de las tareas matemáticas desde la propuesta de las Situaciones Didácticas.

2.8. LAS TAREAS MATEMÁTICAS CON BASE EN LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Desde el surgimiento de la didáctica en la década de los 70, como alternativa que pretendía explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje, en contraposición a las teorías de la época basadas en la epistemología Piagetiana; la teoría de las situaciones didácticas logra gran aceptación entre docentes e investigadores que ven en ella un saber constituido entre docente y estudiantes, los cuales ordenan sus actividades y conocimientos bastante cercanos a lo erudito, en tareas matemáticas que le permiten ir ascendiendo en nivel y complejidad. Refiriendo la importancia de las situaciones didácticas, podemos decir que se contempla como uno de los modelos de la didáctica de amplia aplicación a las matemáticas, como lo afirma Godino (2011)

> en los países desarrollados la didáctica de las matemáticas ha adquirido un reconocimiento sólido, como se muestra en la constitución de departamentos universitarios, el desarrollo de programas de maestría y doctorado específicos, la publicación de revistas especializadas, etc. Esta situación es todavía muy precaria en los países en vías de desarrollo, si bien hay algunas notables excepciones, como ocurre en México con el CINVESTAV. Esta visión delos procesos educativos, donde se le da un espacio importante a la didáctica ha hecho que se formulen tesis de grado con aplicación de situaciones didácticas con resultados alentadores. (Pág.1)

La teoría de las situaciones didácticas es una teoría de la enseñanza, basada en la hipótesis de que los conocimientos matemáticos no se construyen espontáneamente y busca las condiciones para una génesis artificial de los mismos. Existe una visión de la enseñanza y aprendizaje de la matemática colaborativo, que le dan ciertos rasgos de constructivista, en el cual la comunidad educativa interactúa en la resolución tareas matemáticas, produciéndose de ello saberes matemáticos en clase, determinantes de los saberes que los estudiantes aprenden o no.

> Expresado en palabras de Brousseau (1997), es "*la búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus*

efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento así como la idea que tienen de las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica".

Los didactas que comparten esta concepción de la didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. Argumentan, que para basar ese enfoque, el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza, siempre ha formado parte de la actividad del matemático, de igual modo la búsqueda de tareas, problemas y situaciones que requieran para su solución una noción matemática o un teorema.

Esta postura de Brousseau, lleva a recontextualizar el saber desde esta postura en las aulas, para desarrollar un proceso de renovación del saber, es decir, el conocimiento adquiere sentido para el alumno, sólo cuando lo relaciona con situaciones cotidianas de su acción y responde a las situaciones planteadas; sin embargo, también es preciso comprender que los saberes aplicados son también válidos para otras situaciones, por lo que adquieren un carácter universal. En este sentido, la interacción que se establece entre el estudiante, el medio escolar y el docente, va a depender del tipo de tarea matemática asignada y del propósito didáctico que se persigue, determinando diversas posturas y relaciones.

En la teoría de Brousseau se distinguen tres tipos de situaciones o tareas didácticas:

- **Situación acción:** se dan entre el estudiante y un medio (material o simbólico), en ella, el alumno pone de manifiesto sus conocimientos implícitos, en forma individual. Debe organizar sus ideas, conceptos con el fin de solucionar el problema planteado.

- **Situación de formulación:** en estas, se genera un mensaje o acción a seguir que el emisor (alumno), envía a otro compañero (receptor) el cual debe entenderlo y de esta manera actúa sobre el medio. Esta genera comunicación entre los estudiantes, llevándolos a redefinir su forma de expresarse e interactuar con los demás.

- **Situación de validación:** consiste en que dos o más estudiantes deben hacer aseveraciones o hipótesis respecto a un tema específico, objeto de estudio, ponerse de acuerdo y emitir un juicio, el cual es sometido a análisis grupal con el fin de validar o refutar.

Las situaciones tarea tratadas proponen una construcción colectiva del saber en cada uno de sus casos. Inicialmente la situación es adidáctica, generando un desequilibrio en el conocimiento de los estudiantes, los cuales adaptan y equilibran mediante la generación de conocimiento nuevo. Posteriormente se logra la sistematización de una estrategia de resolución. Ambos componentes pueden desarrollarse sucesivamente, llevando al final a la adopción de una cuarta fase de interacción: la institucionalización.

- **Situación de institucionalización:** es la etapa de conclusión, sacada a partir de las producciones que los estudiantes realizan en clase. En ella se recapitula, sistematiza, ordena y vincula lo realizado en las otras etapas de la situación. Considera las relaciones entre las producciones escolares y el saber cultural, sin ser desligados del contexto de aprendizaje escolar.

2.9. LAS TAREAS MATEMÁTICAS CON BASE EN LA METODOLOGÍA PAVOC

La propuesta investigativa de Puig y Cerdán, es un aporte al estudio de la resolución de problemas matemáticos en los sistemas educativos de España. En su trabajo, abordan algunos elementos para el desarrollo de un modelo de competencia en resolución de problemas con más de dos operaciones básicas combinadas, basados en el estudio de aspectos de la cognición derivados de una enseñanza organizada en función de ese propósito. Los autores enmarcan su investigación como naturalista, de tipo exploratorio, con carácter teórico y empírico. Para explicar estos aspectos, argumentan que

> con naturalista queremos indicar que tomamos como ámbito para el trabajo un grupo de alumnos completo, tal y como es como consecuencia de la distribución de los alumnos en el centro educativo, sin seleccionar por tanto a los sujetos de ninguna manera, con lo que no pretendemos que los resultados obtenidos sean representativos

> de ninguna población más amplia; con exploratorio, que no centramos la indagación en unas pocas hipótesis, sino que pretendemos obtener datos y explicaciones de los fenómenos que observemos en el mundo elegido desde el modelo teórico; con teórico, que la elaboración de elementos del modelo teórico, y la ida y vuelta de él a los datos empíricos, es una de las intenciones del trabajo, y con empírico que el modelo teórico se elabora para dar cuenta de datos empíricos y se circunscribe a ellos. Puig, L. (1996, pág.11).

Por otra parte, estos pedagogos toman como referente los estudios hechos por Polya acerca de la resolución de problemas matemáticos, donde se precisan los pasos fundamentales para llevar a cabo la interpretación y resolución de un problema: entender el problema, crear un plan, llevar a cabo el plan y finalmente revisar e interpretar el resultado (mediante el método científico). Estos expertos, le dan gran importancia a la etapa que Polya denomina elaboración de un plan, ya que la consideran fundamental a la hora de lograr con éxito la resolución de problemas. Ellos denominan a esta fase *traducción*, y explican la razón para ello al decir que: *este momento crucial en la resolución de cualquier problema consiste a nuestro entender, para los problemas aritméticos, en el paso del enunciado verbal a la expresión aritmética correspondiente* (Puig y Cerdán, 1990, pág. 1).

Puig y Cerdán aclaran en su propuesta que al momento en que aparecen problemas de varias operaciones combinadas (PAVOC), se debe entender que estos, no se resuelven con una única operación, sino con más de una, y en etapa de traducción no basta simplemente en la identificación de la operación aritmética pertinente. La traducción para estos autores, es un proceso más complejo, en el que se reconocen varios interrogantes que se deben contemplar: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden. Por ello, creemos que si se quiere estudiar la estructura de los problemas aritméticos, conviene distinguir entre los problemas de una etapa, esto es, los que se resuelven mediante una única operación, y los de más de una etapa. Según lo expuesto por estos dos docentes, al resolver un problema matemático de enunciado verbal, la traducción ocurre entre los significados construidos por el sujeto, producto de su experiencia y el lenguaje aritmético de la situación. Esto quiere decir que, el estudiante construye conocimiento, en la medida en que traduce a su lenguaje pragmático el texto original del problema.

Por otra parte, hacen un aporte valioso respecto a los problemas tipo PAVOC, para llegar a su comprensión en los estudiantes. Respecto a su trabajo aclaran

> aquí trataremos de dar cuenta de los PAVOC, sirviéndonos del análisis del proceso de traducción. Se podría pensar que el proceso de traducción de un problema de más de una etapa consiste en una mera yuxtaposición, en el orden adecuado, de las traducciones correspondientes a cada una de las operaciones que hay que realizar o que han de aparecer escritas en la expresión aritmética correspondiente. Lo que nosotros vamos a mantener aquí —y lo que justifica, por ende, distinguir entre unos y otros a efectos de su análisis— es que el asunto no se reduce a añadir traducciones una tras otra. Veremos, por el contrario, que, para que el enunciado sea traducible al lenguaje aritmético, es preciso realizar un trabajo sobre el texto del problema que lo transforme en un nuevo texto en el que se hagan explícitos los elementos que han de intervenir en cada una de las traducciones elementales y que muestre la manera como éstas han de enlazarse en la expresión aritmética. Veremos, además, que ese texto

> intermedio, que podría seguir perteneciendo al lenguaje vernáculo, se puede construir con más facilidad en un lenguaje gráfico que muestra lo que llamaremos la estructura del problema. (Puig y Cerdán, 1990, pág. 2).

Por último, los autores manifiestan conformidad con las etapas de resolución de problemas, desarrollados y expuestos por Polya en su libro *Cómo Plantear y Resolver Problemas*, con la salvedad de que para ellos, se desarrolla desde dos momentos básicos en su teoría: *Análisis y Síntesis.*

2.9.1. El método de análisis-síntesis: antecedentes históricos

La metodología PAVOC, fundamento de la investigación y metodología desarrollada por Puig y Cerdán, cuenta con unos antecedentes históricos, los cuales los autores se dan a la tarea de referenciar ampliamente en su trabajo: *La Estructura de los Problemas Aritméticos de Varias Operaciones Combinadas (1990)* . Al respecto, los autores presentan sus hallazgos de la siguiente forma

el argumento resolutorio que hemos esbozado en el párrafo anterior tiene una larga tradición en las matemáticas, ya que fue estudiado y sistematizado por primera vez en la Grecia clásica.

El camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas, fue llamado por los griegos Análisis, y proporciona, como hemos visto, el plan de solución del problema.

El camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita, fue llamado Síntesis. Por tanto, cuando el análisis ha proporcionado el plan de solución de un problema, la síntesis ejecuta el plan, obteniendo la solución del problema.

En el libro XIII de los Elementos de Euclides se encuentran definidos el Análisis y la Síntesis en los términos siguientes:

“Análisis es la suposición de lo que se busca como dado (y el paso) a través de sus consecuencias a algo admitido como verdadero.

Síntesis es la suposición de lo ya admitido (y el paso) a través de sus consecuencias para obtener lo que se busca.”

Pappus (siglo IV) explica más en detalle en qué consiste el método de análisis y síntesis, distinguiendo además entre dos tipos de análisis, que él llama teorético y problemático, en el siguiente texto:

El llamado analuomenoV (“Tesoro del Análisis”) es, para decirlo brevemente, un cuerpo especial de doctrina habilitado para uso de aquéllos que, tras haber terminado los Elementos ordinarios, están deseosos de adquirir la facultad de resolver problemas que se les puedan plantear y que implican (la construcción de) líneas; dicho cuerpo de doctrina es útil sólo por esto. Constituye la obra de tres hombres, Euclides, el autor de los Elementos, Apolonio de Perga y Aristeo el viejo, y procede por vía de análisis y síntesis.

El análisis, pues, considera aquello que se busca como si fuera algo aceptado y pasa desde ello, a través de sus consecuencias sucesivas, a algo que es aceptado como resultado de la síntesis: pues en el análisis damos por supuesto aquello que se busca como si (ya) estuviera dado (gegonoV), e inquirimos qué es aquello de lo cual resulta esto y a su vez cuál es la causa antecedente de lo posterior, y así sucesivamente, hasta que, volviendo así sobre nuestros pasos, llegamos a algo ya conocido o que pertenezca a la clase de los primeros principios, y a un tal método lo llamamos análisis por ser una solución hacia atrás (anåpolin lusin).

Pero en la síntesis, invirtiendo el proceso, tomamos como ya dado aquello a lo que llegamos en último término en el análisis y, alineando en su orden natural como consecuencias lo que antes eran antecedentes, y conectándolas unas con otras sucesivamente, llegamos finalmente a la construcción de lo que se buscaba; y a esto llamamos síntesis.

Ahora bien, el análisis es de dos tipos, uno va dirigido a la búsqueda de la verdad y se llama teórico, el otro se dirige a encontrar aquello que se nos ha dicho que encontremos y se llama problemático. 1) En el tipo teórico de análisis, asumimos lo que se busca como si fuera algo existente y verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo aceptado; entonces a), si ese algo aceptado es verdadero, aquello que se busca será también verdadero y la prueba corresponderá en el orden inverso al análisis, pero b) si llegamos a algo reconocidamente falso, aquello que se busca será también falso. 2) En el tipo problemático asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo conocido, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, considerándolas verdaderas, hasta algo aceptado: luego, si a) lo que es aceptado es posible y obtenible, es decir, lo que los matemáticos llaman dado, lo que se propuso originalmente será también posible, y la prueba corresponderá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si b) llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible. (Lakatos, 1981, pgs. 107-108)

Este texto de Pappus, y lo que en él se dice, puede entenderse mejor si enunciamos una regla práctica, en el espíritu del método, con la cual podamos abordar problemas. Tal regla rezaría así:

2.9.2. Regla del análisis-síntesis

Los investigadores, desarrollan su idea proponiendo dos momentos metodológicos a los que denominan el análisis y la síntesis del problema, basados en el análisis secuencial de la situación problémica de Lakatos, 1981. Expresan que se parte de la segunda etapa en la cual se identifica la incógnita y a partir de ella se deduce el dato que resuelve el problema. Luego, a partir de este, se alinean una serie de consecuencias y antecedentes que conectados convenientemente, llevan a la construcción del procedimiento que ellos llaman síntesis. Posteriormente, describen la etapa de análisis y su objetivo en el modelo, expresan al respecto que

el análisis es de dos tipos, uno va dirigido a la búsqueda de la verdad y se llama teórico, el otro se dirige a encontrar aquello que se nos ha dicho que encontremos y se llama problemático. 1) En el tipo teórico de análisis, asumimos lo que se busca como si fuera algo existente y verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo aceptado; entonces a), si ese algo aceptado es verdadero, aquello que se busca será también verdadero y la prueba corresponderá en el orden inverso al análisis, pero b) si llegamos a algo reconocidamente falso, aquello que se busca será también falso. 2) En el tipo problemático asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo conocido, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, considerándolas verdaderas, hasta algo aceptado: luego, si a) lo que es aceptado es posible y obtenible, es decir, lo que los matemáticos llaman dado, lo que se propuso originalmente será también posible, y la prueba corresponderá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si b) llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible. (Puig y Cerdán, 1990, pág. 6-8).

Proponen a partir del estudio de este esquema resolutorio, los siguientes pasos en el proceso de análisis y síntesis para la metodología PAVOC:

Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida.

Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x.

Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).

Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que

1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,

2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.

En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.

En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible.

2.9.3. Método de resolución de problemas PAVOC

La primera fase de este modelo es Análisis, que es la acción de planificar la resolución y cuyo proceso es el siguiente:

Identificar la incógnita del problema.

Determinar qué datos son necesarios para hacer ese cálculo.

Si están todos hay que hacer el cálculo final.

Si falta alguno, se considera como una incógnita intermedia.

Determinar qué datos son necesarios para calcular la incógnita intermedia y aplicar el proceso anterior a esta incógnita.

Iterar el proceso las veces necesarias hasta que:

* Bien se tienen todos los datos para calcular la incógnita del problema. En este caso se calcula y el problema termina felizmente.

* Bien alguno no se puede calcular, o se llega a contradicciones. En este caso el problema no tiene solución.

La segunda fase, la Síntesis, es la acción resolutoria. (Ortega, T 2011, pág.103-104)

Para la comprensión de cada una de las etapas de esta metodología, los autores muestran una serie de ejemplos[21] en los cuales relacionan cada una de ellas.

Para la fiesta de los niños, los papás de Camilo, Laura y David hicieron un gasto de $ 62.100: en el disfraz de Camilo $22.500, en el de Laura $ 30.950 y en el de David, lo que resta de la compra. ¿Cuánto gastaron en el disfraz de David?

[21] Para el desarrollo de nuestra investigación se esquematiza un problema modelo. Para una investigación más amplia, se puede remitir el lector a los textos de los autores, referenciados en la bibliografía.

ANÁLISIS.

1.— La pregunta es: ¿Cuántos gastaron en el disfraz de David?

2.— Para determinar el valor del disfraz de David necesitamos conocer el valor total de la compra y el valor total de los disfraces de Camilo y Laura

3.— Conocemos el valor del disfraz de Camilo y el de Laura (datos del problema) y también el valor total de la compra (datos del problema).

4.— Como todo lo que es necesario conocer según 2 ha quedado reducido a datos del problema, el análisis ha concluido.

SÍNTESIS.

1.— Conozco el valor del disfraz de Camilo y el de Laura. Para saber su valor total basta sumar 22.500 + 30.950.

2.— Conozco el valor total de los disfraces de Camilo y Laura: 53.450 y tengo el valor total de la compra de los tres disfraces: 72.100. Para saber cuánto vale el disfraz de David, resto las dos cantidades: 62.100 – 53.450.

3.— Tengo el valor del disfraz de David: 18.650.— La incógnita está determinada, luego la síntesis ha concluido (Adaptado de Puig y Cerdán, 1990, pág. 8).

Se debe aclarar que es necesario el análisis previo del problema por parte del educador. De esta forma, desarrollará una serie de estrategias orientadoras mediante el cuestionamiento constante del estudiante; esto conlleva a la búsqueda de la solución de la situación tanto individual como grupal[22].

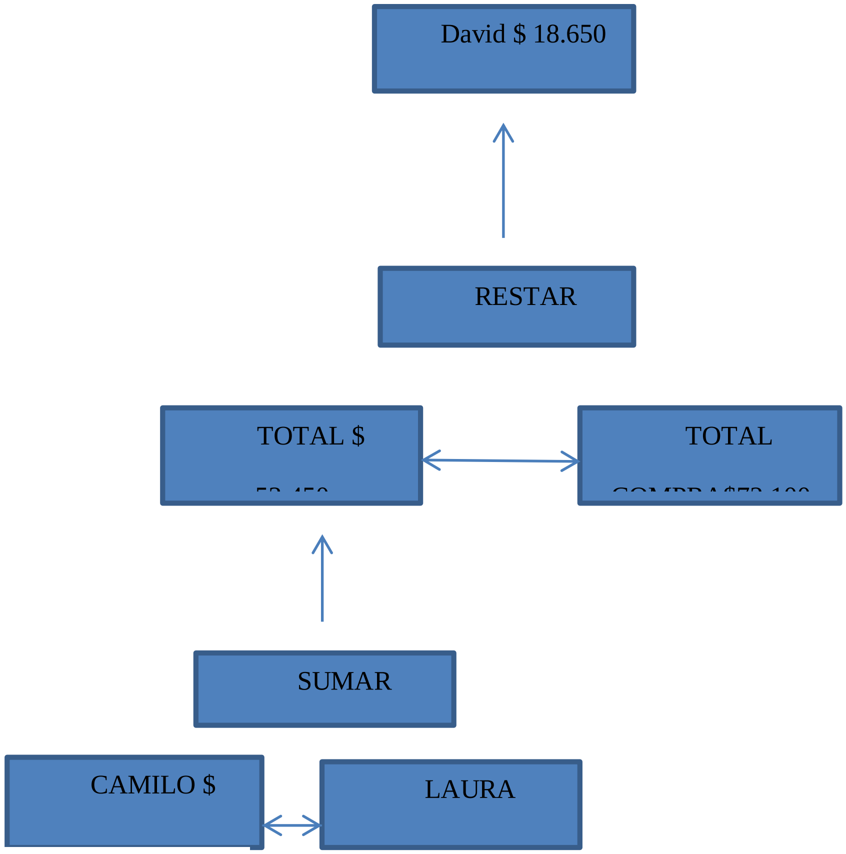
2.9.4. El método como algoritmo: esquematización

La etapa anterior de análisis y síntesis del problema, se traduce en un algoritmo, es decir, una regla que se desarrolla paso a paso mediante un esquema que permite al estudiante analizar de principio a fin el problema, establecer la operación principal que desarrolla la respuesta y las operaciones secundarias que sirven de apoya para llegar a esta. Así mismo, facilita la organización de los datos para operar entre sí. Este proceso de esquematizar hace que el alumno proponga hipótesis, analice posibles soluciones, tome decisiones y en consenso puedan escoger el esquema-solución pertinente al problema.

---

[22] Para el desarrollo de la motivación que conlleva al estudiante al desarrollo de habilidades en la solución de problemas, se trabaja la metodología PAVOC asociada a la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, como se esquematiza en las secuencias diseñadas para la investigación. Las dos metodologías se trabajan con el propósito de elaborar una secuencia didáctica eficaz para resolver problemas con estructuras aditivas.

Figura 3.Esquematización de un problema con estructura aditiva, según el modelo PAVOC



Fuente: Diseño propio

CAPÍTULO 3

3. MODELO DE SECUENCIA DIDÁCTICA QUE UNE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y LA METODOLOGÍA PAVOC

Se resumen las etapas para la secuencia según la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Metodología PAVOC de la siguiente forma para que los estudiantes la interioricen en sus trabajos:

ANÁLISIS: comprende tres momentos para su desarrollo

Situación acción: se dan entre el estudiante y un medio (material o simbólico), en ella, el alumno pone de manifiesto sus conocimientos implícitos, en forma individual. Debe organizar sus ideas, conceptos con el fin de solucionar el problema planteado. En la situación a desarrollar, este momento se ve reflejado en la lectura, planificación y análisis previo que los estudiantes realizan del problema:

Situación de formulación: en estas, se genera un mensaje o acción a seguir que el emisor (alumno), envía a otro compañero (receptor) el cual debe entenderlo y de esta manera actúan sobre el medio. Esta genera comunicación entre los estudiantes, llevándolos a redefinir su forma de expresarse e interactuar con los demás. Se manifiesta en la situación, cuando cada grupo reflexiona en forma general sobre los resultados a fin de escoger una secuencia adecuada entre las propuestas, si es el caso, diseñar otra en caso de no coincidir ninguna con la respuesta.

Situación de validación: consiste en que dos o más estudiantes deben hacer aseveraciones o hipótesis respecto a un tema específico, objeto de estudio, ponerse de acuerdo y emitir un juicio, el cual es sometido a análisis grupal con el fin de validar o refutar.

Se desarrolla en la situación cuando cada grupo aporta sus hipótesis y teorías respecto a cómo operar con estos datos de la situación problema y de esta manera conseguir la secuencia correcta que los lleve a resolver la incógnita.

Analizarán la forma de resolver las incógnitas intermedias. Lo realizarán planteándose interrogantes y respuestas en torno al modo de llegar a la solución de la pregunta problema.

Se realiza la lectura y análisis del problema formulando conjeturas e hipótesis que los llevan a resolver las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la incógnita del problema?
2. ¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla?
3. ¿Qué datos intermedios son conocidos y cuáles no?
4. ¿Qué operación se necesita para encontrarla?

A. ¿Cuál es la primera incógnita intermedia?

B. ¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla?

C. ¿Qué datos son conocidos y cuáles no?

D. ¿Qué operación se necesita para calcularla?

E. ¿Cuál es la segunda incógnita intermedia?

F. ¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla?

G. ¿Qué datos son conocidos y cuáles no?

H. ¿Qué operación se necesita para calcularla?

* Bien se tienen todos los datos para calcular la incógnita del problema. En este caso se calcula y el problema termina felizmente.

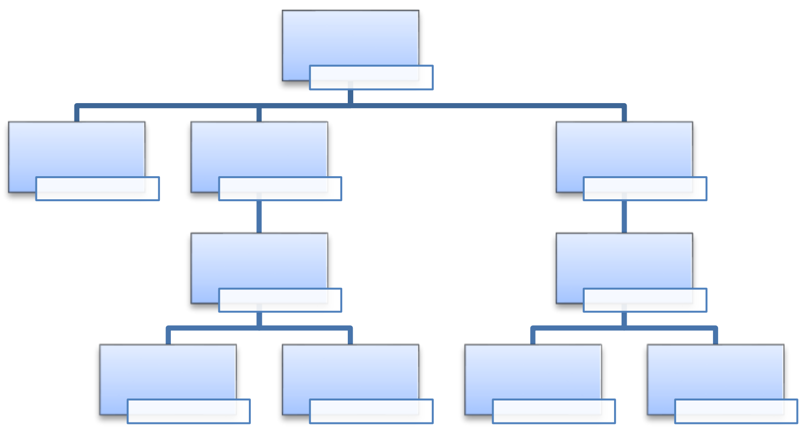
* Bien alguno no se puede calcular, o se llega a contradicciones. En este caso el problema no tiene solución.

SÍNTESIS: comprende dos etapas para su logro

Situación de institucionalización: es la etapa de conclusión, sacada a partir de las producciones que los estudiantes realizan en clase. En ella se recapitula, sistematiza, ordena y vincula lo realizado en las otras etapas de la situación. Considera las relaciones entre las producciones escolares y el saber cultural, sin ser desligados del contexto de aprendizaje escolar. Es la etapa de conclusión, sacada a partir de las producciones que los estudiantes realizan en clase. En ella se recapitula, sistematiza, ordena y vincula lo realizado en las otras etapas de la situación. En la situación desarrollada se institucionalizará una propuesta a seguir en la resolución de situaciones problema, teniendo en cuenta los momentos trabajados en la clase. Reflexionarán y redactarán las etapas que consideran son necesarias para obtener un buen resultado.

Esquematización: **s**e realiza un esquema en forma de árbol invertido, ubicando inicialmente el dato de la incógnita principal. En una segunda fase o acción resolutoria se resuelven las operaciones en el orden de aplicación para llegar a la parte superior del esquema y resolver la incógnita principal.

Figura 4: Modelo de esquematizacion de árbol PAVOC



3.1. SECUENCIA DIDÁCTICA

El término *secuencia didáctica* refiere al ámbito de la enseñanza. Comprende las sucesivas actividades que tienen como fin enseñar un contenido educativo. Ésta se caracteriza por ser una continuidad no aditiva, sino interrelacionada, estructurada progresivamente de manera tal que una actividad complementa y amplía la actividad anterior y por la evaluación se proyecta a la siguiente, siempre orientada a la competencia a lograr. La secuencia didáctica, son relacionadas en la actualidad con las competencias como estrategias organizadas que buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. Como la afirma Tobón (2010):

> En el modelo de competencias, las secuencias didácticas son una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje en el marco del aprendizaje o refuerzo de competencias; para ello se retoman los principales componentes de dichas secuencias, como las situaciones didácticas (a las que se debe dirigir la secuencia), actividades pertinentes y evaluación formativa (orientada a enjuiciar sistemáticamente el proceso). Con ello, se sigue una línea metodológica que permite a los docentes que ya trabajan con esta metodología una mejor adaptación al trabajo por competencias en el aula. (Pág. 20-21)

Esto significa que desde las competencias, las secuencias didácticas ya no se proponen que los estudiantes aprendan determinados contenidos, sino que desarrollen competencias para desenvolverse en la vida, para lo que será necesaria la apropiación de los contenidos en las diversas asignaturas.

3.2. PROPUESTA DE APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA QUE UNE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y LA METODOLOGÍA PAVOV

ORGANIZACIÓN CURRICULAR: se organiza la competencia matemática y el tipo de pensamiento con el que se relaciona. Además se integran los procesos por conjunto de grados para una visión general del contexto.

Tabla 16.Rejilla para integrar la competencia matemática a los pensamientos y conjunto de grados

COMPETENCIA	PENSAMIENTO	GRUPO DE GRADOS	
		1° A 3°	4° A 5°
PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS	NÚMÉRICO	Me valgo del uso de diferente material concreto para dar respuesta a problemas con estructuras aditivas Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.	Uso diverso material concreto para resolver y formular problemas en situaciones aditivas y sustractivas Utilizo los datos que se me presentan en una situación problema con números naturales y sus operaciones para hallar respuestas. Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiere de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones

Fuente: Diseño propio

PERSPECTIVA DIDÁCTICA 5°: en esta parte se integran los aspectos del desarrollo humano, la competencia, los procesos necesarios para alcanzarla y se establecen los indicadores que orientan su alcance.

Tabla 17.Rejilla para el registro de los aspectos del desarrollo humano, la competencia, los procesos y los indicadores de desempeño

ASPECTOS DESARROLLO HUMANO	COMPETENCIA	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIPTORES
COGNOTIVO -AFECTIVO -TENDENCIA DE ACCION –METACOGNITIVO	PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMA	ANALIZAR 1.Representar 2.Razonar	✓ Interpretar el problema enunciado
		3.Matematizar-Resolver	✓ Identifica las estrategias requeridas para la solución del problema planteado, aplicando el algoritmo de la suma, la resta o ambos. ✓ Ejecuta el plan de acción para resolver el problema planteado
		SINTETIZAR Argumentar Comunicar	✓ Examina la solución obtenida al problema planteado y compara su el nivel de acierto con el de sus demás compañeros.
		Responsabilidad	✓ Muestra dedicación, agrado y motivación para resolver los problemas con estructuras aditivas y sustractivas que se le planteen.

Fuente: García, Coronado y Giraldo (2015). *Orientaciones Didácticas Para el Desarrollo de Competencias Matemáticas.* Florencia, Colombia: Universidad de la Amazonía

PLANEACIÓN DE LA SECUENCIA: en esta aparte, se hace una programación y registro riguroso de la secuencia didáctica a aplicar, sus etapas, actividades y mecanismos de evaluación. Para lograr esto, se sugiere la siguiente rejilla:

Tabla 18.Rejilla para el registro de planeación de la secuencia didáctica

<table>
<tr><td colspan="3">INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO
2017</td></tr>
<tr><td colspan="3">FORMATO DE REGISTRO PARA SECUENCIAS DIDÁCTICAS</td></tr>
<tr><td colspan="3">SITUACIÓN PROBLEMA: El aeropuerto de Bogotá</td></tr>
<tr><td colspan="3">COMPETENCIA MATEMÁTICA: Plantear y resolver problemas</td></tr>
<tr><td colspan="3">PROCESO GENERAL: Interpretar y Argumentar</td></tr>
<tr><td colspan="3">PROCESOS ESPECÍFICOS: Leer, Razonar, Modelizar, Aplicar y Comunicar</td></tr>
<tr><td>GRADO: 5-1</td><td>FECHA: 20 de febrero de 2017</td><td>No DE ESTUDIANTES: 32</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVO GENERAL: Se desarrollará la competencia resolver y formular problemas desde la perspectiva de nuestro objeto matemático, es decir, las estructuras aditivas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVO ESPECÍFICO
1. El estudiante interpreta la realidad a partir de la información disponible y mediante esta resuelve situaciones aditivas y sustractivas
2. El estudiante utiliza relaciones aditivas y sustractivas para resolver situaciones problémicas en varios contextos.
3. El estudiante verifica la validez lógica de los procedimientos utilizados en la solución de situaciones problémicas con adición y sustracción.</td></tr>
<tr><td colspan="3">TIEMPO: 10 Semanas (primer periodo)</td></tr>
<tr><td colspan="3">RECURSOS: video vean, portátil, carteleras, fotocopias, cámara, portafolio</td></tr>
<tr><td colspan="3">ESPACIO: aula de clases, auditorio, patio de descanso</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">TIPO DE EVALUACIÓN: Por procesos</td></tr>
<tr><td>NÚMERO DE SESIONES</td><td>SESIÓN No</td><td>SEMANA</td></tr>
<tr><td colspan="3">PREGUNTA PROBLEMA: El pasado lunes llegaron al aeropuerto de Bogotá cuatro aviones procedentes del extranjero. El primero venía de Brasil y trajo 218 pasajeros, el segundo procedía Argentina, en él vinieron 95 personas menos que en el de Brasil, el tercero venía de Chile y de él se bajaron el doble de personas que del avión procedente de Argentina. ¿Cuántas personas llegaron en total a Bogotá en estos aviones el día lunes?</td></tr>
<tr><td colspan="3">IDEAS CLAVE: INCÓGNITA PRINCIPAL / DATOS PRINCIPALES / OPERACIÓN PRINCIPAL / INCÓGNITA SECUNDARIA / DATOS SECUNDARIOS / OPERACIONES SECUNDARIAS / GRÁFICO DEL PROBLEMA</td></tr>
<tr><td>NOMBRE DE LA SECUENCIA</td><td>SITUACIÓN PROBLEMA CENTRAL</td><td>PROPÓSITO DE LA SECUENCIA A NIVEL DE CONTENIDO MATEMÁTICO</td></tr>
<tr><td>El viaje al aeropuerto de Bogotá</td><td>Se plantea una situación de viaje entre tres amigos: Phanor, Heyder y Paola a San Andrés Islas. Para ello se proponen cuatro situaciones problema con estructura aditiva derivadas de esta experiencia</td><td>El propósito de esta secuencia didáctica es verificar la validez del procedimiento de análisis y síntesis de los estudiante mediante el uso del modelo de resolución de Las Situaciones Didácticas y metodología PAVOC</td></tr>
<tr><td>SEMANA No</td><td>PREGUNTA GUÍA</td><td>DESEMPEÑOS ESPERADOS</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Cuánto cuestan los pasajes a San Andrés Islas de los tres amigos: Phanor, Heyder y Paola?</td><td></td></tr>
</table>

2	Cuántos pasajeros llegan el día domingo a la Ciudad de Bogotá en la sala 3, donde se encuentran Phanor, Heyder y Paola?	El estudiante interpreta la realidad a partir de la información disponible y mediante esta resuelve situaciones aditivas y sustractivas Utiliza relaciones aditivas y sustractivas para resolver situaciones problémicas en varios contextos. Aplica de forma lógica el procedimiento de Las Situaciones Didácticas y Metodología PAVOC en la solución de situaciones problémicas con adición y sustracción.
3	¿Cuánto dinero le devuelven a Phanor si paga con un billete de cien mil pesos los 3 almuerzos?	
4	¿Cuál es la diferencia en pesos por el hospedaje de los tres amigos en el hotel Mar del Plata cinco estrellas y el San Juan tres estrellas?	
OBSERVACIONES: Para ejemplificar el modelo pedagógico sugerido, se tomó al azar una de las situaciones derivadas, la número 2		

Fuente: diseño propio

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ANÁLISIS

1. **Situación de acción:** en esta etapa, los estudiantes procederán a leer el enunciado del problema y en grupos de tres estudiantes completar los datos. Luego organizarán una secuencia de las posibles operaciones con las cuales se resolvería el problema.

BRASIL

DATOS	OPERACIONES

ARGENTINA

DATOS	OPERACIONES

CHILE

DATOS	OPERACIONES

RESTA ----------- SUMA ------------- RESTA

SUMA ----------- RESTA ------------- SUMA

RESTA ---------- SUMA ------------- SUMA

SUMA --------- RESTA ------------- RESTA

2. **Situación de formulación:** es la reflexión que se realizará en torno a los siguientes interrogantes:

¿Cuál es la incógnita del problema?

R/ El número de personas llegaron a Bogotá

¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla?

R/ El número de personas que llegaron en cada avión: los que vienen de los de Argentina y los de Chile.

¿Qué datos son conocidos y cuáles no?

R/ Se sabe el número de pasajeros que llegaron en el avión de Brasil. Además, que los pasajeros de Argentina son 95 menos que los de Brasil.

Se desconoce el total de los que vienen de Argentina y Chile. También se desconoce qué operación hacemos.

Qúe incógnitas son las intermedias?

R/ Por tanto, el número de pasajeros de estos aviones son *incógnitas intermedias*.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
3. Situación de validación: analizarán la forma de resolver las incógnitas intermedias. Lo realizarán planteándose interrogantes y respuestas en torno a: ¿Cuál es la primera incógnita intermedia? R/ El número de personas que llegaron de Argentina. ¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla? R/ El número de personas que llegaron de Brasil (sumado – restado) 95 personas menos. ¿Qué operación necesitamos realizar? R/ Resta. ¿Cuál es la segunda incógnita intermedia? R/ El número de personas que llegaron de Chile. ¿Qué datos se conocen para hallarlos? R/ Los pasajeros de provenientes de Brasil (sumado – restado) con los pasajeros de Brasil de nuevo. Qué operación necesitamos realizar? R/ Suma. Tenemos la totalidad de los datos para hallar los pasajeros que llegaron a Bogotá o falta alguno por encontrar? R/ Todos están presentes.

El problema planteado tiene solución o no la tiene?

R/ Si tiene solución.

Cada grupo toma las siguientes fichas y diseña un esquema que considere acertado para llegar a resolver el problema. Posteriormente se analiza y aprueba en grupo

-PASAJEROS DE CHILE

-95 PASAJEROS

-PASAJEROS DE BRSIL

-SUMA DOS VECES

-PASAJEROS DE BRASIL

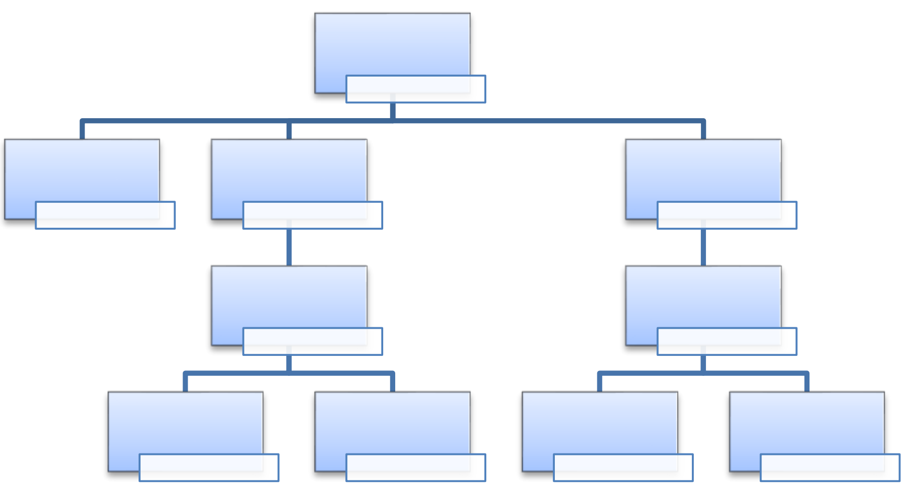
-PASAJEROS DE ARGENTINA

-RESTA

-PASAJEROS DE BRASIL

-SUMA TOTAL DE PASAJEROS

-PASAJEROS DE BRASIL



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

SÍNTESIS

4. Situación de institucionalización: se realiza la lectura y síntesis del problema formulando las conjeturas e hipótesis que los llevaron a resolver la incógnita principal del problema.

1. Debo identificar la incógnita del problema

2. Identifico los datos necesitamos para calcularla

3. Deduzco la operación que se necesita para resolver la incógnita

4. Determino cuales son las incógnitas intermedias.

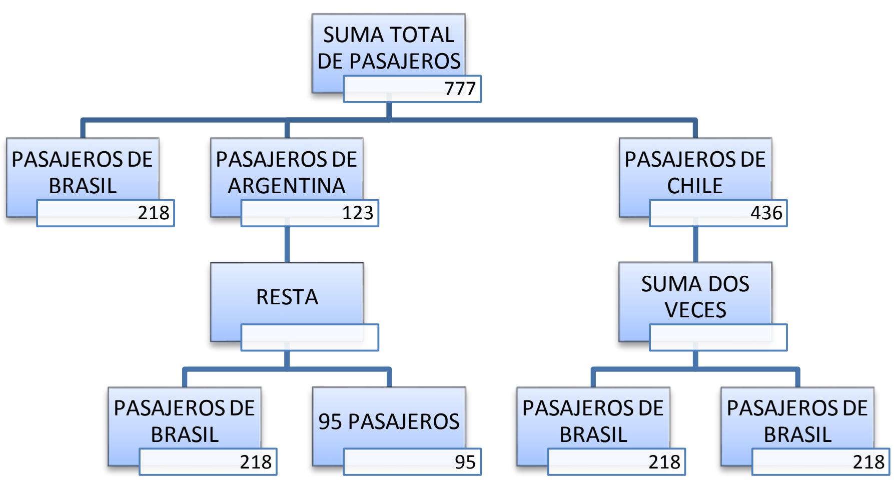
5. Reconozco los datos intermedios conocidos no conocidos

6. Establezco qué datos necesito para calcular las incógnitas intermedias.

* Bien se tienen todos los datos para calcular la incógnita del problema. En este caso se calcula y el problema termina felizmente.

* Bien alguno no se puede calcular, o se llega a contradicciones. En este caso el problema no tiene solución.

5. Esquematización: se resuelve el esquema en forma de árbol invertido.

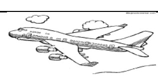


SITUACIÓN PROBLEMA: El aeropuerto

El pasado lunes llegaron al aeropuerto de Bogotá cuatro aviones procedentes del extranjero. El primero venía de Brasil y trajo 218 pasajeros, el segundo procedía Argentina, en él vinieron 95 personas menos que en el de Brasil, el tercero venía de Chile y de él se bajaron el doble de personas que del avión procedente de Argentina. ¿Cuántas personas llegaron en total a Bogotá en estos aviones el día lunes?

ANÁLISIS

Situación de acción: en esta etapa, los estudiantes procederán a leer el enunciado del problema y en grupos de tres estudiantes completar los datos. Luego organizarán una secuencia de las posibles operaciones con las cuales se resolvería el problema.

 BRASIL	Datos	Operaciones
 ARGENTINA	Datos	Operaciones
 CHILE	Datos	Operaciones

 BRASIL	Datos	Operaciones
 ARGENTINA	Datos	Operaciones
 CHILE	Datos	Operaciones

RESTA ----------- SUMA ------------- RESTA

SUMA ----------- RESTA ------------- SUMA

RESTA ---------- SUMA ------------- SUMA

SUMA --------- RESTA ------------- RESTA

Situación de formulación: es la reflexión que se realizará en torno a los siguientes interrogantes:

¿Cuál es la incógnita del problema?

R/ El número de personas llegaron a Bogotá

¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla?

R/ El número de personas que llegaron en cada avión: los que vienen de los de Argentina y los de Chile.

¿Qué datos son conocidos y cuáles no?

R/ Se sabe el número de pasajeros que llegaron en el avión de Brasil. Además, que los pasajeros de Argentina son 95 menos que los de Brasil.

Se desconoce el total de los que vienen de Argentina y Chile. También se desconoce qué operación hacemos.

Qúe incógnitas son las intermedias?

R/ Por tanto, el número de pasajeros de estos aviones son *incógnitas intermedias.*

Situación de validación: analizarán la forma de resolver las incógnitas intermedias. Lo realizarán planteándose interrogantes y respuestas en torno a:

¿Cuál es la primera incógnita intermedia?

R/ El número de personas que llegaron de Argentina.

¿Qué datos necesitamos conocer para calcularla?

R/ El número de personas que llegaron de Brasil (sumado – restado) 95 personas menos.

¿Qué operación necesitamos realizar?

R/ Resta.

¿Cuál es la segunda incógnita intermedia?

R/ El número de personas que llegaron de Chile.

¿Qué datos se conocen para hallarlos?

R/ Los pasajeros de provenientes de Brasil (sumado – restado) con los pasajeros de Brasil de nuevo.

Qué operación necesitamos realizar?

R/ Suma.

Tenemos la totalidad de los datos para hallar los pasajeros que llegaron a Bogotá o falta alguno por encontrar?

R/ Todos están presentes.

El problema planteado tiene solución o no la tiene?

R/ Si tiene solución.

Cada grupo toma las siguientes fichas y diseña un esquema que considere acertado para llegar a resolver el problema. Posteriormente se analiza y aprueba en grupo

-PASAJEROS DE CHILE

-95 PASAJEROS

-PASAJEROS DE BRSIL

-SUMA DOS VECES

-PASAJEROS DE BRASIL

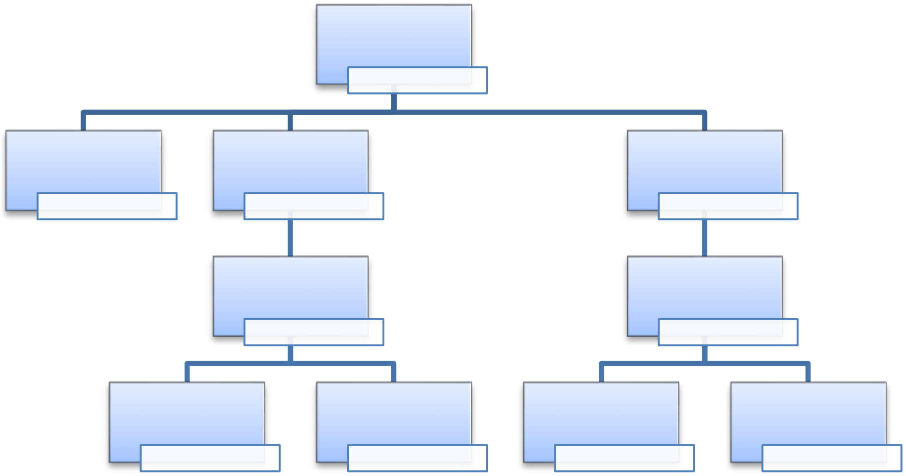
-PASAJEROS DE ARGENTINA

-RESTA

-PASAJEROS DE BRASIL

-SUMA TOTAL DE PASAJEROS

-PASAJEROS DE BRASIL



SINTESIS

Situación de institucionalización: se realiza la lectura y síntesis del problema formulando las conjeturas e hipótesis que los llevaron a resolver la incógnita principal del problema.

1. Debo identificar la incógnita del problema

2. Identifico los datos necesitamos para calcularla

3. Deduzco la operación que se necesita para resolver la incógnita

4. Determino cuales son las incógnitas intermedias.

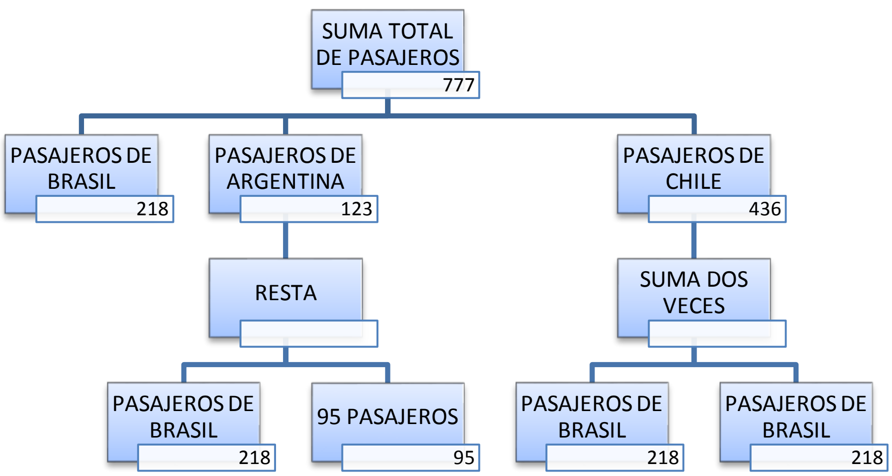
5. Reconozco los datos intermedios conocidos no conocidos

6. Establezco qué datos necesito para calcular las incógnitas intermedias.

* Bien se tienen todos los datos para calcular la incógnita del problema. En este caso se calcula y el problema termina felizmente.

* Bien alguno no se puede calcular, o se llega a contradicciones. En este caso el problema no tiene solución.

Esquematización: se resuelve el esquema en forma de árbol invertido.



EVALUACIÓN Y SEGUIMIENTO A LA SECUENCIA: se desarrolla durante la clase y al finalizar, mediante el registro de los avances y dificultades de los niños en la rejilla propuesta a continuación. En la tabla se utiliza las letras C (cumple) y NC (no cumple), pero el docente puede utilizar el criterio evaluación que se aplica en su institución.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO 2017
COMPETENCIA MATEMÁTICA:
ASPECTOS DEL DESARROLLO HUMANO: Cognitivo / Socioafectivo

INDICADORES	TA REAS	ESTUDIANTES																						
											0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
1.Interpretar el problema enunciado	1		C				C								C	C							C	
	2																							
	3																							
2. Identifica estrategias requeridas para la solución del problema planteado; aplicando el algoritmo de la suma, la resta o ambos	1																							
	2																							
	3																							
3 Resolver Ejecuta el plan de acción para resolver el problema planteado	1																							
	2																							
	3																							
4 Argumentar Examina la solución obtenida al problema planteado y compara su el nivel de acierto con el de sus demás compañeros.	1																							
	2																							
	3																							
5 Responsabilidad Muestra dedicación, agrado y motivación para resolver los problemas con estructuras aditivas y sustractivas que se le planteen.	1																							
	2																							
	3																							
6	1																							
	2																							
	3																							

CONCLUSIONES

Presentamos a los docentes y comunidad educativa, las deducciones producto de un proceso de investigación teórico y práctico para el reconocimiento de los elementos básicos en la construcción y aplicación de una secuencia didáctica basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Metodología PAVOC para la resolución de problemas con estructura aditiva.

El estudio realizado en la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, respecto a los resultados en el área de matemáticas, específicamente en la solución de problemas matemáticos, demostró las falencias de los estudiantes para comprender y resolver problemas de estructura aditiva. Esto permitió la caracterización del problema de investigación, se construyeron unos referentes teóricos y metodológicos específicos que, además de sustentar el problema, aportan argumentos para proponer unas orientaciones didácticas especificas presentadas como alternativas de solución.

El diseño de la secuencia didáctica en matemáticas sirvió para darle significado a las estructuras aditivas. Es decir, se tuvo en cuenta la fenomenología, sistema de representación semiótica y la estructura conceptual. Este trabajo también permite, la estructuración del currículo y la organización de los procesos matemáticos, lo cual contribuye a la organización curricular de las matemáticas, atendiendo a dos condiciones:

-primero, se formulan a lo largo de los diferentes conjuntos de grados de escolaridad (organización horizontal) y

-segundo, se expresan como procesos matemáticos propios de los diferentes pensamientos matemáticos en los que se organiza el currículo escolar (organización vertical).

Finalmente, se puede concluir que la perspectiva didáctica de las competencias matemáticas se focalizó en la competencia del profesor y del estudiante para planificar, ejecutar y evaluar, lo cual condujo a la adecuada y oportuna articulación de las expectativas de aprendizaje con los objetivos, tareas, procesos y competencias; por lo tanto genera el desarrollo de una verdadera competencia en la resolución de problemas con estructuras aditivas de los estudiantes. Al realizar una prueba piloto con 18 estudiantes, se evidenció una mejoría en los resultados de la prueba final con respecto a la prueba diagnóstica después de la aplicación de la secuencia didáctica de cuatro sesiones: de un estudiante que pudo resolver problemas con estructura aditiva tipo cambio en la diagnostica, se pasó a seis en la final, lo cual significa una mejoría del 27.83%. Esto quiere decir que la promoción e institucionalización de la secuencia didáctica basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y la metodología PAVOC aportan los elementos para el mejoramiento de los estudiantes en este tipo de problemas.

RECOMENDACIONES FINALES

La propuesta de investigación aborda los elementos teóricos y prácticos que permiten entender que las matemáticas son una ciencia compleja, con procesos específicos y dinámicos que requieren del uso vivencial del estudiante para aprenderlos. Por lo tanto, se recomienda que este trabajo sea institucionalizado para un verdadero desarrollo de la competencia matemática en resolución de problemas con estructura aditiva.

Para esto es necesario desarrollarlo en tres etapas: 1. Sensibilización de la comunidad educativa, 2. Experimentación restringida y 3. Evaluación restringida y ajustes.

ANEXOS

Anexo 1: Plan de área de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo 2017

	NSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO		
	PLAN DE AREA MATEMATICA 2017		
	CÓDIGO: GACA.DOC.3	VERSIÓN: 1	FECHA: 28-02-2012

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO

PLAN DE ÁREA MATEMÁTICA 2017

GRADO QUINTO

PERÍODO I

I. CONJUNTOS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1. Conjuntos

- Definición
- Representación
- Diagramas
- Relaciones de pertenencia y contenencia

2. Clases

- Universal
- Unitario
- Vacío
- Finito
- Infinito

3. Operaciones

- Unión
- Intersección
- Diferencia
- Complemento

4. Producto cartesiano
5. Plano cartesiano

II. NÚMEROS NATURALES

1. Sistema de numeración decimal

- Definición
- Lectura y escritura
- Relaciones de orden

III. OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

1. Adición y sustracción

- Relación
- Propiedades de la adición
- Problemas

2. Multiplicación y división

- Relación
- Propiedades de la multiplicación

3. Problemas
4. Orden, operaciones y polinomios aritméticos

Fuente: Adaptado del Plan de área de matemáticas del grado 5º en el primer período de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, año 2017.

Anexo 2: Plan de aula de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo 2017

República de Colombia Santiago de Cali	INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO			
	PLAN DE ASIGNATURA			
	CODIGO: GACA.DOC.3	VERSION: 1	FECHA: 2012	

AREA: Matemáticas **ASIGNATURA**: Matemáticas **GRADO**: Quinto

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE LA ASIGNATURA: Formular y resolver problemas aditivos, sustractivos, multiplicativos y de división, mediante la aplicación de estrategias de análisis, selección y manipulación de datos.

PERIODO: 1.

CONTENIDOS DEL PERIODO	COMPETENCIAS	DESEMPEÑOS	ESTRATEGIA METODOLÒGICA	RECURSOS
CONJUNTOS Y SISTEMA DE NUMERACIÓN Conjuntos. - Definición - Representación. - Diagramas. - Relaciones de pertenencia y contenencia. Clases - Universal - Unitario. - Vacío. - Finito. - Infinito. Operaciones. - Unión - Intersección. - Diferencia. Complemento. Producto cartesiano.	**INTERPRETATIVA** -Resuelve situaciones que requieren de las operaciones entre conjuntos. -Utiliza las operaciones con números naturales para resolver situaciones dentro y fuera del contexto de las matemáticas. -Identifica el conjunto de números naturales. -Comprende el concepto de potenciación, radicación y logaritmación. -Describe algunas construcciones geométricas, utilizando un lenguaje apropiado.	-Reconocer y caracteriza la clase de conjuntos, -Realizar y representa las operaciones de intersección, unión y diferencia entre dos o más conjuntos. -Comparar y ordena números naturales. -Encontrar el producto cartesiano entre conjuntos. -Ubicar parejas ordenas en el plano cartesiano. -Realizar las operaciones	Constructivista, Inductiva. Deductiva. Personalizada. Conceptual. Explicativa.	Cuadernos. Material para manipular. Láminas, Dibujos. Ejercicios. Ejemplos. Cartulinas.

República de Colombia · Santiago de Cali

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO		
PLAN DE ASIGNATURA		
CODIGO: GACA.DOC.3	VERSION: 1	FECHA: 2012

Plano cartesiano. **NÚMEROS NATURALES.** Sistema de numeración decimal. - Definición. - Lectura y escritura - Relaciones de orden. **OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES** Adición y sustracción. - Relación. - Propiedades de la adición. - Problemas Multiplicación y división, - Relación. - Propiedades de la multiplicación Problemas. Orden las operaciones y polinomios aritméticos. **OTRAS OPERACIONES CON** **LOS NUMEROS NATURALES** Igualdades y ecuaciones. Potenciación y sus propiedades. Operaciones inversas de la potenciación.	-Interpretar el significado de la media aritmética y la mediana de un grupo de datos. **ARGUMENTATIVA** -Realiza operaciones entre conjuntos y justifica las respuestas. - Nombra correctamente los elementos que pertenecen a un conjunto a partir de ciertas condiciones. -Justifica respuestas empleando conceptos geométricos **PROPOSITIVA** -Soluciona problemas que involucran el uso del concepto de un conjunto. -Utiliza las operaciones con números naturales para resolver situaciones cotidianas.	de adición y sustracción. -Realizar multiplicaciones y divisiones entre números naturales -Solucionar ecuaciones que involucren operaciones entre números naturales. -Reconocer la potenciación como un producto de factores iguales -Reconocer la radicación y la logaritmación como operaciones inversas de la potenciación. -Resolver problemas con aplicación de diferentes operaciones. -Aplicar el orden de las operaciones en el cálculo de resultados. -Identificar y construye las distintas clases de ángulos y polígonos según sus características.		Textos. Regla. Colores. Objetos del salón. Ayudas Didácticas. Carteles Marcadores Tablas. Operaciones

República de Colombia · Santiago de Cali

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO		
PLAN DE ASIGNATURA		
CODIGO: GACA.DOC.3	VERSION: 1	FECHA: 2012

- Radicación. - Logaritmación **ANGULOS Y POLIGONOS** Ángulos. - Medición. - Clasificación. Polígonos. - Clasificación. - Regulares. - Irregulares. - Perímetro de polígonos regulares **ESTUDIO ESTADISTICO** Estadística y su aplicación Tablas de frecuencia, moda, mediana y media	-Resuelve problemas que involucran la adición, la sustracción, la división o la multiplicación de números naturales. -Realiza dibujos que tengan formas de polígonos. -Representa situaciones reales por medio de conceptos y construcciones geométricas. -Desarrolla estrategias para calcular el perímetro de un polígono. -Crear datos para la utilización de tablas.	-Determinar la frecuencia y la moda de un conjunto de datos. -Calcular e interpretar la media aritmética y la mediana de un grupo de datos.		

EVALUACION:

Es integral y continua, contempla los aspectos personal, social y cognitivo.

El aspecto cognitivo evaluará talleres, evaluaciones orales y escritas, trabajo en clase, salidas al tablero y tareas.

El aspecto personal se evaluará con la asistencia, presentación personal, participación en clase, tenencia y uso del material de clase, responsabilidad y auto evaluación.

El aspecto Social se evaluará la disciplina, trabajo grupal, colaboración, el compromiso institucional y la coevaluación.

Anexo 3: tabla de valoración de resultado de los estudiantes de 5-1 durante la prueba diagnóstica y la prueba final en la secuencia didáctica para la resolución de problemas con estructura aditiva

INSITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO CALI 2017					
PRUEBA DIAGNOSTICA GRADO 50 : RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ESTRUCTURA ADITIVA TIPO CAMBIO					
N0 DE ESTUDIANTES	ETAPA DE ANALISIS			ETAPA DE SINTESIS	
	REPRESENTAR	RAZONAR	MATEMATIZAR	ARGUMENTAR	COMUNICAR
18	1	1	1	1	1

INSITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO CALI 2017					
PRUEBA FINAL GRADO 5^0 : RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ESTRUCTURA ADITIVA TIPO CAMBIO					
N^0 DE ESTUDIANTES	ETAPA DE ANALISIS			ETAPA DE SINTESIS	
	REPRESENTAR	RAZONAR	MATEMATIZAR	ARGUMENTAR	COMUNICAR
18	6	5	5	5	6

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Astola, P., Salvador, A., Vera, G. (2012). *Efectividad del Programa "GPA-RESOL" en el Incremento del Nivel de Logro en la Resolución de Problemas Aritméticos Aditivos y Sustractivos en Estudiantes de Segundo Grado de Primaria de dos Instituciones Educativas, una de Gestión Estatal y otra Privada del Distrito de San Luis*. Recuperado de http://tesis.pucp.pe/repositorio/handle/123456789/1702.Collections.Educación con mención en Dificultades de Aprendizaje.

Ayllón Blanco, M· (2012). *Invención-Resolución de Problemas por Alumnos de Educación Primaria.* Recuperado de https://hera.ugr.es/tesisugr/2116633x.pdf

Castañeda, Hernández y González, (2015). *Ruptura del contrato didáctico en la solución de un problema de geometría con estudiantes de secundaria.* Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40545377005

Figueroa Vera, R. (2013). *Resolución de ecuaciones con sistemas de dos variables*. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4736

García, Coronado y Giraldo (2015). *Orientaciones Didácticas Para el Desarrollo de Competencias Matemáticas.* Florencia, Colombia: Universidad de la Amazonía

Godino, J. (2011). Presente y Futuro de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

https://educaredidactiwordpress.com.

Herbst , P. (2012). Avances de Investigación en Educación Matemática. AIEM. University of Michigan (EE.UU.)

Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo. (2012). *PEI Institucional 2012*. Manual Institucional. Cali. Colombia

Insuasty Ossa, E. (2014). *Cambios producidos en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado noveno a través de situaciones didácticas utilizando geogebra.* Recuperado de https://repository.icesi.edu.co/biblioteca.../insuasty_aprendizaje_familias_2014.pdf

Callejo M, (2006). *Educación*. La gaceta de la RSME, vol. 9.1 Págs. 143-168.

Ley 115 de 1994. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

López de los Mozos, A. (2001). *Desarrollo de las Operaciones de Sumar y Restar: Comprensión de los problemas Verbales*. Recuperado de biblioteca.ucm.es/tesis/psi/ucm-t25308.pdf

Martínez, C. (2012). *Resolución de Problemas de Estructura Aditiva con estudiantes de Segundo Grado de Educación Primaria.* Recuperado de 200.23.113.51/pdf/29358.pdf

Mejía, Velásquez, Castellanos y Bayona (2010). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado de https://es.slideshare.net/mjcastellanos/estndares-bsicos-de-competencias-de-matematicas

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares matemáticas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2016). *Derecho básicos de aprendizaje*. Recuperado de http://www.aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/DBA%20Transición.pdf

Morales, Raúl. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionalesManizales*. Recuperado de ….

Ordoñez, Leysa. (2015). *Estructuras Aditivas en la Resolución de Problemas Aditivos de Enunciado Verbal (PAEV).* Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/47657/1/34607989_Leysa.pdf

Pérez, Y., Ramírez, R., *Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos.* Recuperado de file:///C:/Users/phapi/Downloads/Dialnet-EstrategiasDeEnsenanzaDeLaResolucionDeProblemasMat-3897810%20(1).pdf

Rico, (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Granada: Universidad de Granada. España.

Ruíz, Yusell (2013). *Estándares en Matemáticas.* Recuperado de

https://es.slideshare.net/yussel_ruiz/estndares-de-matemticas-16063708