CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO 5 EN EL CONTEXTO DE LAS NOCIONES DE ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA

DIGNORA DOMÍNGUEZ ARBOLEDA

MARÍA DEL CARMEN OBREGÓN MOSQUERA

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

SANTIAGO DE CALI

2017

CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO 5 EN EL CONTEXTO DE LAS NOCIONES DE ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA

DIGNORA DOMÍNGUEZ ARBOLEDA

MARÍA DEL CARMEN OBREGÓN MOSQUERA

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO

HENDEL YAKER AGUDELO

Mg. EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

SANTIAGO DE CALI

2017

Dedicatoria

Este trabajo representa para nosotras un camino hacia el éxito, y refleja nuestra gran dedicación, anhelos y esfuerzos, por ello, queremos dedicárselo a:

DIOS, por ser Él es nuestra primera fuente de inspiración para seguir adelante, siendo guía y sustento.

A nuestros familiares, porque con su paciencia, amor, comprensión y colaboración han contribuido en la realización de este trabajo,

A nuestros esposos e hijas, quienes vivenciaron cada paso de este proceso, dándonos voz de aliento, dedicación, apoyo y ante todo brindándonos todo su amor y paciencia.

Al bebe que viene en camino, quien se formó durante el recorrido de este viaje, siendo de gran inspiración y bendición.

Agradecimientos

En primer lugar, a **Dios**, que nos ha dado esta oportunidad de crecer y avanzar en esta gran labor como maestras y guías de esta sociedad.

Al **Ministerio de Educación Nacional** por su apoyo otorgado a través de la beca del banco de excelencia docente para la realización del presente trabajo de investigación, así como a las autoridades que intervinieron en su gestión. A la Universidad **ICESI** y a su equipo de trabajo que como institución ha prestado sus servicios durante el proceso de formación docente en la Maestría en Educación.

Al director de tesis, **Hendel Yaker Agudelo** y a su equipo de trabajo del Instituto Geogebra Cali integrado por los docentes **Leonel Alcides Monroy** y **David Benítez,** por su valioso respaldo académico y su permanente disposición en la contribución del presente trabajo.

A la **Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo**, especialmente a la Sede **Cristo Maestro, directivos docentes** y **docentes** que colaboraron cediendo espacios de trabajo y a todos los **estudiantes del grado 5 - 5** del presente año lectivo, que participaron con gran dedicación en el desarrollo las diferentes actividades propuestas.

De igual manera a nuestros **esposos, hijos, familiares** por su apoyo incondicional y paciencia.

Tabla de Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Resumen

El presente trabajo tiene el propósito de identificar las dimensiones de las etapas del proceso de resolución de problemas que evidencian los estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo durante el proceso de resolución de problemas que involucran las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra. Se diseñan para ello, una actividad diagnóstica que permite identificar los saberes previos de los estudiantes y tres situaciones problema que permiten establecer los recursos, estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas que los estudiantes emplearon en el proceso de solución de las mismas. Los elementos teóricos que se han tomado en cuenta para la elaboración y desarrollo de este trabajo se presentan bajo los cuatro aspectos: la resolución de problemas y sus estrategias, la construcción de la magnitud, el desarrollo de estrategias a través de un sistema de geometría dinámica y los errores y dificultades en la medición. La metodología que se escoge está caracterizada por análisis cualitativos y cuantitativos de registros escritos y multimedia de los estudiantes. Los resultados muestran que los estudiantes en este grado de escolaridad con el empleo de Geogebra mejoraron el entendimiento del enunciado del problema, así como el empleo de recursos, estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas que los conducen a la solución del mismo. Se observa la necesidad de mejorar el proceso de comunicar con los estudiantes a través de diversas actividades en el aula de clase.

Palabras claves: *resolución de problemas, recursos, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas, GeoGebra, área, perímetro.*

Introducción

Los cambios vertiginosos adelantados por la ciencia y la tecnología propician en la sociedad actual cambios sustanciales en todos sus ámbitos, por ello resulta de vital importancia que la educación de hoy les ofrezca a los estudiantes una formación que les permita afrontar de manera adecuada las exigencias que el mundo pone ante sus ojos. En dicho ambiente, mejorar las habilidades resulta de gran importancia, especialmente en aquellas que contribuyen a la resolución de problemas en los contextos referidos a la vida diaria y laboral.

Por otro lado, se reconoce cómo las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han empezado a ejercer una influencia notable en la formación profesional de los profesores de matemáticas y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que circulan en la escuela. De ahí la importancia de examinar el impacto, alcances y limitaciones de estas TIC, a partir de investigaciones que tengan en cuenta los aspectos del contexto local y regional y de esta manera contribuyan a formular estrategias de intervención en el aula más cercanas a la realidad de las instituciones educativas.

En la actual reforma del sistema educativo en Colombia, la Resolución de Problemas es uno de los Procesos Generales que estructura el modelo curricular para la enseñanza de las matemáticas, al punto de transformarse en el eje que articula el currículo, puesto que las situaciones problema proveen el contexto donde las matemáticas tienen sentido una vez éstas estén inmersas ya sea en la cotidianidad, otras ciencias o desde las mismas matemáticas (MEN, 2006). Se considera pertinente analizar el impacto que generan las TIC en el proceso de resolución y planteamiento de problemas matemáticos, abarcando asuntos tan variados como su contribución en el desarrollo de las competencias para la resolución de problemas por parte de los estudiantes, así como también el análisis acerca de la integración de las TIC en la enseñanza de este proceso (Pabón, 2002).

El presente trabajo indaga el último de estos aspectos: cómo los estudiantes en la resolución de problemas trabajan en un *Sistema de Geometría Dinámica* (en adelante SGD)[1] con las nociones de área y el perímetro de figuras geométricas, utilizando *los recursos*, es decir, las herramientas y técnicas que pueden usar para resolver un problema particular; *las estrategias heurísticas*, entendidas como las reglas para tener éxito en la resolución de problemas, las sugerencias generales que ayudan a comprenderlos mejor o que permiten el progreso hacia su solución; y las *estrategias metacognitivas* que se relacionan con el monitoreo y el control, relacionadas con la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones tales como planear, evaluar y decidir. Para tal propósito, se realiza el diseño y la implementación de una serie de situaciones problemas relacionados con la independencia de estas nociones, posteriormente se lleva cabo la sistematización[2] de esta experiencia de aula, lo que permite dar cuenta de las formas de actuar de los estudiantes y de las decisiones que éstos toman durante la resolución de determinados tipos de problemas en los ambientes de Geometría Dinámica.

[1] Según González (2001), los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.). Donde algunos objetos pueden ser seleccionados por el usuario y “arrastrados” por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción.
[2] Refiérase a sistematización como la descripción, clasificación y análisis de experiencias observadas.

Capítulo 1.

Definición del problema de investigación

En el presente capítulo se hace mención del contexto relacionado con la resolución de problemas, así como también algunas conclusiones de tesis que preceden al presente trabajo y aspectos de tipo legales y curriculares asociados a las preguntas de investigación. Además, se presenta la justificación que reconoce la importancia que tiene el objeto de análisis del presente trabajo, de igual manera los objetivos y preguntas que permean su realización. Todos estos elementos en su conjunto sirven como fundamento y un soporte para su desarrollo. En resumen, en este apartado se define y delimita el problema de investigación, justificando con argumentos variados su realización.

1.1. Contextualización

La resolución de problemas matemáticos representa para los maestros encargados del área de Matemáticas un gran desafío, tanto para su práctica como para su formación. Debe el maestro, en primer lugar, tener en cuenta sus alcances y limitaciones como metodología de enseñanza y aprendizaje, en tanto que implica nuevas formas de actuación y evaluación en el aula de clases y, en segundo lugar, debe estar atento a identificar y reconocer los aspectos esenciales en el aprendizaje de los estudiantes que el proceso de resolución de problemas puede movilizar en el aula de clases.

Los estudios realizados en los últimos años como el de Cortés y Galindo (2007), permiten visibilizar el desconocimiento de los principales aspectos de la resolución de problemas, de los usos didácticos y curriculares que se le puede dar a dicho enfoque. También se visibiliza que en el ejercicio docente existe poca familiaridad con los trabajos de George Polya, Alan Schöenfeld y/o Santos Trigo y de igual manera se ignoran los enfoques y propuestas en Didáctica de las Matemáticas relacionados con dichos trabajos.

Respecto a la enseñanza y aprendizaje de la geometría basados en la resolución de problemas, la desatención sobre las tendencias actuales es también evidente. Dicha situación se ve reflejada en el salón de clases y se torna más delicada cuando las tecnologías de la información y la comunicación aparecen en este escenario. Como consecuencia se observa poca reflexión acerca de ¿qué es un problema? ¿cuáles son los procesos involucrados en la resolución de problemas? ¿cómo se debe enseñar a resolver problemas? ¿qué son las estrategias heurísticas y cuál es su papel en la resolución de problemas? ¿qué cambios se producen en la resolución de problemas matemáticos cuando se integran los sistemas de geometría dinámica? ¿cuáles son las razones de los bajos puntajes de los estudiantes en cuanto al proceso de resolución de problemas en las pruebas externas que ellos presentan?

Esta situación pone también en evidencia la falta de actualización de algunos docentes en aspectos relevantes para el ejercicio de su labor, como la revisión de nuevos textos o la lectura de publicaciones de interés académico y didáctico, entre ellos los referentes de calidad educativa proporcionados por el Ministerio de Educación Nacional tales como los Lineamientos Curriculares y los Estándares Curriculares para el área de Matemáticas.

Por otro lado, es importante anotar que las tecnologías de la información y la comunicación, pueden establecerse como el ámbito especial para actualizar curricularmente el área de Matemáticas, al facilitar y dinamizar el proceso de resolución de problemas. De esta manera, las preguntas realizadas anteriormente podrían permitir estudiar cómo se llevan a cabo los procesos de resolución de problemas en los estudiantes a cargo.

El estudio de las estrategias heurísticas, por ejemplo, ha sido abordado en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, desde hace ya varios años, a partir de los trabajos de Polya (1945) y Schöenfeld (1985). Dicho interés se ha visto reavivado por la necesidad de conocer qué tipo de estrategias surgen y/o son usadas por los estudiantes en los ambientes tecnológicos.

Específicamente, en los últimos años los SGD, se han convertido en un poderoso recurso que posibilita indagar sobre los procesos que llevan a cabo los estudiantes cuando se enfrentan a una situación problema. Se reconoce que éstos son idóneos para plantear situaciones problema interesantes, en distintos niveles de escolaridad, que permitan desarrollar, adecuar y poner en juego diversos procedimientos para su solución.

El interés central del presente trabajo está guiado por la pregunta ¿qué dimensiones de las etapas del proceso de resolución de problemas se evidencian en los estudiantes de grado 5° en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

1.2. Antecedentes

1.2.1. De investigación

Se ha encontrado algunos escritos que tienen relación con el objeto de estudio del presente trabajo de grado. En primer lugar, se tiene que en 2010 fue presentado en la Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, el trabajo de grado, ***Trabajando los conceptos de área y perímetro con actividades didácticas en alumnos de cuarto grado de primaria*** elaborado por López Bohórquez Laura Cristina, Suárez Ruiz Nubia Fernanda, como requisito para optar el título de *Magíster en Matemáticas*.

Este trabajo se enfoca en un proceso didáctico en geometría, con niños de cuarto grado de educación básica primaria de la Institución Educativa las Américas ubicada en el barrio Álvarez de Bucaramanga. Se trabajaron los conceptos de área y perímetro, usando la resolución de problemas como método para involucrarlos en el aprendizaje. En sus prácticas anteriores las autoras habían identificado en los estudiantes confusión en las definiciones de dichas nociones y una equivocada relación entre ellas.

De esta manera deciden trabajar en el aula de clase, con actividades didácticas como el uso del geoplano, el cubrimiento de figuras con un patrón de medida y el reconocimiento del contorno.

Este trabajo establece que es importante proporcionarle al estudiante experiencias didácticas, con materiales concretos que le permitan desarrollar su capacidad analítica, crítica e investigativa. Estas experiencias deben abarcar desde actividades sencillas hasta situaciones más complejas que representen un reto y desarrollen habilidades de pensamiento matemático y lógico en la etapa de operaciones concretas. También resulta importante crear ambientes que den lugar a la geometría de tipo práctico que propicie el acercamiento a conceptos, el mejoramiento del lenguaje geométrico y el razonamiento.

En esta misma labor de investigación y consulta se encontró el trabajo de investigación titulado ***Resolución de problemas matemáticos y estrategias heurísticas: del lápiz y papel a los ambientes de geometría dinámica*****,** presentado en 2007 por Pabón Ramírez Octavio Augusto, en el Instituto de Educación y Pedagogía para el Programa de Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle, como requisito para optar el título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática.

Este trabajo tiene por objetivos determinar cuáles han sido algunos de los desarrollos de la resolución de problemas matemáticos en Colombia durante las últimas décadas y cuál ha sido su impacto sobre las ideas y prácticas en el área de matemáticas. También, cuáles son las concepciones y estrategias heurísticas que desarrollan los futuros profesores de matemáticas cuando se involucran en la resolución de problemas de construcción geométrica en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) y cómo han influido en estas concepciones y estrategias, la tradición heurística en Colombia.

En él se concluye cómo las estrategias heurísticas, que emergen durante el proceso de resolución de problemas geométricos, están estrechamente asociadas a las concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de los futuros maestros, al tipo de formación geométrica a la que son expuestos, al conocimiento de estrategias heurísticas que se usan habitualmente en el proceso de resolución de problemas geométricos en ambientes de lápiz y papel y al uso e integración de las herramientas informáticas y computacionales.

El autor señala que la tecnología por sí misma no puede provocar un cambio educativo, por lo cual se necesita redefinir los contenidos y la metodología de enseñanza. Esta investigación intenta reconocer algunos elementos asociados a la integración de las TIC a la formación de los profesores de matemáticas. En particular, se desea reivindicar algunos elementos de la metodología de resolución de problemas matemáticos, desde el proceso heurístico hasta algunos elementos de la metacognición.

Por último, se encuentra el trabajo denominado ***Estrategias de resolución de problemas de área y perímetro en ambientes de geometría dinámica en estudiantes de educación básica,*** presentado en 2005 por Obregón Mosquera María del Carmen, Rodríguez Portilla Bayron, en el Instituto de Educación y Pedagogía Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle, para optar título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Dicho trabajo indaga uno de los aspectos de esta problemática: las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes cuando trabajan en un Sistema de Geometría Dinámica con respecto a las nociones del área y perímetro de figuras geométricas. De igual manera, se presentan algunos elementos en relación con el diseño, la implementación y la evaluación de una serie de situaciones problemas realizadas para tal propósito.

Con este trabajo se concluye que sería recomendable proponer actividades de enseñanza y aprendizaje en clase de matemáticas donde se incorporen problemas que ofrezcan elementos para que los estudiantes discutan las diversas estrategias de solución, asimismo que se fortalezcan y valoren las formas de formular y comunicar argumentos matemáticos que soporten las soluciones proporcionadas por los estudiantes, pues contribuye a desarrollar en ellos un punto de vista de las matemáticas más cercano con el quehacer matemático.

Algunas de las dificultades que presentaron los grupos de estudiantes que participaron en el desarrollo de las situaciones planteadas fueron:

- Falta en el manejo e interpretación de los diferentes tipos de representación (gráfico, numérico y tabular).
- Desconocimiento de las estrategias de resolución de problemas.
- Existencia de creencias erróneas en cuanto al estudio tanto de la geometría y de las nociones de área y perímetro.
- Falta de lenguaje argumentativo. Además, la creencia de que el proceso de resolución, es en sí mismo una argumentación válida. (Obregón y Rodríguez, 2005, p. 78)

1.2.2. Legales

El desarrollo de las TIC, en la última década, ha dado un impulso notable a la incursión de éstas en el aula de clase. A razón de ello fue creada *Tit@ educación digital para todos,* un mega-proyecto de la Alcaldía de Cali y la Secretaría de Educación Municipal, que pretende desarrollar competencias del siglo XXI tanto en maestros como en estudiantes de las instituciones oficiales de la ciudad, a través de la formación en pedagogía mediada por TIC. Dicho programa reconoce que los maestros tienen un papel fundamental en la meta de mejorar la calidad de la educación en el Valle del Cauca y que, para ello, es importante el fortalecimiento de las prácticas educativas y el mejoramiento del proceso de enseñanza aprendizaje, a través de la potencialización de las nuevas formas de expresión desde trabajo colaborativo, la comunicación y la creatividad, a través de la integración de las TIC en el aula.

Durante el año 2016 Tit@ logró derribar el mito de que el proyecto solo significaba internet y computadores, puesto que en realidad lo que busca es brindar nuevas y diversas posibilidades para el fortalecimiento de la pedagogía, específicamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En 2017 el programa busca que los profesores integren las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de su disciplina, generando mecanismos que garanticen la sostenibilidad de Tit@.

Por otro lado, el plan sectorial del Ministerio de Educación Nacional “Educación de calidad, el camino para la Prosperidad” 2010 - 2014, se planteó como objetivo principal el mejoramiento de la calidad educativa en todos los niveles de escolaridad de Colombia. Y para lograr dicha meta, diseñó *“Todos a Aprender”:* el Programa de Transformación de la Calidad Educativa, cuyo propósito nace de la necesidad de mejorar los resultados de las estandarizadas que se aplican en los establecimientos educativos del país. De ahí que considere importante la formación de los maestros que imparten el servicio educativo en las áreas de Matemáticas y Lenguaje.

Una de las principales estrategias que adopta dicho proyecto consiste en la formación del profesorado desde el grado transición hasta quinto de primaria. Para lo cual diseña talleres de capacitación denominados *Componente de formación situada*, los cuales están apoyados en las problemáticas específicas de aprendizaje en el aula; este componente busca que los maestros fortalezcan sus prácticas de aula, para ello se efectuarán estrategias de interacción de comunidades de aprendizaje y acompañamientos en el aula de clase por parte de docentes tutores a los maestros. Su propósito es crear un ambiente de formación e intercambio y perfeccionamiento de conocimientos, actitudes y buenas prácticas, a través de talleres sobre el manejo del conocimiento didáctico del contenido, el uso de materiales, la evaluación formativa, el trabajo colaborativo, como aspectos que generen cambios positivos en las prácticas de aula de los maestros acompañados.

1.2.3. Curriculares

Según estudios realizados a los resultados de la prueba PISA en 2015, la mayoría de los estudiantes colombianos sólo demuestran capacidad para relacionar información y llevar a cabo procedimientos matemáticos rutinarios en preguntas que presentan contextos familiares, lo que evidencia la falta de trabajo con los estudiantes en lo que a los procesos de resolución de problemas se refiere.

En cuanto a las experiencias con la medida, los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas afirman que los niños generalmente no experimentan procesos de medición directa, donde reiteren una unidad de medida como proceso necesario para el establecimiento de un patrón de medida universal, sino que normalmente éstas están asociadas al uso del número, los cálculos y las fórmulas.

Por otro lado, los Lineamientos Curriculares de Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas (MEN, 1999) otorgan gran importancia a la introducción de los Sistemas de Geometría Dinámica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicha área, manifestando que éstos permiten la manipulación simultánea de diversos tipos de representación para un concepto matemático (visual, numérico y simbólico). Además, en dichos Lineamientos se considera que los Sistemas de Geometría Dinámica son herramientas valiosas que ayudan a desarrollar competencias y habilidades en el contexto de los pensamientos métrico y geométrico.

Otros referentes de calidad educativa como los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas y las Mallas de Aprendizaje para el área de Matemáticas, también presentan sugerencias curriculares asociadas al objeto de estudio del presente trabajo con el propósito de que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las nociones de área y perímetro, así como de la incorporación del proceso de resolución en el aula de clase, éstos sean asumidos como ejes centrales, de manera que los estudiantes puedan ganar confianza en el empleo de las matemáticas dentro y fuera del salón de clases.

1.3. Justificación

Aunque parece haber un consenso generalizado de que las matemáticas desarrollan en los individuos la habilidad para formular y resolver problemas, y que ésta constituye la base para alcanzar procesos cognitivos superiores, en los cuales predomina el pensamiento crítico, reflexivo y analítico, los resultados de diversas evaluaciones y diagnósticos realizados en los últimos años sobre la calidad de la educación en el país, y en particular de la educación matemática, muestran que los estudiantes colombianos no logran los objetivos curriculares nacionales, y que sus desempeños indican que se encuentran muy lejos de hacer realidad dicho consenso.

Existen indicios que muestran cómo los estudiantes colombianos pueden resolver aquellos tipos de problemas de carácter algorítmico, como lo muestran los resultados de las pruebas internacionales PISA[3].

> El menor desempeño se registró en matemáticas. Menos de la quinta parte (18%) de los evaluados alcanzó el nivel mínimo (dos). Estos estudiantes pueden interpretar situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa, utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales y efectuar razonamientos directos e interpretación literal de los resultados. Sólo 10 de cada 100 mostraron competencias en los niveles tres y cuatro.
>
> La mayoría de los estudiantes colombianos sólo demostró capacidad para identificar información y llevar a cabo procedimientos matemáticos rutinarios, siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, y responder a preguntas relacionadas con contextos conocidos. (MEN, 2008, p. 34)

A nivel local y en particular los resultados del Establecimiento Educativo Carlos Holmes Trujillo, al realizar un comparativo entre los años 2015 y 2016 se encuentra que la prueba saber en el año 2015 evidencia que el 64% de los estudiantes de grado 5° no identifica unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas y además en dicho grado el 50% de los estudiantes no establece relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes, en el componente de comunicación. Por otro lado, el 66% de los estudiantes no utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición en el componente de resolución.

[3] Según Piscoya (2004) la calificación de la prueba PISA de Matemática incluye seis niveles de desempeño, en sentido decreciente, del más complejo al más simple. Cada uno de estos niveles combina por grado de complejidad cada una de las siguientes habilidades requeridas para utilizar los conocimientos incluidos en el área de matemáticas que se entienden como conjuntos de destrezas y que se clasifican en tres conglomerados distinguibles, aunque generalmente operen en conjunto: habilidades para la reproducción de información, habilidades de conexión o ligaduras y habilidades de razonamiento.

Para el año 2016 los resultados de dicho establecimiento educativo muestran que el 63% de los estudiantes de grado 5° no identifica unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas y además en dicho grado el 39% de los estudiantes no establece relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes, en el componente de comunicación. Por otro lado, el 68% de los estudiantes no describe ni argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija. Y finalmente, el 76% de los estudiantes no utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición en el componente de resolución.

Estos resultados muestran la existencia de algunas problemáticas en los estudiantes colombianos, tanto en lo que se refiere a formulación y resolución de problemas, como al área temática de la medición. Entre algunas de las causas de dichos problemas, se pueden identificar las siguientes:

> La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro se reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica.
>
> No es extraño, en este medio, introducir a los niños y a las niñas en el mundo de la medida con instrumentos refinados y complejos descuidando la construcción de la magnitud objeto de la medición y la comprensión y el desarrollo de procesos de medición cuya culminación sería precisamente aquello que hemos denunciado como prematuro.

No se les ha permitido conocer el desarrollo histórico de la medida, lo que conlleva a que no se den cuenta de la necesidad misma de medir, ni de cómo la medida surgió de una “noción de igualdad socialmente aceptada” al comparar el tamaño, la importancia, el valor, etc., en situaciones comerciales o de trueque.

Algunos investigadores afirman que los niños no tienen conciencia de las sutilezas de la noción de replicación de la unidad, es decir, la repetición de una única unidad de medida, a partir de lo cual el hombre ha llegado al número y al recuento; y que de este hecho nació la necesidad de patrones de medida fijos. Las experiencias de los niños con las medidas comienzan normalmente con el número, y están a menudo restringidas a él, con pocas posibilidades de explorar los principios en los cuales se apoya la medición. (MEN, 1998, p. 62)

No se puede desconocer que en la escuela tradicional el tratamiento de la resolución de problemas con los estudiantes también presenta dificultades y en especial en la educación básica primaria.

De esta forma, la enseñanza de la resolución de problemas en la educación primaria es rutinaria ya que se asignan ejercicios, más que problemas donde el estudiante los resuelve en forma mecánica. En otros casos, cuando realmente se trabajan situaciones problemáticas, como señala Baroody (1994), las mismas son extraídas de los libros en forma descontextualizada y, por tanto, alejadas de cualquier significado para los alumnos, debido a que los mismos en nada se asemejan con la realidad en la que están inmersos. (Pérez & Ramírez, 2016, p. 174)

Es necesario entonces una reformulación no solo de lo que se enseña, sino del cómo y del para qué se enseña, teniendo en cuenta que cada vez aparecerán en escena, nuevas necesidades de preparación matemática que tendrán que ser atendidas desde la Educación Básica, de manera que se identifiquen estrategias alternas para buscar soluciones a los problemas mencionados. Es decir, pueden anticiparse movimientos importantes en el campo del diseño y desarrollo curricular, así como en la aplicación de nuevas estrategias para el uso de nuevas herramientas en el aprendizaje[4]

Resulta fundamental estructurar y movilizar propuestas donde se incluyan dichas estrategias, que identifiquen acciones a realizar en pro del mejoramiento de los aprendizajes, que sean implementadas y luego de varias experimentaciones se presenten y divulguen los resultados obtenidos.

Por otro lado, los Lineamientos Curriculares de Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas (MEN, 1999) otorgan gran importancia a la introducción de los SGD en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, manifestando que éstos permiten la manipulación simultánea de algunos tipos de representación de las nociones de área y perímetro (visual, numérico y simbólico). Además, en dichos Lineamientos se considera que los SGD son herramientas potentes que ayudan a desarrollar competencias y habilidades en el contexto de los pensamientos métrico y geométrico.

Santos (1997) afirma que en el contexto del enfoque de resolución de problemas se intenta que el estudiante desarrolle habilidades y estrategias que le ayuden tanto a participar del desarrollo de las ideas matemáticas, como al entendimiento de los contenidos matemáticos.

[4] Estas incluyen la incorporación de las TIC al currículo de matemáticas y la incorporación de propuestas alternativas en el ambiente de lápiz y papel.

El principal objetivo al utilizar los SGD tal como se concibe en este trabajo, es identificar las estrategias heurísticas que desarrollan los estudiantes de Educación Básica Primaria durante el proceso de resolución de problemas, donde se involucran las nociones de área y perímetro.

Existe una situación que resulta contradictoria en cuanto a la formación en Matemáticas, pues mientras socialmente se reconoce su importancia para el desempeño de los individuos en el mundo académico y laboral, posee desde la experiencia educativa, el estigma de ser una materia difícil, aburrida y de poca comprensión; desvirtuando sus bondades al atribuírsele características que ahondan en la desigualdad y la exclusión.

Frente a esta situación los referentes de calidad educativa como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas y las Mallas de Aprendizaje para el área de Matemáticas, proponen disposiciones curriculares de forma que las Matemáticas sean percibidas y experimentadas como una herramienta útil, asequible, indispensable e interesante para todos los estudiantes.

A partir de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre la matemática que circula en la escuela, es posible identificar que existe ambigüedad en el uso de la **noción de medida.** Esta situación se explica en buena proporción debido a los variados contextos en los cuales circula dicha noción, lo que da lugar a que ciertos objetos se identifiquen con otros o simplemente no se tengan en cuenta, como es el caso de las nociones de área y perímetro, como lo muestran algunos estudios al respecto.

> Incapacidad de los alumnos para distinguir magnitudes diferentes, por ejemplo, superficie y perímetro, masa y volumen, etc. En particular, la confusión entre perímetro y superficie, constatada ya por Lunzer, es de tal persistencia que puede ser considerada como un obstáculo epistemológico que requiere un tratamiento específico. Así, muchos adultos continúan creyendo que una finca A, que tiene una valla de mayor longitud que otra B, tiene también, en todos los casos, mayor superficie que B. (Chamorro, 2006, p. 231)

La ***noción de magnitud*** es entendida desde diversas acepciones, para el presente trabajo se tendrá en cuenta la siguiente:

> En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. "Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad"; "Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar" (Diccionario de M. Moliner). (Godino, 2004, p. 295)

Frecuentemente, se confunden la magnitud con el número que la mide. Además, se ha señalado que el enfoque didáctico dominante para el tratamiento escolar de la medida que subyace a las propuestas curriculares vigentes es un enfoque de magnitudes, donde el sentido otorgado a éstas proviene de las ciencias naturales y no se enmarca en las propiedades que permiten restringir su sentido como noción matemática. Esta situación se hace aún más compleja cuando en la matemática que circula en la escuela la existencia de la medida de una superficie se admite implícitamente y los problemas que usualmente se plantean son para realizar meros cálculos, sin advertir previamente si la superficie es una parte del plano, una figura geométrica o una magnitud geométrica, prescindiendo de la construcción de magnitud.

Existe pues una problemática compleja en relación con la didáctica del pensamiento métrico como lo revelan los diferentes análisis[5]. Uno de los hechos más visibles en la resolución de problemas con relación a la medida de longitudes y superficies es la dificultad que presentan los estudiantes al no diferenciar las nociones de área y perímetro (confusión perímetro – área), que puede ser producto de la no comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad escogida y el número de veces necesario para cubrir una longitud o superficie dada; la falta de una comprensión adecuada de las diferentes unidades estándar de medida, tanto en su tamaño, como las respectivas conversiones entre ellas; el no uso de diferentes tipos de unidades para medir el perímetro o el área de una superficie dada; o de los problemas diseñados con fines educativos, típicos de las matemáticas escolares, que van en detrimento de la comprensión de la verdadera naturaleza del proceso de medida.

Estos hechos señalan la necesidad de realizar indagaciones que den sentido al enfoque didáctico del tratamiento de las magnitudes, considerándose primordial la conceptualización de la noción de área y las dificultades que plantea el estudio de estos problemas, los cuales frecuentemente pasan desapercibidos en el ámbito escolar.

La presente propuesta se apoya en el uso de SGD, particularmente GeoGebra (programa que se describe con mayor detalle en un próximo apartado), recoge algunas de estas consideraciones e intenta desarrollar una serie de tareas, donde se haga visible el impacto del uso de la tecnología en la resolución de problemas en el contexto

[5] En Colombia existen grandes dificultades en los estudiantes para comprender y asimilar dicho pensamiento, lo cual se observa en los resultados arrojados por las pruebas SABER. Estas pruebas revelan que en Colombia para los estudiantes los ejes relacionados con las magnitudes y sus medidas representan una problemática.

de situaciones no rutinarias como recurso expresivo y se aporten elementos teóricos y metodológicos para la construcción de la noción de área como magnitud.

Los problemas en contextos de situaciones no rutinarias son aquellos que involucran varios métodos de solución o que no requieren una simple aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos para resolverlos, además éstos se pueden constituir en un recurso natural para discutir actividades que ejemplifiquen el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones y en general estrategias de carácter cognoscitivo y de monitoreo. Contrario a lo que comúnmente reflejan los problemas rutinarios encontrados en los libros de texto, que se identifican con el uso de procesos mecanizados o memorísticos. (Santos, 1997, p. 28).

Teniendo en cuenta las investigaciones adelantadas en el ámbito regional, donde se reconoce que un ambiente apropiado para desarrollar la tarea de elaborar situaciones en el contexto de las interacciones entre número, magnitud y medida. El análisis previo desde una perspectiva didáctica permite identificar una serie de variables que se revelan muy importantes ya sea para seleccionar situaciones problema en el contexto del currículo establecido o para explorar variantes a las situaciones privilegiadas en él.

En este sentido se señala la pertinencia de diseñar tareas encaminadas a examinar la invariabilidad del área y avanzar más allá del uso de fórmulas, de igual manera uno de los rasgos más importantes de los SGD, como lo es el *arrastre*[6] permite analizar el comportamiento de las figuras a través de la verificación de las medidas del área y el perímetro de figuras.

[6] Los programas de ordenador, posibilitan el ampliar y mejorar las estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Los programas basados en la geometría dinámica, poseen la herramienta de arrastre que posibilita la formulación y verificación de conjeturas o la construcción de contraejemplos que permiten el rechazo/modificación de las mismas. (Barroso & Cavilan, 2003, p. 23).

Aunque existen investigaciones como las de Barroso y Cavilan (2003), que aportan elementos sobre el proceso de incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), sus alcances, limitaciones y riesgos, no todas abordan de manera sistemática cómo dichas tecnologías afectan el proceso de resolución de problemas frente a una noción matemática, en particular las estrategias que los estudiantes desarrollan y usan y cómo justifican estos hechos.

1.4. Preguntas

1.4.1. Pregunta central

¿Qué dimensiones de las etapas del proceso de resolución de problemas se evidencian en los estudiantes de grado 5° en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

1.4.2. Preguntas auxiliares

¿Qué tipo de situaciones problema se deben diseñar de manera que permitan la descripción de las dimensiones que utilizan los estudiantes durante las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

¿Cómo se deben implementar las situaciones problema diseñadas durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

¿Cuál es el desempeño de los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

¿Cuáles son las dimensiones que utilizan los estudiantes durante las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Describir las dimensiones que emplean los estudiantes de grado 5° durante el desarrollo de las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra.

1.5.2. Objetivos específicos

- Diseñar situaciones problema que permitan la identificación de las dimensiones que utilizan los estudiantes durante las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra.

● Implementar las situaciones problema diseñadas durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra.

● Analizar el desempeño de los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra.

● Describir las dimensiones que utilizan los estudiantes durante las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra.

Capítulo 2.

Referentes teóricos

Las reformas curriculares reconocen la importancia del proceso de resolución de problemas durante la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, donde los roles del maestro y el estudiante cambian, dándole mayor importancia al papel de los estudiantes en la construcción de las nociones, donde el maestro se convierte en un facilitador que apoya dicho aspecto y diseña ambientes de aula apropiados en estos contextos.

Dentro de este contexto se destaca el papel significativo del uso de múltiples representaciones[7] para el aprendizaje de las nociones matemáticas fundamentales. En esta dirección, la incorporación de las TIC en el aula de clase, específicamente los SGD, ofrecen variadas posibilidades para apoyar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este capítulo muestra al lector un panorama sobre algunos referentes teóricos acerca de la resolución de problemas, el uso SGD en la resolución de problemas y las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de las nociones de área y perímetro.

---

[7] Para acceder al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas, según Raymond Duval creador de la teoría de representaciones semióticas. Los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural. Según este autor, es posible adquirir un determinado concepto, cuando es posible que los estudiantes transiten entre dos más representaciones semióticas de un mismo concepto.

2.1. Resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas

La actividad matemática implica que los individuos encuentren sentido a las ideas que ésta presenta. Mientras se hace matemáticas, es frecuente que se busquen patrones y relaciones, se comuniquen resultados, se usen métodos producto de la experiencia, se prueben conjeturas, se estimen resultados y se trabaje en grupo. En dicho contexto, se hace necesario que estas ideas se vean reflejadas en el salón de clases. Es decir, es relevante que la enseñanza de las matemáticas sea un medio a través del cual los estudiantes construyan su propio conocimiento y encuentren sentido a las ideas que el saber matemático pone a su alcance.

Es así, como el tipo de actividades o problemas que se presenten a los estudiantes juega un papel fundamental en el aprendizaje de esta disciplina. Al respecto, Godino et al (2004) señalan que escoger y usar buenos problemas e instituir los medios apropiados para una comunicación en el salón de clases, pueden pensarse como las tareas fundamentales que el maestro necesita llevar a cabo en la enseñanza de las matemáticas. Es decir, se deben proponer problemas que posibiliten y fortalezcan en los estudiantes la oportunidad de conectar ideas matemáticas, así como valorar y razonar las estrategias que aparezcan durante el proceso de solución.

En este sentido, el enfocar el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas, hace posible que los estudiantes se involucren en actividades similares a las que los matemáticos realizan al trabajar en esta disciplina. De esta manera, los problemas se convierten en el medio a través del cual los estudiantes pueden discutir y defender sus ideas, examinar el potencial de cierto modo de solución, utilizar argumentos matemáticos que brinden soporte a sus conjeturas, o proponer contraejemplos que contradigan algún resultado.

Por otro lado, quienes reconocen el proceso de resolver problemas como una actividad importante en el desarrollo de las matemáticas han puesto atención tanto en el diseño y presentación de problemas, así como en estudiar las estrategias al resolverlos (Godino et al, 2004), porque entender el proceso de cómo un individuo resuelve problemas, desempeña un papel fundamental al proponer actividades de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas.

Un aspecto importante es que las situaciones o problemas deben poseer una estructura que permita a los estudiantes formular preguntas, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados. Los problemas o situaciones pueden estar inmersos en múltiples contextos y ofrecer al estudiante la oportunidad de establecer conexiones entre el quehacer de la disciplina y los contextos en los que se presenta, a saber, contexto matemático, contexto cotidiano o mundo real y contexto hipotético. (MEN, 1998).

En las reformas Curriculares que se han realizado en Colombia se reconoce la resolución de problemas como un proceso importante para el aprendizaje de las matemáticas (Schöenfeld, 1992; Santos, 1997; Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998; NCTM, 2000). Todas ellas coinciden en reconocer que se ha limitado el aprendizaje de las matemáticas a la memorización de un conjunto de algoritmos y técnicas poco significativas para los estudiantes. Ante esto se propone que debe generarse en el aula un ambiente activo donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, realizar interrogantes, conjeturas y enunciar contraejemplos.

La resolución de problemas provee el contexto ideal para que en el ambiente de aula se pueda generar la construcción de los aprendizajes de los estudiantes, haciéndose necesario que el currículo de matemáticas considere este proceso como su eje central, si se desean obtener mejores experiencias en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Por estas razones, los elementos teóricos que se han tomado en cuenta para la elaboración y desarrollo de este trabajo se presentan bajo los cuatro aspectos siguientes: resolución de problemas y estrategias, construcción de la magnitud, desarrollo de estrategias a través de un sistema de geometría dinámica y errores y dificultades en la medición.

2.1.1. Una discusión sobre la resolución de problemas de matemáticas.

A finales de los años 50, la enseñanza de las matemáticas se vio influenciada por el movimiento denominado *aprendizaje significativo.* Lo que condujo a una serie de reformas a la matemática escolar. Existen tres movimientos vinculados al aprendizaje significativo: *el movimiento de las matemáticas modernas, el regreso a lo básico y la resolución de problemas.*

El movimiento mundial de las matemáticas modernas.

El lanzamiento exitoso del Sputnik el 4 de octubre de 1957 por la Unión Soviética en su programa con el mismo nombre, se convirtió en un fuerte golpe para Estados Unidos, donde se estaba llevando a cabo el proyecto Vanguard para diseñar y planificar dos satélites. Los norteamericanos temían que los soviéticos hubieran tomado la delantera en la carrera armamentista, de ahí que sus escuelas vieran la necesidad de promover una renovación de la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas en la educación secundaria y media. Para ello los estudiantes debían tener conocimientos de matemáticas al nivel de las exigencias tecnológicas. Variados programas experimentales de matemáticas fueron implementados por grupos de expertos, quienes asumieron para la Educación Matemática las ideas de sistematización en términos de la lógica y la teoría de conjuntos. Dando origen, en la década de los 60 a una reforma curricular centrada en las matemáticas y en las ciencias. *Los matemáticos de la época indicaron que el aprendizaje significativo de las matemáticas sería el resultado de enseñar a los niños y las niñas las estructuras de las mismas.*

Como resultado aparece la *matemática moderna*, que provocó un cambio sustancial de la enseñanza, tanto en su filosofía como en los contenidos. Entre los principales rasgos del movimiento y los resultados que produjo, se pueden destacar los siguientes:

- Se introdujeron las estructuras abstractas en diversas áreas, principalmente en el álgebra.
- Se profundizó en el rigor lógico, en la comprensión, anteponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.
- Esto último condujo a la importancia de la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y en el estudio del álgebra.
- El estudio de la geometría básica en los currículos de matemáticas se había dejado de lado como consecuencia de la aparición de las matemáticas modernas (MEN, 1998). En diversos planes y programas de estudio de varios países alcanzados por la reforma, el estudio de la geometría sufrió transformaciones como: primero tenía el nivel de asignatura, luego se redujo a una unidad dentro del programa de matemáticas y después desapareció del plan de estudios.
- Como consecuencia se reemplazaron los problemas interesantes, abundantes en la geometría básica, por ejercicios cercanos a la repetición y reconocimiento de

nombres. Por ejemplo, se dejaron de lado los problemas de construcciones geométricas con regla no graduada y compás dando paso a la solución de listas de ejercicios donde se pedía completar tablas con valores de verdad de dos o más proposiciones.

En los años 70 se comenzó a reconocer que varios de estos cambios no habían resultado muy apropiados. Con la sustitución de la geometría por el álgebra, la matemática elemental careció de contenidos y problemas interesantes. La falta de intuición espacial en el pensamiento de los estudiantes fue otra de las consecuencias nefastas al desaparecer la geometría de los programas.

Los estudiantes pudieron trabajar con propiedades de las operaciones entre conjuntos y reconocer que existen propiedades de las operaciones de los números naturales, aprendieron el lenguaje técnico de las matemáticas, pero no lograron realizar operaciones con números naturales ni fraccionarios y no podían entender el significado de las respuestas a un problema.

El regreso a lo básico

Como oposición al movimiento de las matemáticas modernas, surge una contrarreforma denominada *El regreso a lo básico,* interesada en los procesos algorítmicos y en las cuatro operaciones con enteros, fraccionarios y decimales.

Posteriormente, fue innegable que tal visión no era la solución más apropiada para la enseñanza de las matemáticas. Los estudiantes, en el mejor de los casos, aprendían de memoria los procedimientos sin comprenderlos. Al finalizar la década de los setenta se comienza a cuestionar el eslogan "*retorno a lo básico*". Y surge el interrogante ¿Qué es lo básico? Si no era posible enseñar matemáticas modernas, entonces ¿habría que enseñar matemáticas básicas conllevando a otros cuestionamientos como: ¿qué son matemáticas básicas? ¿la geometría elemental?, ¿la aritmética?, surgieron entonces muchas opiniones sobre qué es "lo básico". El preguntarse sobre este tema fue importante en el III Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Berkeley en el verano de 1980, ante lo cual se presenta el siguiente interrogante ¿Podría ser la resolución de problemas el foco de atención y respuesta a esa pregunta? De acuerdo con García J. (1999) "*the problem solving approach*", se pretende que sea algo más que otro eslogan y se convierta en toda una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar a cabo.

El movimiento de la resolución de problemas

Este movimiento aparece a finales de los años 70 como negación a los movimientos anteriormente mencionados. Centrándose la atención de inmediato en los trabajos de George Polya.

El trabajo de Polya

Polya, matemático y profesor de profesión, realiza en su trabajo una descripción acerca de cómo se resuelven los problemas matemáticos. Par ello hace una reflexión sobre su experiencia personal como matemático, pensando que su propuesta se ajustaba a la solución de cualquier tipo de problemas.

En 1945, Polya muestra el trabajo titulado *Cómo plantear y resolver problemas,* el cual se constituye en un clásico. El libro está dividido en cuatro secciones:

a) En el salón de clases,
b) Cómo resolver un problema: Un diálogo,
c) Breve diccionario de heurística
d) Una sección de problemas, sugerencias y soluciones.

En la primera sección, *en el salón de clases*, el autor muestra el propósito de la lista de preguntas y sugerencias para resolver problemas que pretenden ayudar al estudiante de forma eficaz y natural durante el proceso de resolución de un problema. Polya sugiere que no se debe dejar solo al estudiante mientras intenta resolverlo, ni hacerle exigencias acerca de lo que debe hacer. El maestro debe tener una posición intermedia: hacer preguntas y sugerencias para que el estudiante gradualmente alcance hábitos adecuados y además desarrolle autonomía.

Para Polya resulta importante en el proceso de resolución de problemas las siguientes etapas:

i. Comprender el problema
ii. Trazar un plan
iii. Ejecutar el plan
iv. Visión retrospectiva.

Respecto a ellas, el autor las especifica de la siguiente manera:

i. Comprender el problema: En esta primera etapa deben quedar claros: la comprensión supone entender la pregunta, separar los datos y las relaciones entre éstos y entender los contextos en los que se presentan. Estos elementos serán ubicados cuando se contesten los siguientes interrogantes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son los datos?
¿Cuál o cuáles son las condiciones?

Las respuestas a estos interrogantes deberán ayudar eficazmente a la comprensión de los problemas que se trata de resolver. En los *problemas por demostrar,* las preguntas poseen una variación leve: ¿Cuáles son las hipótesis? ¿Cuál es la conclusión?

Dicha etapa se considera decisiva para el éxito en las próximas etapas El mismo Polya manifiesta: intentar resolver un problema sin entenderlo es algo tonto.

Una vez que el resolutor comprenda el problema, deberá comenzar a esbozar un plan de solución.

ii. Trazar un plan: En esta segunda etapa se relacionarán los elementos que conforman el problema con la intención de observar e indagar posibles vías de solución. Como cualquier plan, supone el establecimiento de pasos o tareas para llegar a un objetivo, que es la solución correcta. Considerándose para ello útiles las estrategias heurísticas, éstas son estrategias generales que por sí mismas no garantizan éxito, pero que contribuyen mucho cuando se usan de manera adecuada. Ciertas estrategias que consiguen ayudar a trazar un plan incluyen:

- Considerar una parte de la hipótesis.
- Pensar en problemas conocidos.
- Dividir un problema en subproblemas.
- Formular el problema de una manera diferente.
- Usar diagramas para representar el problema de otra manera.

Las heurísticas son presentadas en forma de sugerencias y preguntas, y pueden ser utilizadas en el aula por estudiantes y maestros, suponiendo el diálogo con sí mismo que sostiene un matemático. De su deliberación se derivarán las bases del plan ya sean las técnicas a utilizar y/o los métodos a seguir.

Esporádicamente, no se sabe qué estrategia seguir ¿Qué se debe hacer en estos casos? En la práctica aparecen algunas estrategias para atacar un problema: ¿cuál será la forma de elegir la estrategia o la alternativa más acertada?

ii. Ejecutar el plan: Cuando se ha pensado un plan es preciso llevarlo a cabo, es decir, desarrollar cada una de las acciones concebidas en la fase anterior hasta llegar a la solución. Si el plan está bien diseñado, su realización es viable, y si además se poseen los conocimientos y la preparación necesaria, podría ejecutarse sin contratiempos. Si surgen dificultades, se tendrá que regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para cambiarlo por completo.

iii. Visión retrospectiva. Al hallar la solución no se ha llegado al final del proceso. Debe preguntarse si el procedimiento empleado sirve para resolver problemas similares Al presumir haber llegado a la respuesta del problema que está abordando, se comienza un nuevo proceso que engloba: contrastar los resultados, los razonamientos, examinar caminos más cortos y persuasivos, así como emplear el resultado obtenido en la solución de otro problema.

La descripción del proceso de solución que Polya explica supone un resolutor ideal e intenta describir conceptualmente las tareas “generales" que éste realiza al pasar por cada una de los instantes del proceso.

El trabajo de Polya, ha sido criticado debido a su alusión al resolutor ideal, que llega al resultado linealmente y sin contratiempos desde la fase de entendimiento hasta la de revisión, conoce qué acciones realizar a cada instante y cómo demostrar lo que hace. En el trabajo de Polya no se evidencian respuestas a los siguientes interrogantes:

a) ¿Qué acciones realiza un resolutor cuando no entiende un problema?

b) ¿Qué acciones instruccionales realizar para llegar el entendimiento de los problemas?

c) En diversas ocasiones las estrategias seleccionadas por el estudiante conducen a caminos no exitosos hacia la solución del problema.

El trabajo de Schöenfeld

Schöenfeld (1985) después de realizar varias investigaciones asegura que existen cuatro dimensiones que inciden en el proceso de resolución de problemas: estrategias cognitivas, recursos, estrategias metacognitivas y sistema de creencias. A pesar de apoyarse en los trabajos hechos por Polya y reconocer la trascendencia de las estrategias que este menciona, considera que los estudiantes que tienen buenos resultados en la práctica de dichas estrategias, usualmente presentan tropiezos cuando los problemas están planteados con ciertas modificaciones.

Para más claridad, es necesario analizar las dimensiones ya mencionadas:

Las e*strategias cognitivas o heurísticas* se pueden contemplar como acciones, estrategias y técnicas valiosas para resolver problemas. Polya (1945), referencia las heurísticas por medio de interrogantes y propuestas que hace un gran resolutor:

a) Concebir un problema semejante que sea más accesible
b) Manifestar el problema de manera diferente
c) Cambiar los datos del problema.

Las heurísticas son técnicas, tales como descomponer el problema, invertirlo, mejorar las condiciones, etc. Los estudiantes al adquirir dichas técnicas podrán usarlas en circunstancias posteriores, sin embargo, esto requiere de mucho esfuerzo (Schöenfeld, 1987).

En cuanto a las estrategias frecuentes de resolución de problemas surge el interrogante de si éstas asumen una particularidad dependiendo del contexto del problema. Para ello se tienen en cuenta algunos casos, entre los cuales, aquellos que ofrezcan al menos cierto nivel de complejidad. En cualquier demostración geométrica es pertinente analizar situaciones en donde las medidas de las figuras comprendidas sean iguales o tengan cierta relación, antes de examinar figuras con medidas arbitrarias. Para dar un ejemplo, se muestra el siguiente problema:

Considera dos cuadrados uno fijo (ABCD) y otro móvil (OSRQ), el centro del cuadrado fijo (0) es el eje**.** ¿Cuál es el área de la figura sombreada?

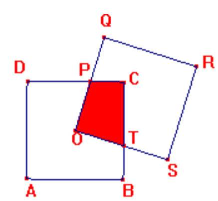


Figura 1. Problema del área sombreada.

En las siguientes figuras se han considerado dos casos especiales:

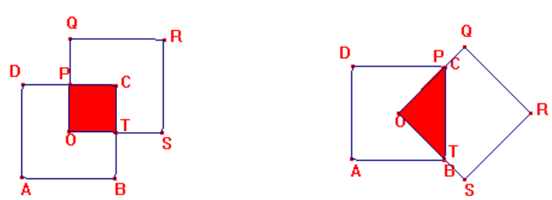


Figura 2. Casos especiales donde las medidas de las figuras involucradas sean iguales o cumplen alguna relación.

En ambos casos el área sombreada es de un cuarto del área del cuadrado fijo; esto puede motivar a la exploración de un caso más frecuente con la idea de que el área sombreada es una constante.

Los *recursos* son las bases en las que se ha sostenido la resolución de problemas. Para identificar estos elementos se requiere examinar las nociones que el sujeto tiene y cómo éste ha llegado a dicha nociones.

Schöenfeld (1992), muestra una variedad de recursos que logran favorecer la resolución de problemas en un dominio matemático específico: el conocimiento cotidiano e inductivo acerca del dominio del problema, la idea de situaciones y razonamientos, la destreza para elaborar operaciones algorítmicas, la relación con formas rutinarias, la adquisición de un conjunto de competencias notables, la percepción acerca de las reglas del lenguaje del dominio. Tener en cuenta todo lo anterior permite establecer la habilidad y seguridad que tiene el sujeto en la solución de determinado problema.

Las *estrategias metacognitivas* consisten en cómo el individuo usa los conocimientos que posee para la toma las decisiones pertinentes en los momentos indicados de forma eficaz, como por ejemplo el escoger sus estrategias, y cambiar de rumbo cuando lo crea conveniente para realizar o resolver determinado problema.

Schöenfeld (1992) evidencia que los sujetos expertos en solución de problemas matemáticos, se concentran más en comprender el problema, inspeccionar constantemente su paso a paso y finalmente evaluar su resultado. Caso contrario de los estudiantes.

Por lo anterior considera, que cuando no se eligen las estrategias y recursos correctos el fracaso es inevitable, a no ser que se corrija oportunamente. Así que aconseja manejar rigurosidad para que se pueda alcanzar el éxito en la solución de los problemas.

De esta manera se puede analizar que todo ese proceso ayuda al desarrollo del pensamiento matemático, en donde se da lugar a detenerse, buscar nuevas alternativas de solución, inferir, corroborar hipótesis, entre otras.

Schöenfeld (1987) (citado por Santos, 1997) propone ciertas acciones que pueden contribuir al progreso de las estrategias metacognitivas:

- Presentar videos de estudiantes resolviendo problemas. Con la finalidad de identificar las debilidades y habilidades que éstos demuestren en el proceso.
- Ejercer el rol de regulador y orientador mientras los estudiantes resuelven un problema.

Por otro lado, en el ámbito de las matemáticas existen ciertas concepciones acerca de lo que es hacer matemáticas y sobre los objetos matemáticos. Ante esto es pertinente analizar el impacto de dichas creencias durante el ejercicio de los estudiantes al resolver problemas.

Schöenfeld (1985) en algunos de sus estudios manifiesta que hay sujetos que actúan de acuerdo al sistema de creencias que poseen, por ejemplo, el matemático se relaciona con la solución poniendo en práctica las instrucciones de demostración matemática que le guía su experiencia. Es decir, que las suposiciones que un individuo tenga acerca de las matemáticas van a inferir en la forma como éste escoja una ruta resolutora. En el caso de los docentes el sistema de creencias sobre las Matemáticas influye en el contenido que se enseña y en la manera cómo lo enseña. Así, por ejemplo, un docente cuya visión de la Matemática es la de una disciplina de resultados precisos y procedimientos indiscutibles donde sus elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas, considerará que saber matemática será equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de esta disciplina. Esta visión de las Matemáticas es la que comúnmente circula en la escuela, la enseñanza tradicional, que afecta seriamente los procesos de enseñanza y aprendizaje dentro del aula de clase.

El trabajo de Luz Manuel Santos Trigo

Luz Manuel Santos Trigo Físico y Matemático, se ha dedicado a la investigación sobre la Resolución de Problemas Matemáticos, en sus trabajos muestra especial interés en cuestiones de carácter cognitivo como: ¿qué significa aprender o construir el conocimiento en términos de la resolución de problemas?, ¿cómo elaboran los estudiantes formas de pensar similares al desarrollo del conocimiento de la disciplina matemática?, ¿cómo se construye una comunidad de aprendizaje donde se valore la formulación de preguntas, la búsqueda de relaciones, el empleo de distintas representaciones, la presentación de distintos tipos de argumentos, la búsqueda de conexiones, y la comunicación de resultados?, entre otras, concernientes a la importancia sobre el aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas.

En su trabajo *La Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, Santos Trigo menciona la relación que hay entre la resolución de problemas con el uso y desarrollo de habilidades que permiten a las personas acceder a sus recursos, los cuales posibilitan establecer una relación entre la resolución de problemas y las estrategias, en particular las estrategias heurísticas de Polya, de manera que puedan ser usadas de modo eficiente en cualquier situación problemática; así como diversos elementos que propician la reflexión sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Diversas investigaciones en Matemáticas tratan sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Resolver problemas es distinto a realizar ejercicios, éstas son actividades con propósitos diferentes, aunque habitualmente se tomen como sinónimos; se tiene la idea de que un problema matemático es un ejercicio debido al concepto equívoco que se tiene de las matemáticas. Un ejercicio impulsa el aprendizaje de alguna destreza, fórmula o algoritmo que produce mecanización; por ejemplo, comúnmente se cree que aquellas personas con facilidad para realizar operaciones con gran rapidez poseen un gran conocimiento matemático, lo cual precisamente no es verdadero.

De otro lado, al afrontar un problema no sólo se procura encontrar la solución, sino indagar entre los conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas adecuadas, así como utilizar alguna estrategia de resolución de problemas; para con ello poder establecer e idear relaciones o resultados matemáticos, y como consecuencia obtener nuevos conocimientos, lo que establece un aprendizaje matemático.

Cada persona posee características particulares que lo hacen enfrentar de manera diferente el proceso de resolución de problemas; existen aquellas que parecieran tener habilidades naturales para resolverlos con éxito. Sin embargo, también existen otros que, luego de un periodo de preparación, pueden abordar de manera exitosa cualquier tipo de problema. Al preguntarles sobre cómo podrían resolver un problema, ágilmente proporcionan ideas, utilizan algún recurso imprescindible en la resolución del problema, conllevando a pensar ¿cómo es que no se me ocurrió antes?; esto sucede debido a la falta de accesibilidad a los recursos y conocimientos previos, que se desarrollan debido a la práctica de diversos procesos de resolución con diferentes tipos de problemas.

Para conseguir que los estudiantes desplieguen dichas habilidades, es necesario plantear situaciones problemáticas acordes a la definición de problema, diferentes a una situación rutinaria, la cual no representa para ellos un problema, también tomar en cuenta cómo llegan los estudiantes a la resolución del mismo. Como sugiere Santos Trigo, es necesario elaborar actividades que promuevan un aprendizaje matemático de los estudiantes, relacionado con el quehacer de los expertos.

Como lo manifiesta el autor, hacer o desarrollar matemáticas comprende resolver problemas, abstraer, crear, experimentar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas, este es un proceso que incluye hallar la razón de ser de las relaciones, separarlas y analizarlas para diferenciar y debatir sus conexiones con otras ideas.

Si los estudiantes se enfrentan a problemas no rutinarios o poco familiares, tendrán la posibilidad de acceder a los recursos y saberes previos que se encuentran bien aprehendidos o podrán usar estrategias habituales para resolverlo, en lugar de indagar sobre nuevas formas de abordarlo, pero un experto usaría heurísticas generales para resolverlo tales como: buscar un problema parecido que entiende mejor, explorar similitudes falsas dentro de las similitudes, hacer modelos mentales para tratar de comprender cómo funciona o construir problemas más simples con esa misma estructura.

Un experto en la resolución de problemas matemáticos habitualmente presenta pocos obstáculos en acceder y utilizar las heurísticas, pero para un estudiante esto puede ser complicado. Los estudiantes pueden comprender qué son las estrategias de resolución de problemas, pero ello no garantiza que sepan cómo y cuándo emplearlas, a pesar de que el problema planteado cuente con ciertas características que posibiliten su utilización, produciendo su mecanización en la resolución de problemas y no su utilización.

Por ello, resulta importante que se diseñen problemas o actividades que resulten interesantes a los estudiantes, que capturen su atención; que les posibiliten cuestionarse sobre ellos, realizar e identificar las características de diagramas, etc.; tomando en cuenta las siguientes preguntas: ¿qué es relevante observar en una situación para que suscite el análisis y el razonamiento matemático por parte del alumno?, ¿cuál es el papel del lenguaje y las diferentes representaciones en el establecimiento de relaciones matemáticas?, ¿qué tipos de tareas o actividades posibilitan a los estudiantes el desarrollo de estrategias que les permitan observar relaciones matemáticas?

Un problema, de manera general, es una tarea o situación compuesta por los siguientes elementos: la presencia de un interés, por parte de una persona o un grupo de individuos que quiere o necesita encontrar su solución; no posee una solución inmediata, es decir, no hay un procedimiento o regla que certifique la solución completa de la tarea. Por ejemplo, el empleo de algún algoritmo o conjunto de reglas, debe poseer diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico, etc.), puede tener más de una solución, existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

Las concepciones que se tienen de un problema son primordiales para que los estudiantes trabajen con numerosas situaciones que necesitan ser analizadas y permitan la evaluación de diversas estrategias en las diferentes etapas de resolución.

En su trabajo sobre resolución de problemas, Santos Trigo menciona a Polya y a Schöenfeld, de quienes ya se han mencionado anteriormente. Y muestra algunos métodos y estrategias utilizados frecuentemente en la resolución de problemas matemáticos:

- *El método de los dos caminos*, su objetivo es expresar el problema dado por medio de dos expresiones algebraicas e igualarlas.
- *El método de cancelación*, el cual consiste en reordenar los términos de un problema dado de forma que algunos se eliminen.
- *El método de casos especiales*, aquí se consideran casos que sean más fáciles de comprobar. *Sumar* cero, cuando un problema se debe expresar en cierta forma, es ventajoso sumar y restar el mismo número (sumar cero), así como multiplicar y dividir por la misma expresión (multiplicar por uno).
- *Dibujar una figura o diagrama cuando sea posible*, una representación gráfica puede ser para encontrar elementos importantes del problema. En la etapa de comprensión del problema, pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos importantes del problema, sino que también puede guiar hacia estrategias para resolverlo.
- *El método de sustitución*, la transformación de la expresión de un problema a una forma más fácil de operar es una estrategia importante en la resolución de problemas.

Por último, Santos Trigo sugiere que se promueva la utilización de herramientas tecnológicas, en lugar del lápiz y papel como se pretende en los marcos conceptuales actuales. Menciona que el uso de herramientas computacionales en la resolución de problemas no solo puede posibilitar la implementación de estrategias, sino que también potencia o aumenta el conjunto de heurísticas. En este ambiente, el uso de la tecnología interviene directamente en la conceptualización y manera de abordar los problemas por parte de los estudiantes. Lo cual permite la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos durante el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

2.2. Sistemas de geometría dinámica

Los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) no son simplemente un medio de interacción entre el estudiante y los objetos matemáticos representados en él, sino que funcionan modificando la forma en que se ejerce la enseñanza de la matemática tradicional con lápiz y papel; tienen unos condicionantes claros sobre los papeles de los estudiantes y, en consecuencia, influyen en la modificación de sus concepciones y en el aprendizaje que éstos realizan. El uso de SGD permite a los estudiantes explorar hipótesis empíricamente, relacionar conjeturar, experimentar, descubrir nuevas relaciones y pensar cómo pueden ser demostradas éstas. En este sentido la tecnología se emplea como una herramienta potente en el análisis y uso de estrategias.

Los SGD ponen a disposición de los estudiantes verdaderos ‘laboratorios de matemáticas’ donde los conceptos matemáticos más abstractos se concretan y el estudiante experimenta con ellos. Por lo expresado hasta el momento, existen varios aspectos a considerar:

- El SGD posibilita que los estudiantes interactuar con las matemáticas, lo que facilita su comprensión y la mejora en los aprendizajes.
- La observación de los objetos matemáticos a través de una imagen que puede ser manipulada y que reacciona a las acciones de los estudiantes, lo que ayuda a su comprensión. Por ejemplo, no es lo mismo dibujar un cuadrilátero con lápiz y papel que usando Geogebra, en este último caso es posible mover el uno de los vértices y que el estudiante observe cómo cambia su área y su perímetro, al tiempo que se mantienen las propiedades esenciales de éste.
- Aumentan la capacidad de los estudiantes en la toma de decisiones y la resolución de resolver problemas, permitiendo que los estudiantes interactuar entre ellos mismos y su docente, aportando su opinión o punto de vista sobre el objeto visualizado. Por ejemplo, sobre el tipo de gráfica, qué es lo que representa, cómo varía al cambiar algún dato, etc., es decir, posibilita también desarrollar el pensamiento crítico.

Como se señaló anteriormente los SGD potencian el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas ampliándolas o mejorándolas debido a las propiedades que pone a disposición del usuario y que introducen a la denominada matemática experimental[8]. Ahora bien, para comprender el impacto de estos SGD en las estrategias que desarrollan y usan los estudiantes, se hace necesario ver el impacto que tienen éstos sobre las nociones en juego y las posibilidades de integración con los pensamientos métrico y geométrico.

[8] Para Pérez (1992), las matemáticas experimentales poseen las siguientes características: se basan en el método científico de ensayo y error, la materialización se produce mediante un proceso de construcción de modelos, atiende más a los aportes de las pruebas y las conjeturas y determinan un espacio natural para el aprendizaje: el taller o Laboratorio de Matemáticas.

El caso de Geogebra

El uso de software en el estudio de la geometría empezó en los años 80 con la aparición del Logo. Años después, surgieron software de geometría dinámica como Cabri Geometry, un programa francés que fue presentado a la comunidad internacional de educación matemática en una conferencia en Budapest en 1988, Desde entonces se han desarrollado otros programas similares, por ejemplo, Geometer's Sketchpad elaborado por una compañía norteamericana y con asistencia de la Fundación Nacional de las Ciencias y el Proyecto de Geometría Visual del Swarthmore College, USA. Según González-López, M.J. (2001), los Sistemas de Geometría Dinámica (Cabri, Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor, The Geometric Supposers, etc.), surgidos durante la misma época han tenido cierta fama a nivel internacional, específicamente en la educación primaria y secundaria.

Lo anterior ha posibilitado avances en dichos sistemas, suscitando la creación de nuevos software que pretenden superar los anteriores. dichos programas de geometría fueron creados con el propósito concreto de poner a disposición de los estudiantes un contexto del tipo “micro mundo” para la indagación empírico de la geometría plana elemental. Anteriormente se tenían que dibujar las clasificaciones geométricas con lápiz y papel, para obtener representaciones cercanas pero fijas, lo que limitaba demasiado la exploración. En estos programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y con un lenguaje que son muy cercano al utilizado con lápiz y papel. A diferencia de las construcciones con lápiz y papel, en la geometría dinámica éstas son precisas, fáciles y rápidas de realizar, con la posibilidad de ser modificadas si así se desea.

En la actualidad es preciso asumir la importancia de los avances de la tecnología y su utilidad en la práctica educativa. Las TIC hoy en día son una herramienta útil para aproximarnos de manera más divertida y eficiente a nuestros estudiantes. El Software de Geometría Dinámica, Geogebra, puede ser un instrumento que ayude en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que suelen presentarse dificultades en los estudiantes en la apropiación de dichos saberes, puntualmente en este caso la confusión de las nociones de área y perímetro.

Geogebra es un software de geometría dinámica gratuito creado en el 2001 por el austriaco Markus Hohenwarter (quien sigue interesado y vinculado con las tareas de gestión y dirección del programa), apto para varios sistemas operativos lo que le permite el acercamiento a toda la comunidad educativa. Estas ventajas han posibilitado que se cree toda una comunidad de profesionales que utilizan sus recursos técnicos y educativos para indagar y practicar en su actualización y avances constantes. Algunas de estas comunidades son: Geometría Interactiva Interoperable en Europa (I2G), o a través de la propia página de Geogebra donde se encuentran foros y distintas comunidades (https://www.geogebra.org/).

Dicho software integra dinámicamente la aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, ofrece diversas representaciones de los objetos. Lo que, según Losada, R. (2011) "*establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos, los valores numéricos y las gráficas geométricas*". En un SGD, la geometría adquiere posibilidad de movimiento, permitiendo a los estudiantes descubrir los objetos geométricos a través de las transformaciones y relaciones entre los mismos, posibilitando la visualización, experimentación y comprobación de los conceptos matemáticos. Esto ocasiona que haya una reforma tanto en los currículos, como en las prácticas de los docentes y en el rol del estudiante, pues este último tiene un papel más activo en su aprendizaje.

También se puede apreciar que Geogebra cuenta con las siguientes propiedades en su entorno gráfico:

> “La estética es muy importante en geometría, en donde la belleza de las formas y sus propiedades han llamado la atención del mundo intelectual desde hace siglos. Sin llegar a la calidad excepcional de los mejores programas de representación de gráficos vectoriales, Geogebra ofrece una estética digna. Dispone de varios tipos de estilos aplicables a los objetos, como grosor, color y transparencia. Geogebra también permite importar imágenes (gif, jpg, tif o png) y tratarlas como mapas de bits. Esto significa que podemos usar fotos, patrones visuales o dibujos no sólo para integrarlos en el escenario (como imagen de fondo, por ejemplo) sino como propios objetos geométricos susceptibles de transformaciones (traslación, homotecia, reflexión, rotación o distorsión). Las imágenes importadas también disponen de índice de transparencia.” (Losada, 2007, p. 5)

Por lo tanto, introducir un sistema de geometría dinámica en la práctica educativa, dinamiza más el aprendizaje, puede despertar más interés en el sujeto y generar mejores resultados. Razón por la cual este trabajo se enfoca en el análisis de las características, recursos, acciones, o estrategias que desarrollan los estudiantes al resolver problemas que involucran las nociones de área y perímetro usando un sistema de geometría dinámica, específicamente Geogebra. Así que, no es un secreto el hecho de que el aprendizaje de las matemáticas en la mayoría de los casos resulta un tanto complejo para los estudiantes; ante ello, es necesario buscar alternativas que mejoren la situación y permitan un acercamiento significativo en este campo contribuyendo a su comprensión. Las metodologías incorporadas al uso de TIC en el aula de matemáticas permiten que los alumnos experimenten, maniobren, corrijan, hagan inferencias, hipótesis, etc. Posibilitando que los conceptos matemáticos se materialicen.

2.3. Construcción de la magnitud

El domino de las magnitudes y la medida constituye en la Educación Básica un objeto de estudio complejo e importante, por ello resulta interesante conocer cómo es que el individuo construye este proceso. El proceso de construcción de la medida se inicia con la constitución de la magnitud como tal (percepción visual de la(s) cualidad(es) a medir, realización de comparaciones utilizando un intermediario, asignación numérica) y culmina con la medida y la estimación de la misma (Chamorro, 1995).

Dicho proceso se relaciona con el desarrollo histórico de la noción de medida, la evolución de la elección de las unidades de medida ha pasado por diferentes períodos; primero se dio el período *antropométrico*, en el que las unidades estaban constituidas por las partes del cuerpo. Después apareció el período *ergométrico* en el que las unidades se tomaban de las condiciones, objetos y resultados del trabajo del hombre. Finalmente resultó un período *convencional* en el que las unidades se fijaron por convenios entre hombres y naciones.

2.3.1 Errores y dificultades en medición

En el aprendizaje de la medida, la adquisición de dicho concepto se sitúa en un plano distinto de su cuantificación; es claro que este primer proceso debe preceder al segundo, y ambos no son necesariamente fáciles de alcanzar. El concepto de longitud, por ejemplo, cualitativamente se adquiere bastante pronto en el desarrollo del niño, dados 2 lápices el niño puede decir cuál de los dos es más largo, bastará con ponerlos uno junto al otro; la adquisición del concepto cuantitativo es ya mucho más complejo, pues ésta consiste en asignar un número real a su longitud.

En relación a lo anterior, el concepto de área es mucho más complejo, incluso desde el punto de vista cualitativo, dadas dos figuras planas de distinta forma, ante la pregunta ¿cuál de las dos tiene mayor área?, la estrategia de compararlas directamente no permitirá llegar a una respuesta correcta.

Existen errores y dificultades atribuibles a la metodología tradicional relativos a la medida como: el uso erróneo de los sentidos, el uso de instrumentos inadecuados, la resolución de problemas que contienen datos erróneos o no reales, la carencia de estrategias para hacer medidas de objetos comunes. Así, las dificultades y errores más frecuentes que aparecen en investigaciones como la de Chamorro (2006) acerca del tópico área son:

- El uso limitado de los instrumentos de medida y el desconocimiento de su modo de funcionamiento.
- Actividades escolares de tipo formal dedicadas a la conversión de unidades.
- Incapacidad de distinguir magnitudes de orden diferente: la confusión área-perímetro.

2.3.2. El Problema de la Confusión Área-Perímetro

Una de las dificultades que se presenta durante el abordaje de las nociones de área y perímetro y que constituye uno de los ejes de éste trabajo, es la confusión entre dichas nociones, esta dificultad no se manifiesta exclusivamente en los estudiantes de corta edad, y se debe a que los primeros acercamientos a estas nociones suelen producirse en un contexto de medida muy cercano al uso de fórmulas, por lo que los estudiantes carecen de oportunidades en las cuales puedan explorar sus fundamentos espaciales y sus interrelaciones.

Este problema, es un error bastante frecuente, por ejemplo, en algunos casos, los estudiantes calculan el área y el perímetro de una figura y le asignan el dato de mayor valor al área y el de menor valor al perímetro; en otras ocasiones, el estudiante puede, erróneamente, juzgar el área de una figura por sus dimensiones lineales. (Del Olmo, 1993, p. 57)

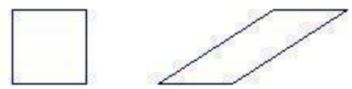


Figura 3. Problema de confusión Área-Perímetro, generalmente pueda que el estudiante le asigne más área a la figura de la derecha por tener mayor perímetro.

La frecuencia con la que se presenta este error puede entenderse si se revisa la metodología que generalmente se utiliza para la enseñanza de las nociones antes mencionadas. A los estudiantes se les proponen las mismas actividades, basadas en superficies previamente dibujadas para determinar el área y el perímetro de los mismas.

En general no se realizan actividades de recorte, pegado, coloreado, hilos, etc., que pongan de manifiesto las diferencias entre los dos conceptos. El hecho de que dos figuras tengan la misma área induce a algunos estudiantes a creer que tienen el mismo perímetro, actividades propuestas por Del Olmo, 1993, para superar las dificultades de aprendizaje mencionadas. Algunas actividades que evidencian la diferencia entre los conceptos de área y perímetro, tienen en cuenta aspectos como:

- Superficies de igual área y distinto perímetro.
- Superficies de igual perímetro y distinta área.
- Razón entre áreas y razón entre perímetros de figuras semejantes.

- Casos particulares extremos.

Algunas de las actividades que proponen para distinguir el área del perímetro son:

> Facilitar ejemplos de figuras que, a pesar de dimensiones lineales engañosas, tengan la misma área (tales como paralelogramos de la misma base y altura), y casos de figuras que, a pesar de engañosas coincidencias en sus dimensiones lineales, tengan distinta área (como el rombo obtenido por flexión del cuadrado). (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993, p. 57).

Adicionalmente a este problema, en las aulas de clase se agrega la resolución de problemas que contienen datos erróneos o no reales, que con frecuencia se proponen a los estudiantes enunciados que contienen datos que atentan contra el sentido común; por ejemplo, 500 campesinos que aran simultáneamente un terreno de 4 m^2. Esto puede dificultar la autocorrección, pues se habitúa al estudiante a resolver problemas cuyo resultado es irreal.

Por otro lado, la carencia en el uso de estrategias de estimación de áreas, hace pensar a los estudiantes que las medidas indirectas son las medidas reales, desconociendo el valor de las medidas directas, los estudiantes tienden a rechazar las aproximaciones como soluciones válidas a los problemas, tal vez por la creencia de que las matemáticas son exactas. Sin embargo, numerosos autores señalan la importancia de desarrollar estrategias de estimación en el estudiante, como lo señala Chamorro (2006).

2.3.3. Los SGD y desarrollo de los pensamientos métrico y geométrico

En la propuesta curricular vigente MEN (1998), se reconoce la importancia que tiene el desarrollo de los conocimientos básicos a través de los distintos tipos de pensamiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en cuanto al *pensamiento espacial y sistemas geométricos* se precisa, que este se construye a través de la *"exploración activa y modelación del espacio"*, que pasa por los procesos de *"manipulación de objetos geométricos"*; con respecto al *pensamiento métrico y sistemas de medidas* se destaca que es la "*interacción dinámica con el proceso de medir"* y las *"actividades de la vida diaria"* es lo que permite un acercamiento de los estudiantes a la medición.

Esto puede lograrse mediante un ambiente de aprendizaje, como el suministrado por los SGD, en particular GeoGebra, que aporte, como se propone desde la perspectiva de los Lineamientos Curriculares: Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas (1999), herramientas para construir un medio expresivo de las ideas de los estudiantes. Dichas herramientas, son las características propias de un SGD: el arrastre, el trazado de lugares geométricos y la implementación de macros.

Estas características constituyen un insumo de gran importancia en el desarrollo de estos pensamientos, debido a que mediante:

- El arrastre se permite la manipulación directa de las representaciones[9] de los objetos geométricos, lo cual a su vez favorece la exploración de propiedades y

[9] En este punto Moreno (2002) hace especial énfasis en diferenciar un objeto geométrico de su representación, pues el dibujo que aparece en la pantalla no es el objeto geométrico. La confusión entre un dibujo y el objeto geométrico

relaciones invariantes de las figuras geométricas. Donde el objeto geométrico queda definido por estas propiedades.

- El uso de Lugares Geométricos se permite visualizar y describir hechos geométricos.
- La construcción de Macros se puede presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico.

que dicho dibujo representa, ha sido explorada como una de las fuentes de inhibición del desarrollo del Pensamiento Geométrico.

Capítulo 3.

Diseño metodológico

3.1. Introducción

El presente capítulo muestra las actividades que se desarrollan en este trabajo e igualmente la finalidad esperada en cada una.

Inicialmente se presentan las particularidades de los participantes durante el desarrollo del trabajo y, a continuación, se explican las fases que la integran: diseño y, aplicación de la prueba diagnóstica, diseño y pilotaje de las situaciones problema trabajadas y del instrumento para la recolección de la información, rediseño y aplicación de las situaciones problema.

Se ha establecido que en este estudio se utilizará un enfoque mixto, el cual involucra un conjunto de procesos de recolección, análisis y articulación de datos cuantitativos y cualitativos dentro del mismo estudio para poder responder a los interrogantes que surgen en el planteamiento del problema (Sampieri, 1998).

Así mismo, el diseño de investigación empleado es de tipo no experimental, donde se recolectan datos de forma pasiva sin introducir cambios o tratamientos, debido al trabajo que se pretende llevar a cabo con los estudiantes de quinto grado. Esta tipología es la que mejor se ajusta para observar el tipo de estrategias que los niños y las niñas emplean frente a la resolución de problemas en el campo de la geometría, específicamente los relacionados con las nociones de área y perímetro, mediante el uso de GeoGebra.

Como el tópico estudiado tiene como característica poca indagación se ha enmarcado dentro de los estudios exploratorios. No se trata de medir en qué grado se encuentra ciertos procesos, sino de interpretarlos y comprenderlos, por lo tanto, también el diseño de investigación tendría características de los estudios descriptivos.

3.2. Participantes

Los participantes pertenecen a la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo, sede Cristo Maestro, ubicadas en el barrio La Unión de la comuna 16 de la ciudad de Cali; posee la modalidad Técnico Comercial con cuatro jornadas y convenio con el SENA; la mayoría de su población estudiantil es de origen afrocolombiano. Los sujetos participantes pertenecen a un estrato socioeconómico y cultural, bajo (1 y 2).

El grupo de estudiantes con quienes se realizará la prueba piloto de las situaciones problema diseñadas pertenecen al grado 5 - 4 del nivel de educación Básica Primaria, de la jornada de la mañana de la Sede Cristo Maestro. Está constituido por 38 sujetos cuyas edades se encuentran entre los 10 y 12 años de ambos sexos de los cuales 23 son mujeres (60,5%) y 15 varones (39,5%). Dicha prueba se efectuará, con el objetivo de realizar los ajustes pertinentes a las situaciones problema propuestas de acuerdo a los hallazgos obtenidos. Cabe aclarar, que dicho grupo no es un grupo de control puesto que con él no se harán comparaciones con respecto al grupo objeto de análisis.

Los estudiantes del grupo del 5 - 5 serán el grado objeto de análisis, éstos son en total 38 estudiantes, de los cuales 23 son hombres (60,5%) y 15 son mujeres (39,5%), su edad oscila entre los 10 y 12 años. Dicho grupo fue seleccionado para el estudio del proceso, por razones espacio – temporales y debido a que la maestra a su cargo se encuentra adscrita al presente trabajo. Del análisis de los resultados se obvian aquellos estudiantes que no participen en el 10% de las actividades realizadas.

Los padres de familia de los estudiantes del grado 5-5 en su mayoría tienen estudios de nivel básico, medio y sólo dos de ellos de nivel universitario, muchos se dedican a trabajos informales como las ventas ambulantes, el reciclaje, etc., algunos son empleados que devengan un salario mínimo, y otros están desempleados dedicándose a las labores del hogar. Algunos niños se encuentran a cargo de abuelos u otros familiares; en cuanto al acompañamiento en casa en el proceso educativo, son pocos los acudientes comprometidos con la labor de apoyarlos o fortalecer los procesos en casa. Sin embargo, al inicio del año escolar los padres de familia dieron su consentimiento para la participación de los estudiantes en el estudio y la recolección de las evidencias necesarias para su análisis.

3.3. Fases del estudio

La siguiente tabla presenta un resumen de los aspectos que conforman el presente trabajo y las acciones llevadas a cabo durante su proceso de elaboración. Seguidamente se expondrán con más pormenores en cada una de ellas.

FASES	DESCRIPCIÓN DE ACCIONES CONCRETAS
Diseño de prueba diagnóstica	* Se consultaron las fuentes relacionadas en los antecedentes de investigación para extraer preguntas referidas a las nociones de área y perímetro. * Elaboración de la prueba diagnóstica. * Revisión y ajustes a la prueba diagnóstica.
Aplicación de prueba diagnóstica	* Aplicación de prueba diagnóstica al grupo focalizado durante una sesión de tres horas y treinta minutos. * Análisis y sistematización de resultados obtenidos en la prueba diagnóstica.
Diseño de situaciones problema	* Diseño de situaciones problema teniendo en cuenta las fuentes señaladas en los antecedentes de investigación, libros de texto y con base en las dificultades encontradas en las pruebas estandarizadas relacionados con la resolución de problemas y los recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas que utilizan los estudiantes cuando abordan problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro. * Diseño de la hoja de respuestas donde está incluida cada situación problema y el registro de respuestas, adaptada de los documentos consultados para los antecedentes de

	investigación.
Pilotaje de situaciones problema	* Aplicación de las situaciones problema diseñadas, al grupo 5 – 4, durante tres horas. * Realización de ajustes de acuerdo a la prueba piloto realizada.
Recolección de datos	* Aplicación de situaciones problema ajustadas al grupo objeto de análisis, durante un tiempo de tres horas y treinta minutos cada una. * La implementación de este ambiente de aprendizaje, se realizará en la sala de sistemas, donde cada estudiante recibirá la guía impresa de las actividades y tendrá a su disposición un computador. Para la tercera situación problema los estudiantes contarán con un archivo de GeoGebra grabado previamente. Al inicio de cada sesión se dará una orientación a los estudiantes respecto a la actividad y se indicará la forma en que deben guardar sus trabajos en la carpeta del escritorio del PC. Cada estudiante trabajará individualmente, pero en algunos momentos de la actividad se realizará intercambio de saberes con sus compañeros cercanos, generando un trabajo cooperativo o como lo menciona Bishop (2005), una comunidad de aprendizaje. Este intercambio de saberes se hará en forma verbal que podrá ser registrado con apuntes. * Recolección de evidencias fílmicas, fotográficas, registros escritos y/o digitales.

Análisis de resultados	* Diseño del instrumento para la recolección de la información sobre los recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas que utilizan los estudiantes cuando abordan problemas que involucran las nociones de área y perímetro con el uso del SGD Geogebra. Dicho instrumento fue rediseñado a partir del aplicado por la Lic. María del Carmen Obregón Mosquera durante la elaboración de su tesis de pregrado. * Cuantitativo (porcentaje de éxitos y fracasos). * Cualitativo (categorización, tipo de recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas que utilizan los estudiantes cuando abordan problemas que involucran las nociones de área y perímetro con el uso del SGD Geogebra)

Tabla 1. Resumen de los aspectos que conforman la fase del estudio.

3.3.1. Diseño y aplicación de prueba diagnóstica

La realización de un diagnóstico de los estudiantes resulta fundamental para el presente trabajo, puesto que los resultados obtenidos permiten identificar los errores, dificultades y concepciones que tienen los estudiantes en a las nociones de área y perímetro, y la verificación de los resultados obtenidos en las pruebas estandarizadas por los estudiantes de la Institución Educativa. De esta manera, se tiene un referente para el diseño situaciones problema, así como la pertinencia de la utilización de la tecnología.

Para la elaboración del instrumento de la prueba diagnóstica se tomaron en cuenta diversas fuentes de preguntas en el nivel de Básica Primaria, a las cuales se les realizaron algunos ajustes de acuerdo al grado de escolaridad tenido en cuenta.

Aplicación de la prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica fue aplicada en sesenta minutos en forma individual y en el salón habitual de los estudiantes. Al comienzo se explicaron las instrucciones contenidas en el material, haciendo hincapié en la importancia de la encuesta para el trabajo posterior, además se pidió la justificación cada una de sus respuestas que así lo requirieron al momento de contestar.

La elaboración de la prueba diagnóstica (Ver Anexo 1) tenía los siguientes propósitos:

a) Identificar las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a las nociones de área y perímetro.
b) Establecer el tiempo requerido para contestar el instrumento.
d) Analizar la información obtenida de forma cualitativa.

Las preguntas realizadas poseían cuatro opciones de respuesta, algunas con preguntas abiertas, en las que se pedía a los estudiantes que explicaran procedimientos, relaciones entre las nociones de área y perímetro y la exposición de conclusiones.

La prueba diagnóstica fue aplicada al grupo 5 - 5 cuya directora de grupo es la maestra Dignora Domínguez Arboleda, perteneciente a la Sede Cristo Maestro de la Institución Educativa Carlos Holmes Trujillo. Esta prueba tuvo una duración de una hora y 15 minutos de clase, es decir 60 minutos, realizada de manera individual.

3.3.2. Diseño de situaciones problema

Con la aplicación de la prueba diagnóstica se reconocieron una serie de dificultades por parte de los estudiantes, asociadas a la conceptualización errónea de las nociones de área y perímetro. Razón por la cual los estudiantes no resolvieron acertadamente la mayor parte de la prueba. Los hallazgos encontrados motivaron el diseño de tres situaciones problema que le permitan a los estudiantes diferenciar las nociones antes mencionadas exponiendo además el tipo de recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas para encontrar las soluciones, usando como mediador el SGD Geogebra. También se elaboró una hoja de respuestas que permita la recolección de la información.

Pilotaje de situaciones problema

Una vez elaboradas las situaciones problema se procedió a realizar su pilotaje con las siguientes finalidades:

a) Detectar las dificultades que pudieran presentarse en la comprensión de los enunciados.
b) Identificar la pertinencia de los problemas y preguntas.
c) Determinar el tiempo requerido para contestar el instrumento.

El pilotaje de las situaciones problema propuestas y la hoja de respuestas se realizó con el grupo piloto antes mencionado.

Las dificultades encontradas fueron:

- Los estudiantes presentaron dificultad con la comprensión de algunos de los términos usados en los enunciados de las situaciones planteadas, lo que originó el cambio de éstos por unos más acordes al léxico de los estudiantes.
- Se detectó que los estudiantes tienen mucha dificultad para comunicar por escrito sus ideas, pues sus argumentos son poco consistentes.
- Se vio la necesidad emplear un instrumento para la recolección de la información diseñado para el análisis de los resultados obtenidos.
- También fue necesario modificar el archivo electrónico de la situación número tres de manera que los estudiantes pudieran establecer relaciones entre las áreas y perímetros de las figuras dadas, de acuerdo a sus saberes previos.

Características de las situaciones problema y de la hoja de respuestas

Las situaciones problemas (ver Anexo 2) fueron diseñadas con el planteamiento de tres situaciones en contexto que involucran las nociones de área y perímetro, donde se espera que los estudiantes manifiesten el tipo de recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas para encontrar las soluciones, usando como mediador el SGD Geogebra. Se espera además que se expongan las habilidades comunicativas y de argumentación que poseen los estudiantes. El desarrollo de dichas situaciones involucra la utilización del software Geogebra, pero adicionalmente los estudiantes deben comunicar y justificar sus respuestas en la hoja de trabajo.

GeoGebra posee diversos tipos de representaciones (numérica y gráfica) que los estudiantes pueden emplear en la solución de las situaciones planteadas y que le servirán de insumo para contestar las hojas de trabajo.

Resulta significativo indicar que la interacción con las TIC permite a los estudiantes confrontarse con los saberes previos que ellos poseen, que en diversas ocasiones se encuentran errados, indagando de esta forma que el conocimiento sea efectivamente aprehendido, y no memorizado como se acostumbra tradicionalmente.

Por otra parte, hay que destacar que la ventaja de utilizar las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje reside en el hecho de que los estudiantes pueden visualizar, experimentar, manipular e interactuar con los objetos matemáticos de manera ágil y rápida, verificando las propiedades de las figuras sin que estas pierdan sus propiedades. Además, cabe resaltar que el aprendizaje de la geometría resulta dispendioso cuando de experimentar con medidas y gráficos de figuras se trata. Por ejemplo, dadas varias figuras ¿cómo lograr establecer cuál de ellas tiene mayor área o perímetro? Esta dificultad puede verse superada con el uso de los SGD, específicamente con GeoGebra.

Condiciones de aplicación de las situaciones problema

Cada una de las situaciones problema se aplicó en un tiempo de 3 horas y 30 minutos.

La metodología de trabajo en cada una fue la siguiente:

a) En la sala de sistemas se entregó, a cada uno de los estudiantes, copia en papel de las tres situaciones problema para ser contestada de manera individual, para las situaciones 1 y 2. Para la situación 3 dicha entrega se realizó por parejas.

b) Se dieron las indicaciones necesarias para realizar la actividad y grupal, haciendo hincapié en que escribieran a lápiz, con la finalidad de que ellos puedan realizar ajustes a las respuestas de los estudiantes.

c) Una vez en la sala de sistemas los estudiantes se organizaron frente a cada equipo de cómputo.

d) Utilizando un video beam, se brindaron explicaciones a manera repaso del programa Geogebra previamente instalado en los equipos.

e) Los estudiantes, por equipo, contestaron las situaciones durante un tiempo aproximado de tres horas y treinta minutos apoyándose en el uso de la tecnología.

f) Se recogieron las hojas de respuestas y los registros tecnológicos contestados.

g) Se realizaron registros fotográficos y fílmicos de los procedimientos seguidos por los estudiantes.

h) Posteriormente se socializó la solución con la participación voluntaria de algunos de los estudiantes.

i) De igual manera se procedió con las otras dos situaciones problema.

j) Finalmente se formalizó la actividad realizando una recapitulación de las ideas más significativas, así como de los errores y la forma correcta de solución. También, se aclararon las conjeturas de los estudiantes.

k) La aplicación de las situaciones requirió de tres sesiones de trabajo, por esta razón se tomó la decisión de dar una breve retroalimentación al inicio de cada sesión.

Características de la hoja de respuestas

Las características de la hoja de respuestas (ver Anexo 2) son las siguientes:

- Consta de cinco páginas en las cuales dos de ellas muestran aclaraciones sobre la actividad a desarrollar, en las otras tres se encuentran las consignas de las situaciones problema y varias preguntas abiertas con respecto a su proceso de solución.
- Algunos ítems permiten explorar si persisten las ideas erróneas en torno a las nociones de área y perímetro.
- Se explora si los estudiantes siguen atribuyendo a las figuras geométricas aparentemente más grandes, mayor área o perímetro.
- Para contestar las preguntas, es necesario que los estudiantes establezcan la diferencia entre las nociones de área y perímetro.
- El uso del software GeoGebra cobra vital importancia en la búsqueda de las soluciones a las situaciones planteadas.

Condiciones de aplicación de la hoja de respuestas

La hoja de respuestas fue aplicada durante el tiempo que los estudiantes estuvieron resolviendo las situaciones problema en un tiempo de tres horas y treinta minutos, en forma individual y/o grupal con el uso de GeoGebra. Cabe mencionar que la maestra titular del grupo indicó a los estudiantes que los resultados serían tomados en cuenta para su evaluación, dentro de la asignatura de geometría. Para generar mayor compromiso en el desarrollo de las mismas por parte de ellos.

3.3.3. Recolección de datos

La recolección de datos es fundamental, ya que a partir de los resultados se realiza el análisis de la información derivada de las situaciones propuestas.

Los datos se obtuvieron de las siguientes fuentes:

- Hojas de respuesta.
- Grabaciones de audiovisuales de clase, para el análisis de las condiciones en las cuales se desarrolla el trabajo durante la implementación de las situaciones problema.
- Entrevistas a los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.
- Registros fotográficos.
- Registros digitales de los procedimientos usados con el SGD Geogebra.

3.3.4. Análisis de resultados

Una vez recolectada la información, se procedió a su análisis en términos cuantitativos y cualitativos. A partir de estos resultados es posible contestar las preguntas de investigación que motivaron la realización del presente trabajo y, además, se puede observar si con el apoyo de las actividades didácticas implementadas los estudiantes pueden establecer la diferencia entre las nociones de área y perímetro.

Análisis cuantitativo

Se refiere al análisis de los aciertos y errores de los estudiantes, así como las representaciones utilizadas por ellos. Esto permite cuantificar en términos porcentuales los resultados. Sin embargo, éste se complementa con un análisis de tipo cualitativo.

Análisis cualitativo

Consiste en la categorización del tipo de recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas que utilizan los estudiantes cuando abordan problemas que involucran las nociones de área y perímetro con el uso del SGD Geogebra.

Se realiza un análisis de las características destacadas del razonamiento de los estudiantes cuando interactúan con el SGD GeoGebra en la resolución de problemas que involucran las nociones de área y perímetro.

En suma, el análisis cuantitativo y cualitativo permite contrastar los resultados de la prueba diagnóstica con los de hojas de respuesta y los registros digitales, para así establecer con mayor precisión el tipo de recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas que utilizan los estudiantes cuando abordan problemas que involucran las nociones de área y perímetro con el uso del SGD Geogebra y el uso de los SGD en el aprendizaje de la geometría.

Capítulo 4.

Presentación y análisis de resultados

4.1. Introducción

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en cada una de las actividades que se desarrollaron con los estudiantes. Dicho análisis comprende el estudio cuantitativo y cualitativo, básicos para evaluar los procesos desarrollados por los educandos.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en primer lugar, se muestran los resultados del diagnóstico, donde se analizan cada una de las hojas de trabajo y después se exponen los resultados obtenidos. La información es presentada en tablas y gráficas, donde se incluyen evidencias de las respuestas de los estudiantes a las actividades planteadas.

Finalmente, se realiza un análisis de las situaciones problema propuestas y de las hojas de respuesta para observar el tipo de recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas que los estudiantes emplearon en el proceso de solución de las mismas.

4.2. Análisis de la prueba diagnóstica

En esta sección se analiza la prueba diagnóstica, lo cual permite identificar el estado de los pre saberes de los estudiantes en cuanto al manejo de las nociones de área y perímetro, así como su posibilidad de identificar la independencia de dichas nociones.

4.2.1 Presentación de la actividad

La prueba diagnóstica (ver Anexo 1) permite explorar los conocimientos que tienen los estudiantes con relación a las nociones de área y perímetro, así como la independencia de las mismas. Por otro lado, observar la manera en que los educandos argumentan sus respuestas. Para ello, se indaga sobre diez preguntas.

4.2.2. Objetivos

Los principales propósitos de estas preguntas son conocer si cada uno de los estudiantes:

- Diferencia el perímetro y el área de figuras geométricas.
- Utiliza unidades de medida para expresar el perímetro y el área de figuras geométricas.
- Reconoce las expresiones que le permiten determinar el área de figuras
- Generaliza información sobre las nociones de área y perímetro o sus elementos esenciales.

- Conceptualiza las nociones de área y perímetro.

Dichos aspectos resultan esenciales en la resolución de problemas que involucran las nociones de área y perímetro, los cuales les permitirán usar recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas a la hora de enfrentarse a ellos.

4.2.3. Condiciones de aplicación

La prueba diagnóstica contiene diez preguntas, siete de las cuales son de opción múltiple. En algunas de ellas se dejó espacio para que los estudiantes justificaran sus respuestas, en lo cual se insistió al momento de proporcionar las instrucciones para responderla. La pregunta número seis consistía en completar una información en una tabla de acuerdo con un gráfico dado y la pregunta diez posee ítems de tipo abierto.

La actividad se contestó de manera individual, en un tiempo de sesenta minutos, y fue aplicada a los estudiantes del grupo del 5 - 5, un total 38 estudiantes, de los cuales 23 son hombres (60,5%) y 15 son mujeres (39,5%), su edad oscila entre los 10 y 12 años.

Es importante mencionar que, al momento de aplicar la prueba diagnóstica, uno de los estudiantes no se encontraba presente.

4.2.4. Análisis cuantitativo

La encuesta diagnóstica está conformada por diez preguntas alusivas a las nociones de área y perímetro, donde se incluyen preguntas de tipo abierto. Estos últimos tienen como propósito fundamental conseguir información sobre los recursos que usan los estudiantes para resolver problemas.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas en siete de las diez preguntas de la prueba diagnóstica.

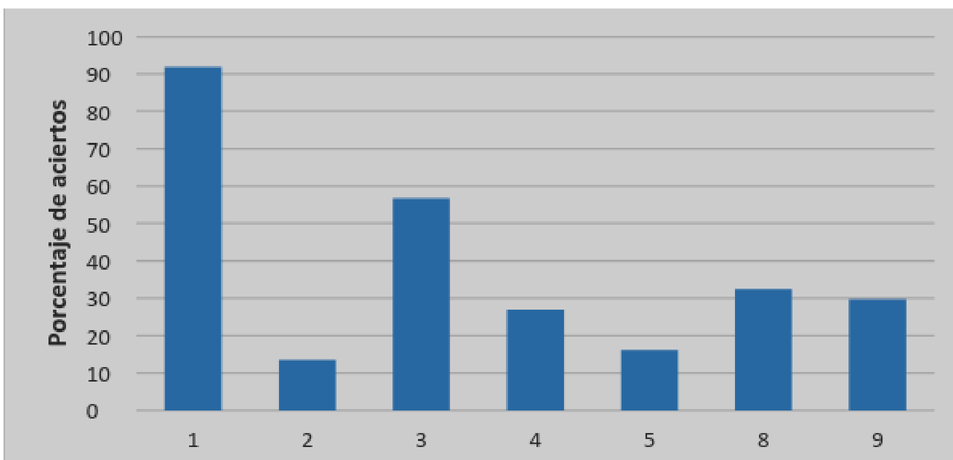


Figura 4. Número de respuestas correctas en la prueba diagnóstica.

Tal como se puede observar, el rendimiento de los estudiantes es bajo. Tan solo en la pregunta uno y tres se obtuvieron porcentajes superiores al 50% de respuestas correctas (91.89% y 56.75% respectivamente), mientras que en el resto de preguntas se logró una proporción inferior al 35%. Las preguntas con resultados más bajos fueron el dos (13.51%) y la cinco (16.21%).

Una vez analizados los problemas con menor y mayor índice de aciertos, y para tener una idea precisa y global de los resultados cuantitativos de la prueba diagnóstica, en la siguiente tabla se muestra el concentrado de respuestas, por opción, de las preguntas 1, 2, 3,4, 5, 7, 8 y 9 propuestas. La solución correcta es señalada por medio de un sombreado de la celda correspondiente. En cada celda se muestran dos valores: el número superior indica la cantidad de alumnos en términos absolutos y el inferior en términos porcentuales.

NÚMERO DE PREGUNTA		**OPCIONES DE RESPUESTA A CADA PREGUNTA DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA**			
	A	**B**	**C**	**D**	**SIN RESPUESTA**
1	3 8,10%		34 91,89%		
2	18 48,64 %	6 16,21%	5 13,51%	3 8,10%	5 13,51%
3	15 40,54 %	1 2,20%	21 56,75%		
4	10 27,0%	10 27,02%	16 43,24%		1 2,20%
5	31 83,78 %	6 16,21%			
8	9 24,32 %	12 32,43%	15 40,54%		1 2,20%
9	13 35,13 %	11 29,72%	12 32,43%		1 2,20%

Tabla 2. Concentrado de respuestas de la prueba diagnóstica.

Es indispensable destacar que la capacidad de argumentación en torno a las respuestas escogidas por los estudiantes al momento de resolver las preguntas está relacionada a su sistema de creencias y pre saberes en torno a las nociones de área y perímetro asociados a la probabilidad. Por tal motivo, se cuestionó explícitamente a los estudiantes sobre los argumentos para encontrar las respuestas donde un 24.48% de los encuestados admitieron utilizarlos. En la siguiente gráfica se muestran estos resultados.

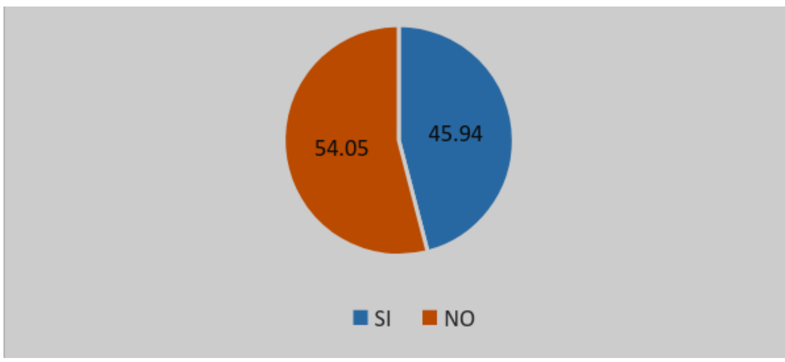


Figura 5. Uso de argumentos en la pregunta 2.

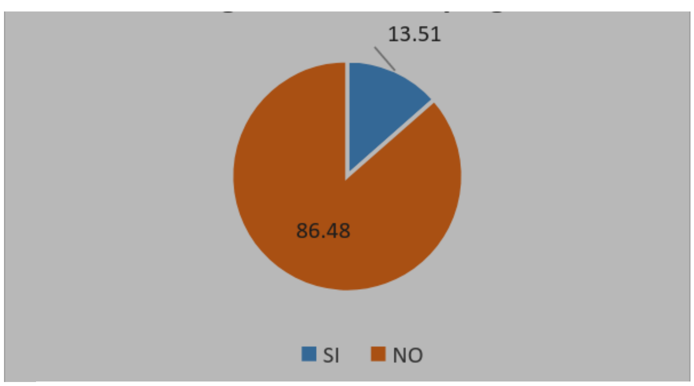


Figura 6. Uso de argumentos en la pregunta 7

Figura 7. Uso de argumentos en la pregunta 10.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de los tipos de argumentos proporcionados por los estudiantes durante la prueba diagnóstica para las preguntas 2, 7 y 10, que se analizaron en los anteriores diagramas circulares, en ellos se puede observar el predominio del lenguaje natural como medio para la descripción de procedimientos y obtención de conclusiones:

Por ejemplo, para la pregunta 2 el estudiante 1 explicó lo siguiente:

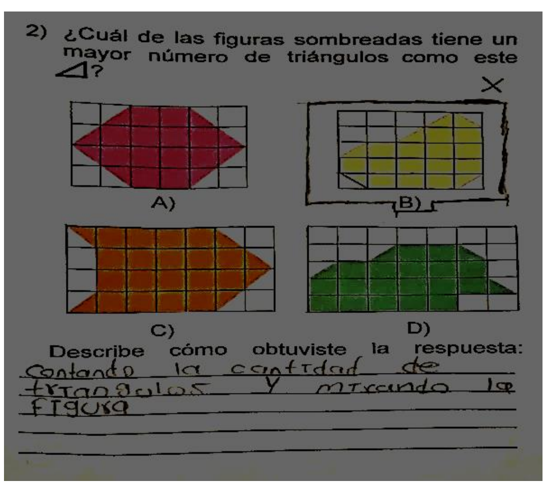


Figura 8. Ejemplo de argumento 1, pregunta 2 de la prueba diagnóstica.

El estudiante 2 escribió:

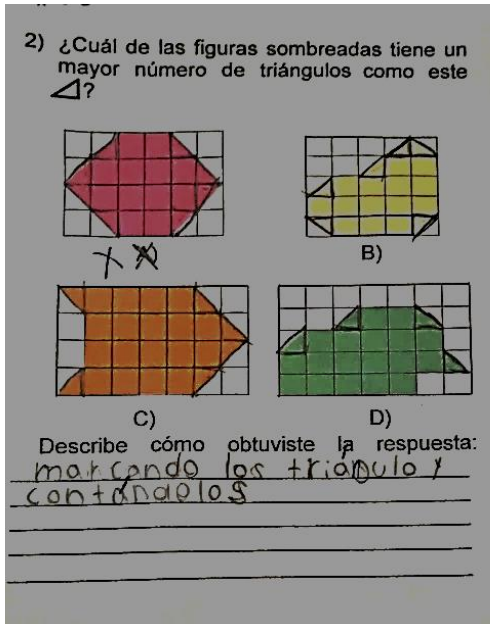


Figura 9. Ejemplo de argumento 2, pregunta 2 de la prueba diagnóstica.

El estudiante 3, respondió:

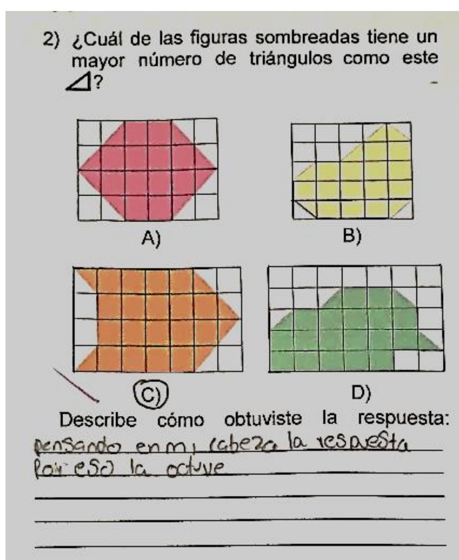
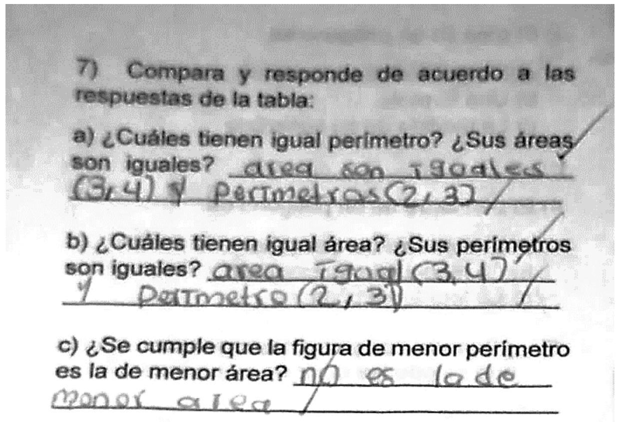


Figura 10. Ejemplo de argumento 3, pregunta 2 de la prueba diagnóstica.

Para la pregunta 7, el estudiante 4 escribe:


7) Compara y responde de acuerdo a las respuestas de la tabla:

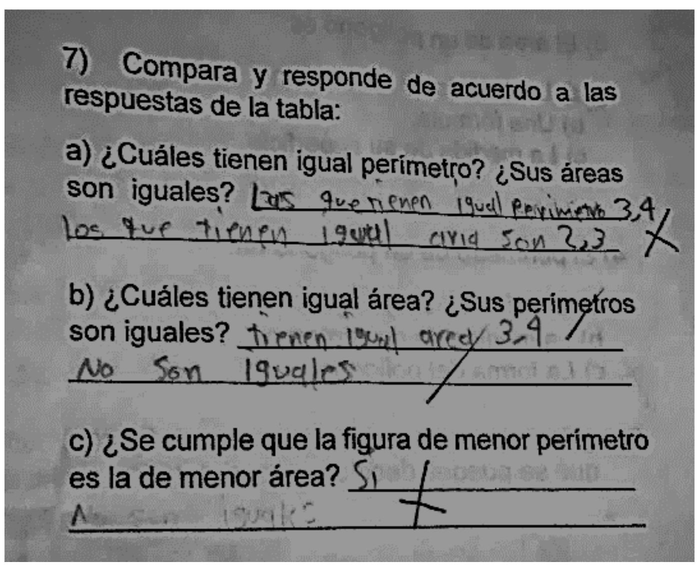
a) ¿Cuáles tienen igual perímetro? ¿Sus áreas son iguales? area son igoales (3,4) y perimetros (2,3)

b) ¿Cuáles tienen igual área? ¿Sus perímetros son iguales? area igual (3,4) y perimetro (2,3)

c) ¿Se cumple que la figura de menor perímetro es la de menor área? no es la de menor area

Figura 11. Ejemplo de argumento 1, pregunta 7 de la prueba diagnóstica.

El estudiante 5 explica:


7) Compara y responde de acuerdo a las respuestas de la tabla:

a) ¿Cuáles tienen igual perímetro? ¿Sus áreas son iguales? Los que tienen igual perimetro 3,4 los que tienen igual area son 2,3

b) ¿Cuáles tienen igual área? ¿Sus perímetros son iguales? tienen igual area 3,4 No son iguales

c) ¿Se cumple que la figura de menor perímetro es la de menor área? Si No son iguales

Figura 12. Ejemplo de argumento 2, pregunta 7 de la prueba diagnóstica.

El estudiante 4, responde:

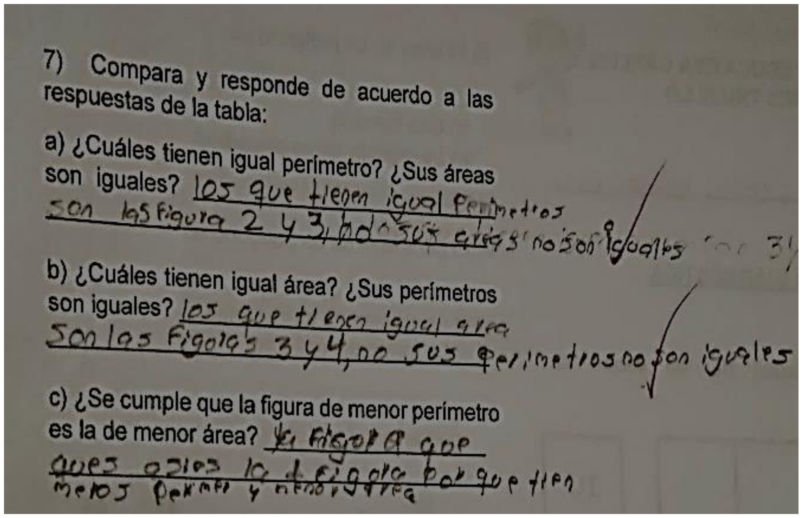


Figura 13. Ejemplo de argumento 3, pregunta 7 de la prueba diagnóstica.

En la pregunta 10, el estudiante 4 responde:

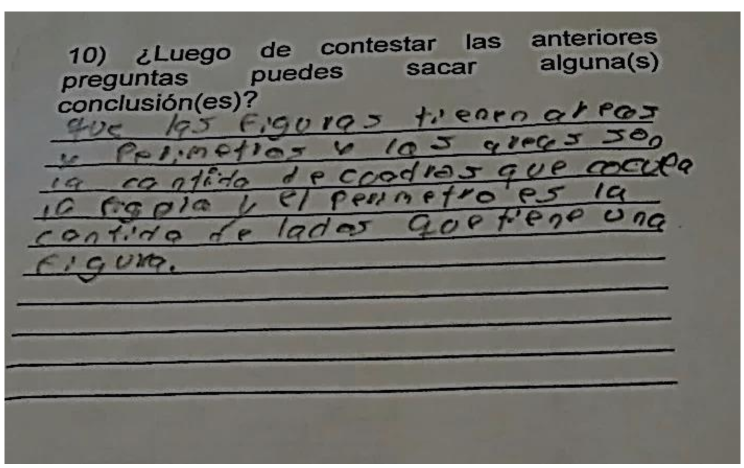


Figura 14. Ejemplo de argumento 1, pregunta 10 de la prueba diagnóstica.

El estudiante 6 por su parte escribe:

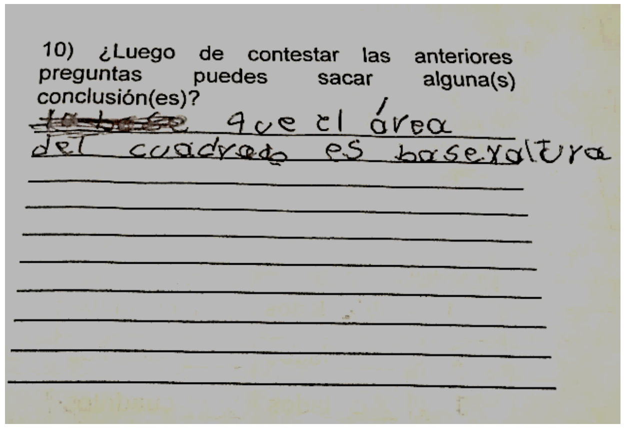

10) ¿Luego de contestar las anteriores preguntas puedes sacar alguna(s) conclusión(es)?
que el área del cuadrado es base x altura

Figura 15. Ejemplo de argumento 2, pregunta 10 de la prueba diagnóstica.

El estudiante 7, comenta:

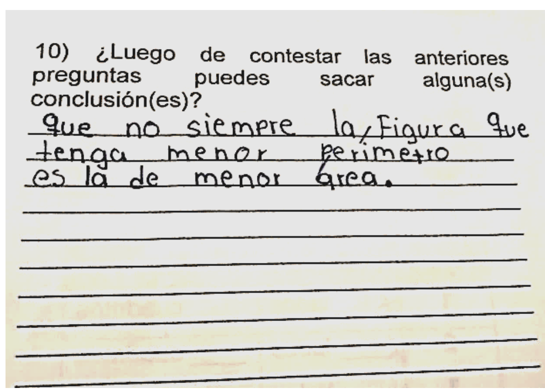

10) ¿Luego de contestar las anteriores preguntas puedes sacar alguna(s) conclusión(es)?
que no siempre la Figura que tenga menor perimetro es la de menor área.

Figura 16. Ejemplo de argumento 3, pregunta 10 de la prueba diagnóstica.

Como se puede observar, aunque no todos los estudiantes utilizan argumentos válidos para justificar sus respuestas, aquellos que lo hacen referencian parte de sus conocimientos previos o sus conjeturas después de realizar las actividades.

4.2.5. Análisis cualitativo

La información cuantitativa no proporciona datos suficientes, así que es imprescindible abordar aspectos cualitativos de la investigación. Por esta razón, en este apartado se realiza una categorización de las respuestas proporcionadas por los estudiantes a cada uno de las preguntas planteadas en la prueba diagnóstica, a partir de la tabla elaborada con base en la clasificación que realiza García (2015), ver Anexo 2, de la cual se ha obtenido la siguiente información:

INDICADORES O DESCRIPTORES	PREGUNTAS	No. DE ESTUDIANTES QUE RESPONDEN CORECTAMENTE		
		CUMPLE	CUMPLE PARCIALMENTE	NO CUMPLE
Diferencia el perímetro y el área de figuras geométricas.	7	8	0	29
Utiliza unidades de medida para expresar el perímetro y el área de figuras geométricas.	1, 2, 5, 6	0	29	8
Reconoce las expresiones que le permiten determinar el área de figuras geométricas.	8, 9	4	19	14
Generaliza información sobre las nociones de área y perímetro o sus elementos esenciales.	10	3	6	28
Conceptualiza las nociones de área y perímetro.	3, 4	7	16	14

Tabla 3. Análisis cualitativo de la prueba diagnóstica.

Después de haber realizado la respectiva sistematización de la prueba diagnóstica a través de la Tabla No. 3 se procedió al análisis de su información, encontrándose las siguientes regularidades en la mayoría de los estudiantes:

- No se diferencia el perímetro y el área de figuras geométricas por parte de la mayoría de los estudiantes.
- Muy pocos estudiantes utilizan unidades de medida para expresar el perímetro y el área de figuras geométricas.
- La mayoría de los estudiantes reconoce de manera parcial las expresiones que les permiten determinar el área de figuras geométricas.
- Son pocos los estudiantes que generalizan información sobre las nociones de área y perímetro o sus elementos esenciales.
- En cuanto a la conceptualización de las nociones de área y perímetro una cantidad muy mínima de estudiantes puede realizar este proceso.
- Los estudiantes tienen dificultad para usar recursos, estrategias heurísticas y metacognitivas para encontrar las soluciones.

4.2.6. Comentarios finales

Con la aplicación de la prueba diagnóstica fue posible identificar algunas dificultades y concepciones erróneas en los estudiantes de grado quinto como: creer que la forma de una figura determina la medida de su área o su perímetro, considerar que una figura posee mayor área por tener mayor perímetro y viceversa, la no determinación de las unidades correspondientes al área y perímetro de las figuras, entre otras. Entre los resultados encontrados se pueden mencionar los siguientes:

a) La mayoría de los estudiantes mostró una gran dificultad para comunicar ideas por escrito, lo cual incide al momento de argumentar una respuesta o procedimiento de solución. Se muestra que un 10,81% de las respuestas fueron justificadas.

b) Muchas de las respuestas son inducidas por saberes previos o intuiciones erróneos, por ejemplo, decir que todas las figuras tienen diferente perímetro solo por cómo se ven, un 83.78% de los estudiantes lo responde así en la pregunta 5.

c) Sólo cinco estudiantes, el 13,51% utilizó representaciones gráficas auxiliares.

d) En términos generales, no se tiene una idea clara de las nociones de área y perímetro y éstos no pueden utilizarse para resolver correctamente las preguntas planteadas.

4.3. Análisis de las situaciones problema

En este apartado se describen las características de cada una de las situaciones problema aplicadas, así como los propósitos, condiciones de aplicación y resultados del análisis cuantitativo y cualitativo correspondientes. Por último, se presentan algunos comentarios finales de cada una de las actividades didácticas implementadas.

Cabe mencionar que, en términos generales, las situaciones problema comparten el mismo diseño, dividido en dos partes: la primera incluye el enunciado de la situación problema con su respectivo interrogante, las cuales se contestan en forma individual para las dos primeras situaciones y de manera grupal (por parejas) en la tercera situación. la segunda parte contiene las preguntas que facilitan conocer el proceso de resolución empleado por los estudiantes con el uso de Geogebra y con el apoyo del computador. En lo concerniente a las condiciones de aplicación de las situaciones problema, en el tercer capítulo del presente trabajo se realizó una descripción detallada al respecto, sin embargo, resulta conveniente retomarlo en este apartado en forma general.

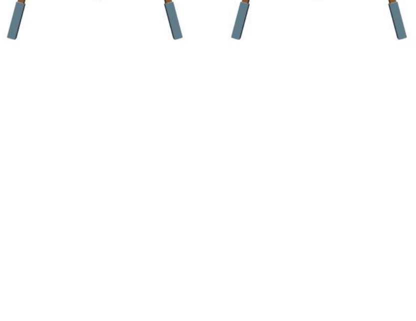
4.3.1. Situación problema 1

4.3.1.1. Presentación de la actividad

En este caso (ver Anexo 2) se plantea la siguiente situación problema para ser resuelta de forma individual:

Dos pinturas de un gran artista están en la colección de un museo de arte contemporáneo. Una tiene forma cuadrada y la otra forma rectangular, cada una tiene un perímetro de 240 cm. Para proteger las dos obras mientras las transportan, el administrador del museo tiene que envolverlas en empaques plásticos de burbujas que las protejan. El administrador necesita saber los tamaños de las obras para lograr su objetivo.

Encuentra las medidas de cada pintura teniendo en cuenta que el área de la pintura rectangular es muy similar al área de la pintura cuadrada.



Durante el desarrollo de la situación se requiere que los estudiantes identifiquen dos figuras una cuadrada y otra rectangular cuyo perímetro es fijo y su área variable. Para ello, en la primera parte de la hoja de trabajo se les pregunta por las medidas que deben tener dichas figuras. De acuerdo a las respuestas que se dieron en la prueba diagnóstica, se plantean preguntas similares, esperando que puedan hallar dichas medidas mientras que avanzan en la segunda parte del trabajo y de manera que puedan comprobar que efectivamente el perímetro de ambas figuras es 240 cm y que las medidas de sus áreas son distintas pero aproximadas.

Una estrategia para solucionar correctamente la situación consiste en establecer las medidas para la figura cuadrada de acuerdo al perímetro dado (240 cm) y calcular su área, para lo cual cada lado tendrá una medida de 60cm, posteriormente buscar dimensiones de figuras rectangulares cuyo tamaño del perímetro sea el mismo de la anterior figura y donde la magnitud del área sea similar a la encontrada para la figura cuadrada.

Posteriormente, en la segunda parte de la hoja de trabajo se espera que los estudiantes muestren la comprensión del enunciado, sus estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas usadas al interactuar con la interfaz del software GeoGebra. Aquí se espera que dicho programa les permita observar que gráfica y numéricamente existen varias opciones de respuesta, pero que solo una es la correcta y, además, que identifiquen si las medidas solicitadas corresponden a los datos que ellos suponían eran los correctos.

4.3.1.2. Propósitos

En la prueba diagnóstica, al plantear preguntas similares a la propuesta en la situación 1, se obtuvo un resultado sumamente bajo de respuestas correctas (8.10%) y 16,21% con respuestas parcialmente correctas. Esto se presenta debido a la falta de claridad en las nociones de área y perímetro y la diferenciación entre ellas. Dicha situación genera la necesidad de proponer una actividad didáctica que permitiera el aprendizaje de estrategias para determinar las medidas de dos figuras geométricas dado su perímetro, y al mismo tiempo, encontrar su área.

Además de lo anterior, otro de los propósitos es contribuir al desarrollo de algunas competencias establecidas en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006), para lo cual se emprendieron las siguientes acciones:

- Resolución de un problema, para este caso, en un contexto hipotético.
- Comunicar por escrito las justificaciones a cada una de las actividades propuestas.
- Confrontar los saberes previos con el uso del SGD GeoGebra.
- Trabajar diferentes formas de representación.
- Discutir en torno a la actividad (en grupo), favoreciendo con ello la interacción y la comunicación verbal.

4.3.1.3. Condiciones de aplicación

La situación problema 1 de trabajo se aplicó en una sesión cuya duración fue de tres horas y treinta minutos, donde los estudiantes contestaron de manera individual el trabajo propuesto en la sala de sistemas con el apoyo del software Geogebra como herramienta mediadora entre el conocimiento visual y geométrico.

En lo referente a las características generales, las hojas de trabajo contenían el enunciado de la situación problema y siete preguntas con espacios para justificar cada una de las respuestas.

Es importante resaltar que la actividad por sí sola no garantiza la consecución de los propósitos establecidos, ya que se hace necesario establecer una dinámica de clase donde los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje y donde el docente posee el rol de mediador. Para ello, en la primera parte de la hoja de trabajo se tiene un acercamiento individual a la situación problemática, al final se la sesión se realiza la discusión con los estudiantes sobre las soluciones encontradas y de las nociones matemáticas involucradas. Finalmente, se cerró la sesión con la exposición de las ideas más importantes por parte de la docente, señalando las dificultades observadas.

4.3.1.4. Análisis de resultados

Para los propósitos del presente estudio, es fundamental examinar las respuestas que dan los estudiantes a la situación problema con el apoyo del software Geogebra. El análisis de esta información se hace simultáneamente desde dos enfoques, cuantitativa y cualitativamente. Los datos conseguidos son presentados en la siguiente tabla con la finalidad de mostrar por separado los recursos, las estrategias heurísticas y las metacognitivas utilizados por el grupo de estudiantes.

DIMENSIONES Y/O ETAPAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	INDICADORES O DESCRIPTORES	PORCENTAJES OBTENIDOS
COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO	*Problema entendido rápidamente.*	35,13%
	Relación entre perímetro fijo y área variable.	8,10%
	Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar.	8,10%
	Entiende la pregunta, pero no expresa los conceptos y ni las operaciones a utilizar.	8,10%
	Otro: no expresa de forma clara lo entendido del problema.	40,57%
TIPO DE RECURSOS UTILIZADOS	*Unidades de medida de área y longitud.*	16,21%
	Gráficos con figuras geométricas regulares	100%
	Arrastre	100%
	Software GeoGebra para la solución de la situación problema.	100%
	Lápiz y papel para registro de respuestas parciales.	24,32%
ESTRATEGIAS HEURISTICAS	*Método de ensayo y error*	100%
	Pensar en problemas más simples al inicio del proceso de resolución	100%
	Relacionar con otros problemas conocidos con ayuda	45,94%
	Estrategias irreflexivas: Adivina la operación o fórmula y realiza operaciones mecánicamente y/o Contesta “cualquier cosa”, sin hacer alguna operación.	5,40%

ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS	*Justificación usando términos del lenguaje matemático.*	13,51
	Justificación usando términos del lenguaje natural	67,57%
	Sin justificar	18,92%
	Con evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje matemático.	10,81%
	Con evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje natural.	67,57%
	Sin evaluación de procedimientos	21,62%

Tabla 4. Recursos, estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas utilizados por el grupo de estudiantes, situación problema 1.

Tal como se puede apreciar, el 35,13% de los estudiantes comprendieron rápidamente el enunciado de la situación problema y solo el 8,10% lo relacionó con un problema de perímetro fijo y área variable. En cuanto a los recursos utilizados solo el 16,21% del grupo de 37 tuvo en cuenta el uso de las unidades de medida; la totalidad de los estudiantes usa gráficos de figuras regulares, el software GeoGebra y el arrastre en la búsqueda de la solución correcta, el lápiz y el papel poseen un papel auxiliar en dicha labor.

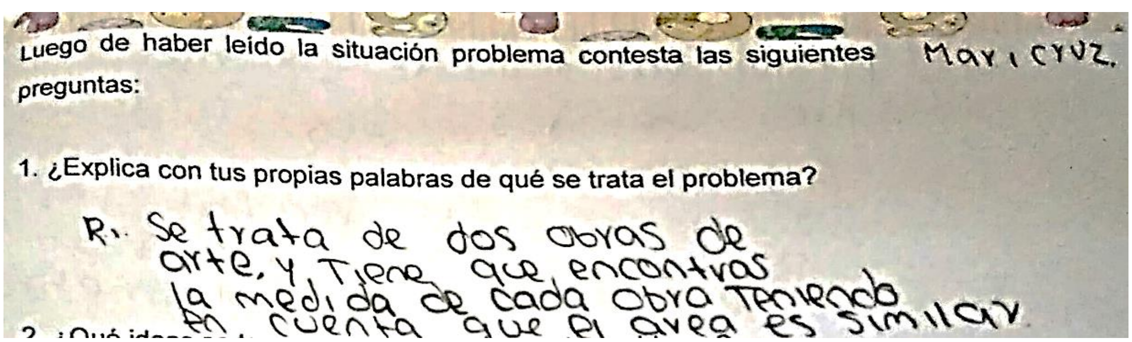
La estrategia heurística que posee el mayor porcentaje al inicio del proceso de resolución es pensar en problemas más simples (100%) y seguidamente relacionarlo con otros problemas con ayuda es la estrategia más usada con un 45,94%; algunos estudiantes poseen estrategias irreflexivas que no los conducen a la solución del problema planteado.

Las estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes muestran gran dificultad para utilizar argumentos con términos matemáticos (sólo el 13,51%), en consecuencia, las justificaciones están cargadas de un lenguaje natural (67,57%); en cuanto a la verificación de procedimientos prevalece la evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje natural.67,57%. Para ilustrar lo anterior, se muestran a continuación algunas evidencias del trabajo realizado por los estudiantes durante el proceso de resolución de la situación problema.

A continuación, se proporcionan ejemplos de los registros de los estudiantes durante el proceso de solución de la situación problema 1, en los tópicos analizados:

Comprensión del enunciado:

El estudiante 8 evidencia (Problema entendido rápidamente)


Luego de haber leído la situación problema contesta las siguientes preguntas: Mari Cruz.

1. ¿Explica con tus propias palabras de qué se trata el problema?

R. Se trata de dos obras de arte, y Tiene que encontrar la medida de cada obra Teniendo en cuenta que el area es similar.

Figura 17. Ejemplo de problema entendido rápidamente, situación problema 1.

El estudiante 5 (Relación entre perímetro fijo y área variable)

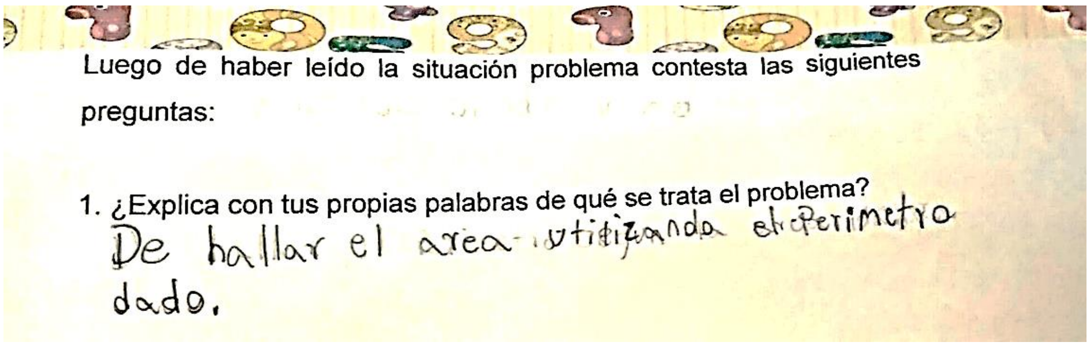


Figura 18. Ejemplo de enunciado donde se establece la relación perímetro fijo y área variable, situación problema 1.

Tipo de recursos utilizados:

El estudiante 9 (Unidades de medida de área y longitud)

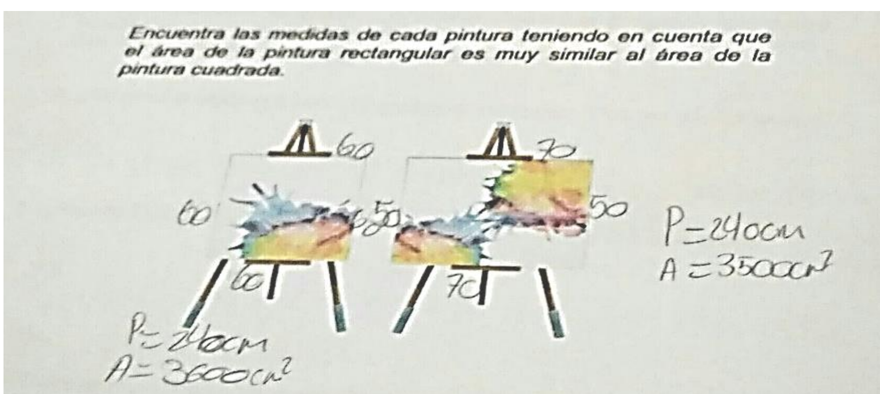


Figura 19. Ejemplo del uso de unidades de área y longitud, situación problema 1.

El estudiante 10 (Gráficos con figuras geométricas regulares)

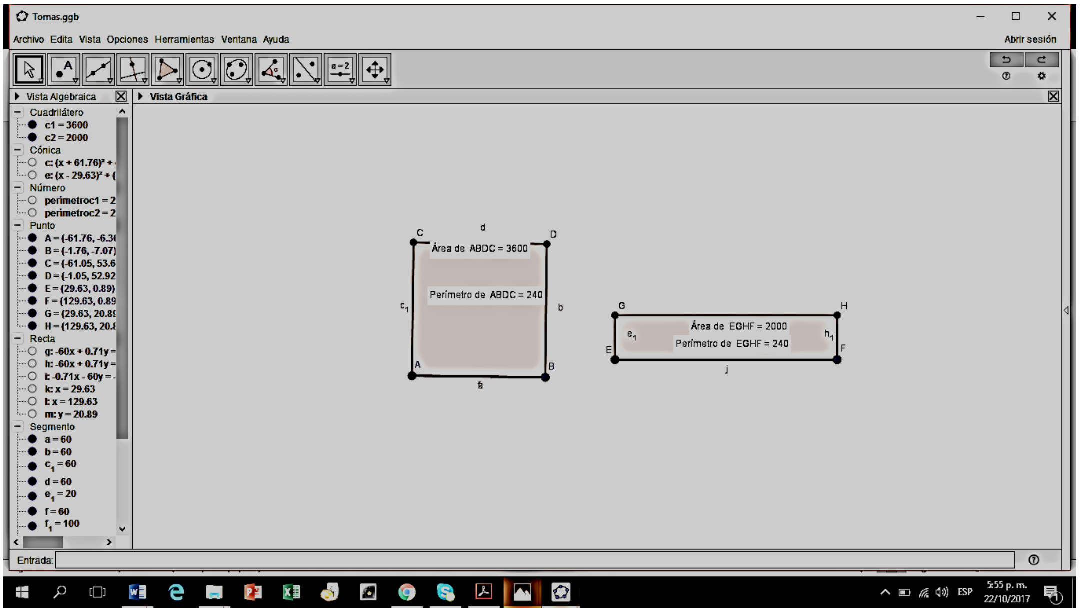


Figura 20. Ejemplo del uso de figuras geométricas regulares, situación problema 1.

El estudiante 11 (Software GeoGebra para la solución de la situación problema)

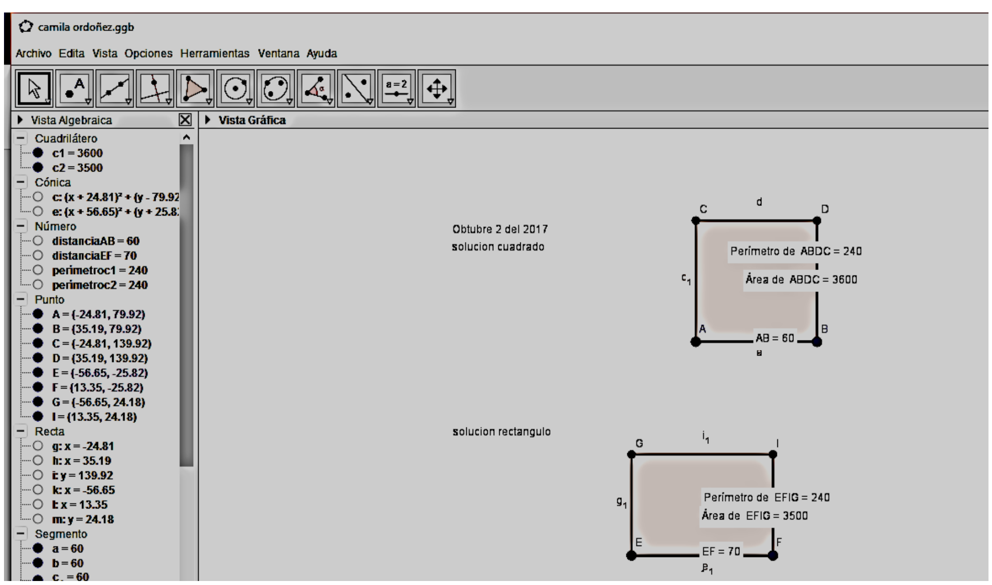


Figura 21. Ejemplo del uso de GeoGebra, situación problema 1.

El estudiante 12 (Lápiz y papel para presentar respuestas parciales)

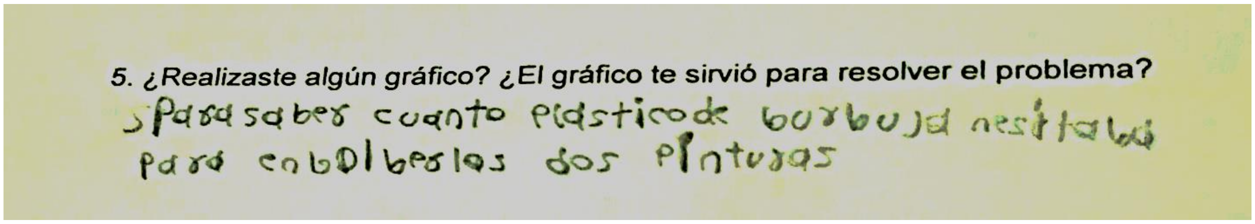

5. ¿Realizaste algún gráfico? ¿El gráfico te sirvió para resolver el problema?
s Para saber cuanto plastico de burbuja nesitaba para enbolberlas dos pinturas

Figura 22. Ejemplo del uso de lápiz y papel en respuestas parciales, situación problema 1.

Estrategias Heurísticas

El estudiante13 (Método de ensayo y error)

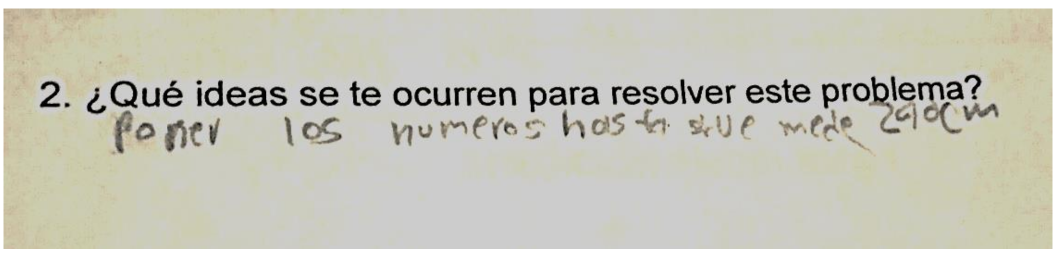

2. ¿Qué ideas se te ocurren para resolver este problema?
Poner los numeros hasta que mede 290cm

Figura 23. Ejemplo de la estrategia uso del método ensayo y error, situación problema 1.

El estudiante 14 (Pensar en un problema más simple)

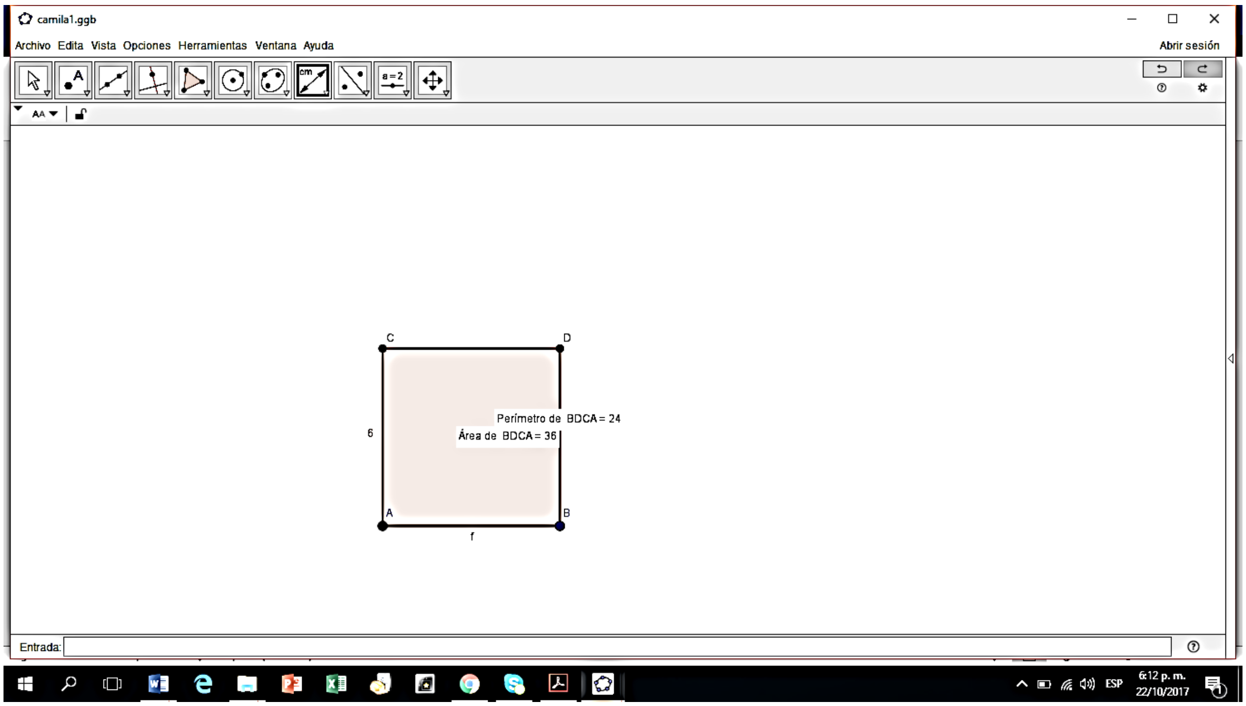
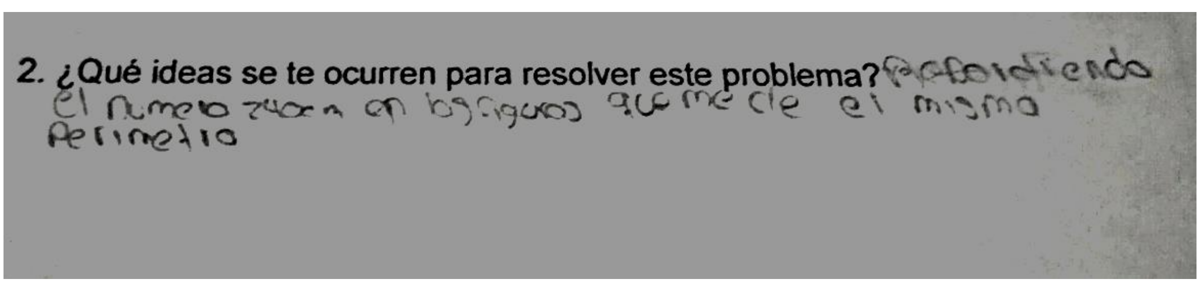


Figura 24. Ejemplo de la estrategia pensar en un problema más simple, situación problema 1.

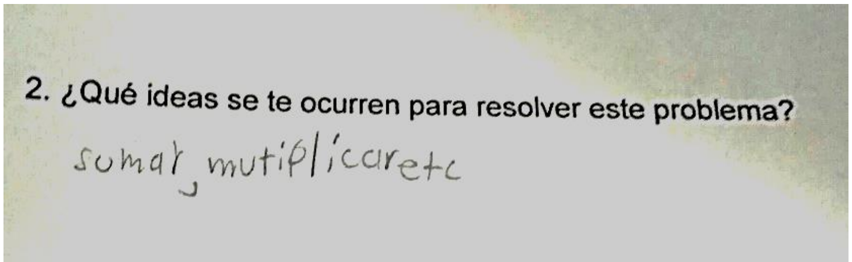
El estudiante 15 (Relacionar con otros problemas conocidos con ayuda)



2. ¿Qué ideas se te ocurren para resolver este problema? Repartiendo el numero 24cm en las figuras que me de el mismo perimetro

Figura 25. Ejemplo de la estrategia heurística relacionar con otros problemas conocidos, situación problema 1.

El estudiante 12 (*Estrategias irreflexivas: Adivina la operación o fórmula y realiza operaciones mecánicamente y c*ontesta “cualquier cosa”, sin hacer alguna operación)


2. ¿Qué ideas se te ocurren para resolver este problema?
sumar, mutiplicar etc

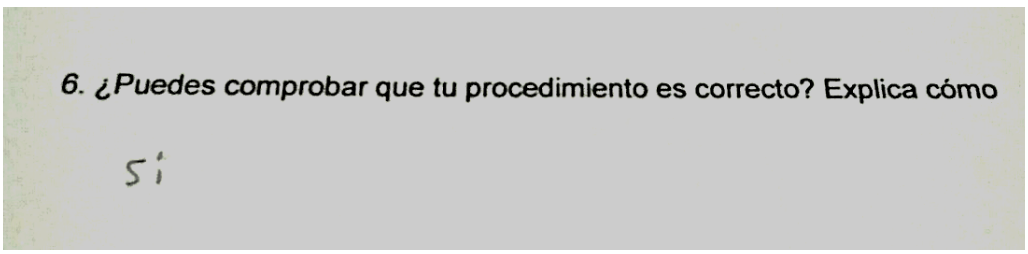

6. ¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo
si

Figura 26. Ejemplos del uso de estrategias irreflexivas, situación problema 1.

Estrategias Metacognitivas

El estudiante10 (Justificación usando términos del lenguaje matemático.)

l

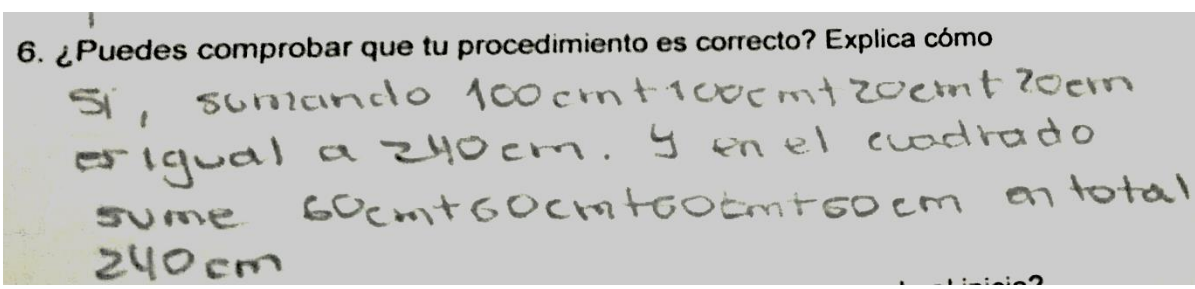
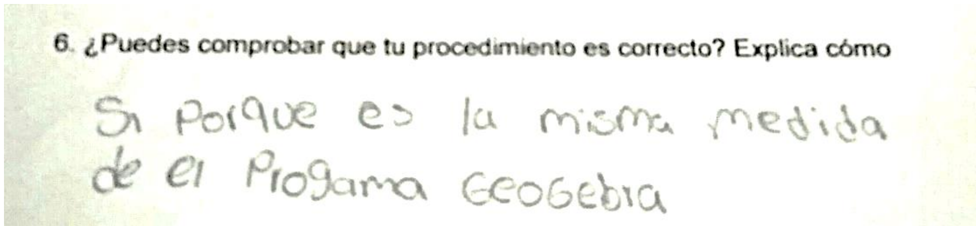

6. ¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo
Si, sumando 100cm+100cm+20cm+20cm es igual a 240cm. y en el cuadrado sume 60cm+60cm+60cm+60cm en total 240cm

Figura 26. Ejemplo de justificación usando términos del lenguaje matemático, situación problema 1.

estudiante 16 (Justificación usando términos del lenguaje natural)

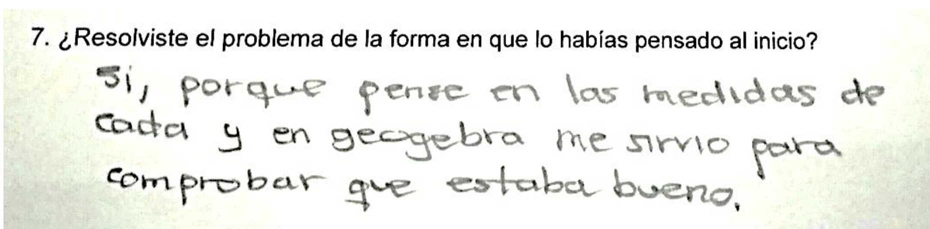


6. ¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo

Si porque es la misma medida de el Progama Geogebra

Figura 27. Ejemplo de justificación usando términos del lenguaje natural, situación problema 1.

El estudiante 10 (Con evaluación de los procedimientos utilizados)

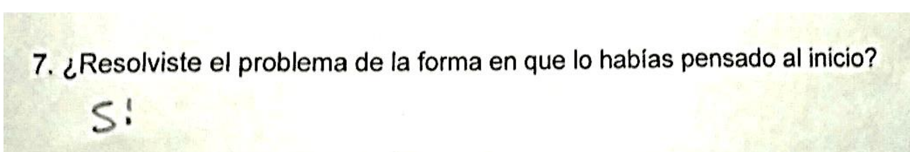


7. ¿Resolviste el problema de la forma en que lo habías pensado al inicio?

Si, porque pense en las medidas de cada y en geogebra me sirvio para comprobar que estaba bueno.

Figura 28. Ejemplo del uso de evaluación de los procedimientos utilizados, situación problema 1.

El estudiante 17 (Sin evaluación de los procedimientos utilizados)



7. ¿Resolviste el problema de la forma en que lo habías pensado al inicio?

Si

Figura 29. Ejemplo del no uso de la evaluación de los procedimientos utilizados, situación problema 1.

Dentro de las respuestas encontradas, éstas son clasificadas como correctas o incorrectas, obteniendo que el 86,48% fueron correctas y 13,52% incorrectas. A continuación, se evidencian algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes.

El estudiante 18 (Respuesta correcta esperada)

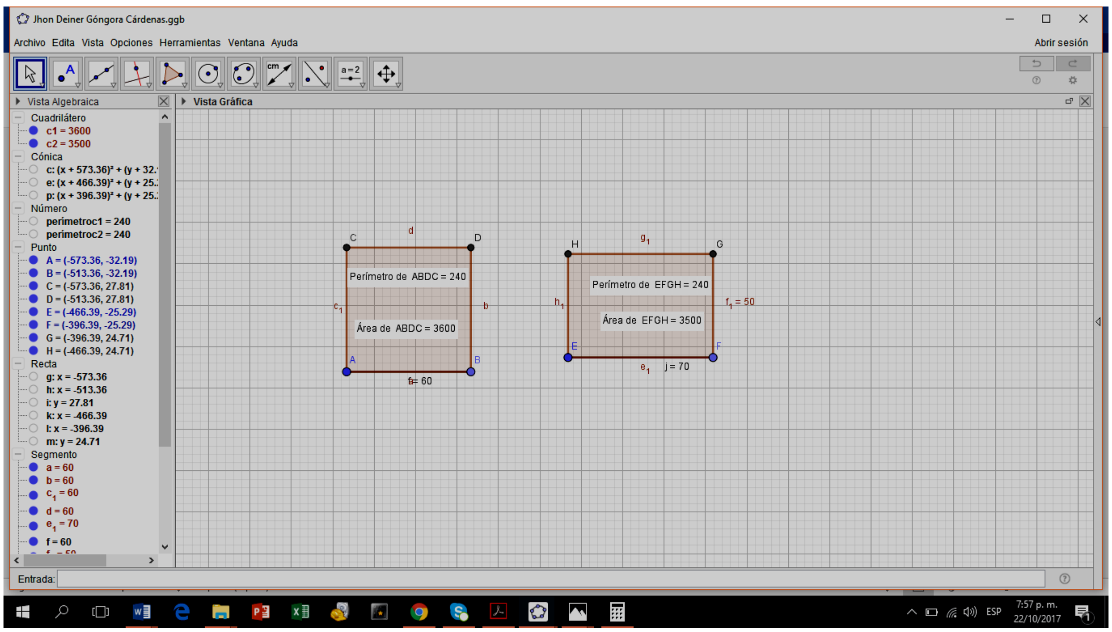


Figura 30. Ejemplo de respuesta correcta, situación problema 1.

Ejemplos de respuestas correctas aproximadas dadas por los estudiantes:

El estudiante 19

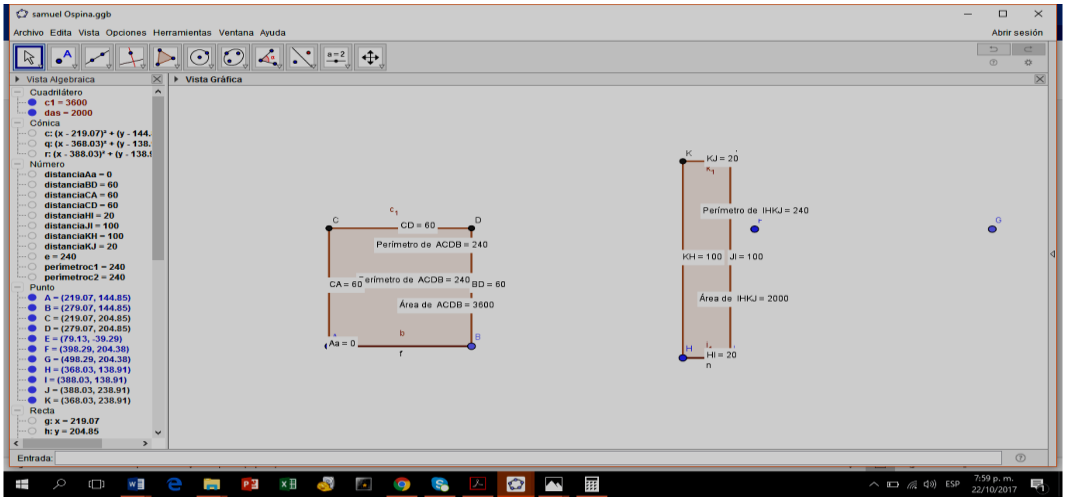


Figura 31. Ejemplo de respuesta aproximada, situación problema 1.

El estudiante 20

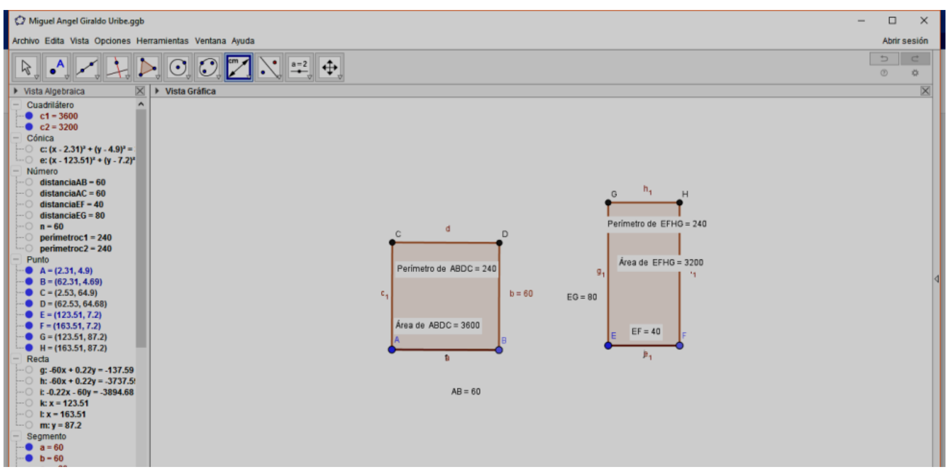


Figura 32. Ejemplo de respuesta correcta, situación problema 1.

Ejemplos de respuestas incorrectas proporcionadas por los estudiantes:

El estudiante 20

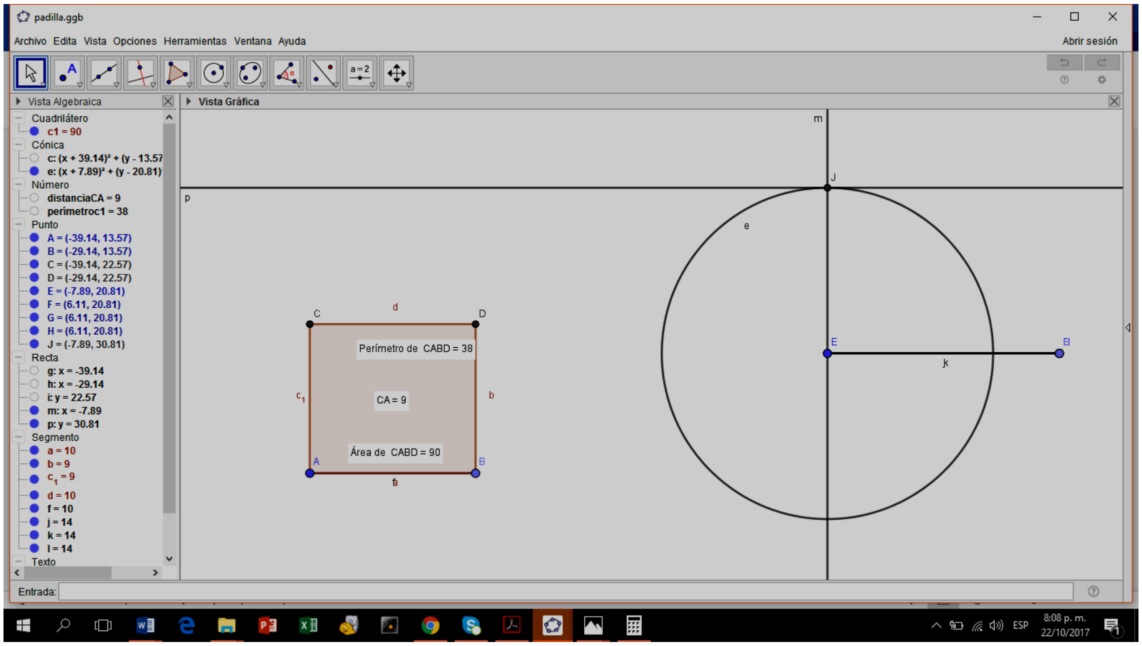


Figura 33. Ejemplo de respuesta incorrecta, situación problema 1.

4.3.1.5. Comentarios finales de la situación problema 1

En la aplicación de la situación problema 1 se obtuvieron progresos significativos al incrementarse la cantidad de respuestas donde los estudiantes podían encontrar áreas diferentes dados un perímetro y, además, establecer la diferencia entre dichas nociones.

Otras conclusiones importantes son las siguientes:

- Varios de los estudiantes lograron calcular las medidas de cada pintura teniendo en cuenta que el área de la pintura rectangular es muy similar al área de la pintura cuadrada, esto gracias al método de ensayo y error que se facilita con el uso del software GeoGebra.

- El uso de la computadora propició que muchos estudiantes (alrededor del 67%) justificaran sus respuestas en función de los gráficos realizados y la toma de medidas mostradas en su interfaz, es decir, no trataban de encontrar una justificación a sus resultados basados en sus pre saberes.

- En términos generales se puede decir que la aplicación de esta situación problema permitió un avance en el desarrollo de los pensamiento métrico y geométrico de los estudiantes.

4.3.2. Situación problema 2

4.3.2.1. Presentación de la actividad

En este caso (ver Anexo 3) se plantea la siguiente situación problema:

Juliana después de mucho pensarlo ha decidido reformar el jardín de su finca. Ella desea tener flores nuevas que llenen su vida de color. Para ello, ha decidido distribuirlo en tres partes con forma de rectángulos de diferentes *tamaños. Juliana sabe que tiene suficiente tierra para cubrir 72 m^2 de terreno en cada uno de ellos. Ayúdale a Juliana a dibujar las tres partes del jardín y encuentra las medidas de sus perímetros de manera que pueda cercarlos con alambre y así evitar que dañen sus flores.*

Durante el desarrollo de la situación se requiere que los estudiantes construyan tres figuras de forma rectangular que tienen un área fija y perímetro variable, en la primera instancia se les pregunta por las medidas que deben tener dichas figuras. Teniendo en cuenta que harán inferencias según las preguntas realizadas en la prueba diagnóstica, pues se espera que puedan hallar esas medidas y así ir avanzando en la segunda parte del trabajo y comprobar que efectivamente el área de las tres figuras es 72 m^2 y que sus perímetros son distintos.

Una estrategia para solucionar de manera efectiva la situación consiste en establecer las medidas para cada una de las tres figuras rectangulares de acuerdo al área dada (72 m^2) y así poder calcular su perímetro, para lo cual, por ejemplo, una de las figuras en dos de sus lados tendrá una medida de 9 m, en los otros dos lados 8 m, para un área de 72 m^2, después buscar medidas de otras dos figuras rectangulares cuya área sea igual que la anterior figura y que cuyo perímetro sea distinto.

Posteriormente, en la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes muestren la comprensión del enunciado, sus estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas usadas al interactuar con la interfaz del software GeoGebra. Aquí se espera que dicho programa les permita observar qué gráficas pueden construir y que numéricamente en cuanto al perímetro existen varias opciones de respuesta, pero que solo deben escoger las correctas y que, además, analicen si las medidas solicitadas corresponden a los datos que ellos suponían eran los acertados.

4.3.2.2. Propósitos

En la prueba diagnóstica, al plantear preguntas similares a la propuesta en la situación 2, se obtuvo un resultado sumamente bajo de respuestas correctas. Muchas de las respuestas fueron inducidas por saberes previos o intuiciones erróneos, por ejemplo, decir que todas las figuras tienen diferente perímetro solo por cómo se ven, un 83.78% de los estudiantes lo responde así en la pregunta 5. Esto se presenta debido a la falta de claridad en las nociones de área y perímetro y la diferenciación entre ellas. Dicha situación genera la necesidad de proponer una actividad didáctica que permitiera el aprendizaje de estrategias para determinar las medidas de tres figuras geométricas dada su área fija, y al mismo tiempo, encontrar su perímetro variable.

Además de lo anterior, otro de los propósitos es contribuir al desarrollo de algunas competencias establecidas en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006), para lo cual se emprendieron las siguientes acciones:

- Resolución de un problema, para este caso, en un contexto hipotético.

- Comunicar por escrito las justificaciones a cada una de las actividades propuestas.
- Confrontar los saberes previos con el uso del SGD GeoGebra.
- Trabajar diferentes formas de representación.
- Discutir en torno a la actividad (en grupo), favoreciendo con ello la interacción y la comunicación verbal, en cuanto a sus hallazgos o saberes.

4.3.2.3. Condiciones de aplicación

La situación problema 2 del trabajo se aplicó en una sesión de tres horas y treinta minutos, donde los estudiantes contestaron de manera individual el trabajo propuesto en la sala de sistemas con el apoyo del software Geogebra. En lo referente a las características generales, las hojas de trabajo contenían el enunciado de la situación problema y siete preguntas con espacios para justificar cada una de las respuestas.

Es importante resaltar que la actividad por sí sola no garantiza la consecución de los propósitos establecidos, ya que se hace necesario establecer una dinámica de clase donde los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje. Para ello, en la primera parte de la hoja de trabajo se tiene un acercamiento individual a la situación problemática, al final se la sesión se realiza la discusión sobre los hallazgos encontradas entre los estudiantes y las nociones matemáticas involucradas. Finalmente, se cerró con la exposición de las ideas más importantes por parte de la docente, señalando las dificultades observadas.

4.3.2.4. Análisis de resultados

Para los propósitos del presente estudio, es fundamental contrastar la respuesta que dan los estudiantes a la situación problema con el apoyo del software Geogebra. El análisis de esta información se hace simultáneamente desde dos enfoques, cuantitativa y cualitativamente. Los datos conseguidos son presentados en la siguiente tabla con la finalidad de mostrar por separado la comprensión del enunciado, los recursos, las estrategias heurísticas y las metacognitivas utilizados por el grupo de estudiantes.

DIMENSIONES Y/O ETAPAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	INDICADORES O DESCRIPTORES	PORCENTAJES OBTENIDOS
COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO	*Problema entendido rápidamente.*	24.32%
	Relación entre área fija y perímetro variable	24.32%
	Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar	21.62%
	Entiende la pregunta, pero no expresa los conceptos y ni las operaciones a utilizar.	8.11%
	Otro: no expresa de forma clara lo entendido del problema	21.62%
TIPO DE RECURSOS UTILIZADOS	*Unidades de medida de perímetro y longitud*	16.21%
	Gráficos con figuras geométricas regulares	100%
	Arrastre	100%
	Software GeoGebra para la solución de la situación problema	72.98%
	Lápiz y papel para representar respuestas parciales	27.02%
ESTRATEGIAS HEURISTICAS	*Método de Ensayo y error*	100%
	Pensar en problemas más simples al iniciar el proceso de resolución	100%
	Relacionar con otros Problemas Conocidos	100%

ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS	*Justificación usando términos del lenguaje matemático.*	5.41%
	Justificación usando términos del lenguaje natural	56.76%
	Sin justificar	37.83%
	Con evaluación de los procedimientos utilizados a través de términos matemáticos	10.81%
	Con evaluación de los procedimientos utilizados a través del lenguaje natural	51.36%
	Sin evaluación de los procedimientos utilizados	37.83%

Tabla 5. Recursos, estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas utilizados por el grupo de estudiantes, situación problema 2.

Tal como evidencia la anterior tabla, el 24.32% de los estudiantes comprendieron rápidamente el enunciado de la situación problema y a su vez lo relacionaron con un problema de área fija y perímetro variable. Con respecto a los recursos utilizados solo el 16,21% del grupo de 37 tuvo en cuenta el uso de las unidades de medida; la totalidad de los estudiantes usa gráficos de figuras regulares, el 72.98% usó como primera instancia el software GeoGebra y el arrastre en la búsqueda de la solución correcta, el 27.02% asume el lápiz y el papel como herramienta auxiliar en dicha labor. Aunque finalmente todos usaron el software y el arrastre para alcanzar con mayor seguridad su objetivo.

Las estrategias heurísticas abordadas al inicio del proceso de resolución como utilizar el método de ensayo y error, *pensar en problemas más simples al iniciar el proceso de resolución, relacionar con otros problemas conocidos*, fueron usadas por los estudiantes alcanzando un gran porcentaje (100%).

En las estrategias metacognitivas, los estudiantes muestran gran dificultad para utilizar argumentos con términos matemáticos (solo el 5.41% pudo hacerlo), mientras que un (56.76%) usó un lenguaje natural; y el 37.83% de ellos ni siquiera pudo argumentar. En cuanto a la verificación de procedimientos prevalece la evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje natural (51.36%), pero también se evidencia un (37.83%) en la falta de justificación para la verificación de sus resultados. Para ilustrar lo anterior, se muestran a continuación algunas evidencias del trabajo realizado por los estudiantes durante el proceso de resolución de la situación problema.

A continuación, se proporcionan ejemplos de los registros de los estudiantes durante el proceso de solución de la situación problema 2, en los tópicos analizados:

Comprensión del enunciado:

El estudiante 21 (Problema entendido rápidamente)

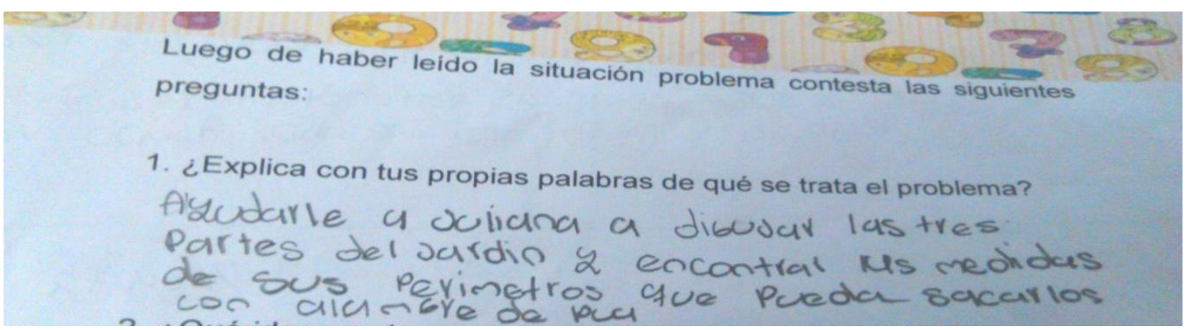
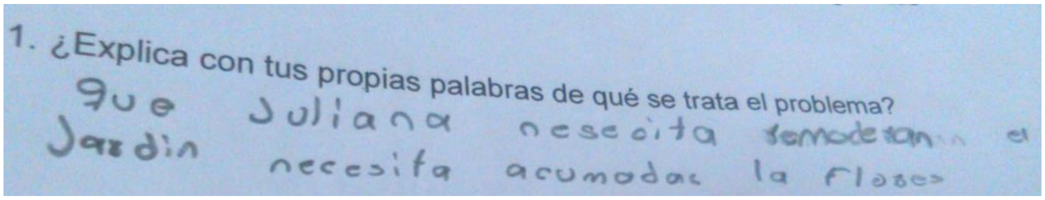


Figura 34. Ejemplo de problema entendido rápidamente, situación problema 2.

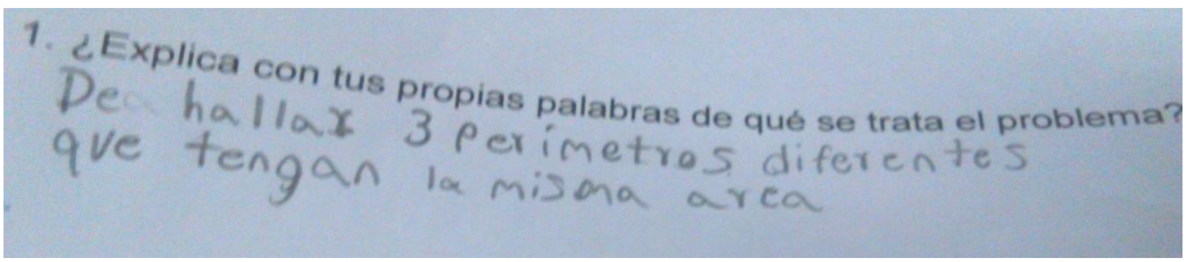
El estudiante 17 (problema no entendido)



1. ¿Explica con tus propias palabras de qué se trata el problema?
que Juliana nesecita remodelar el Jardin necesita acumodar la flores

Figura 35. Ejemplo de problema no entendido, situación problema 2.

El estudiante 5 (Relación entre área fija y perímetro variable)



1. ¿Explica con tus propias palabras de qué se trata el problema?
De hallar 3 perimetros diferentes que tengan la misma area

Figura 36. Ejemplo al establecer la relación área fija y perímetro variable, situación problema 2.

Tipo de recursos utilizados:

El estudiante 8 (Unidades de medida de perímetro y área)

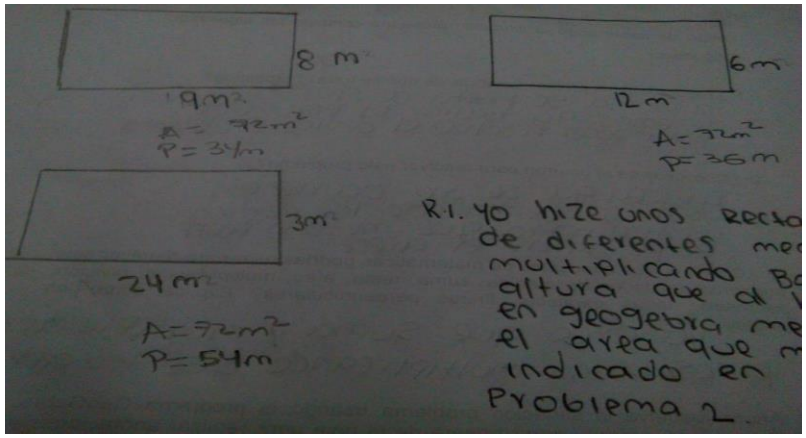


Figura 37. Ejemplo del uso de unidades de medida de longitud y superficie, situación problema 2.

El estudiante 7 (Gráficos con figuras geométricas regulares)

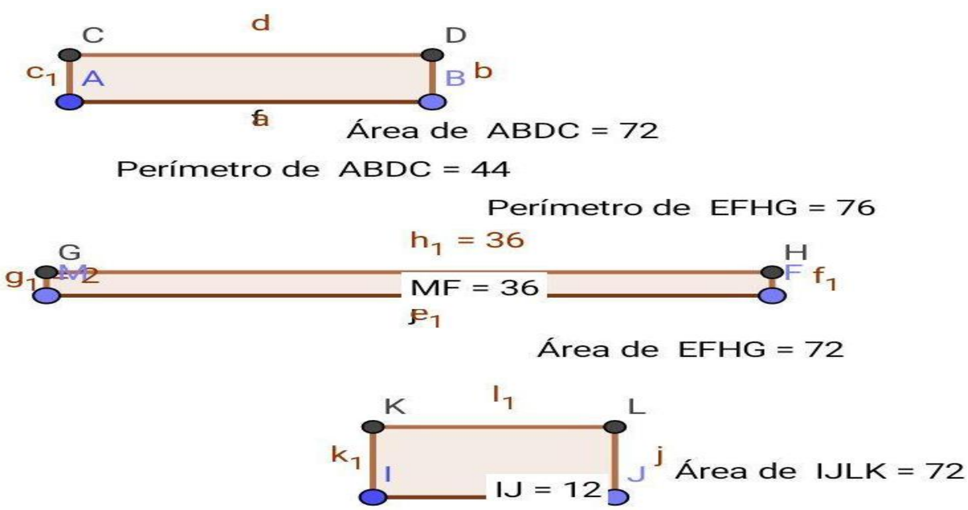


Figura 38. Ejemplo del uso de figuras geométricas regulares, situación problema 2.

El estudiante 13 (Software GeoGebra para la solución de la situación problema)

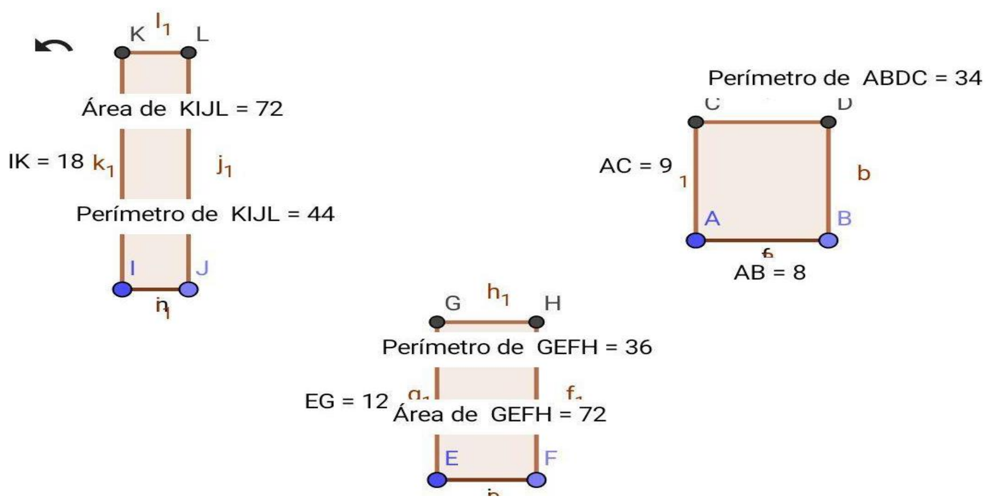


Figura 39. Ejemplo del uso del software GeoGebra para la solución del problema, situación problema 2.

El estudiante 19 (Lápiz y papel para presentar respuestas parciales)

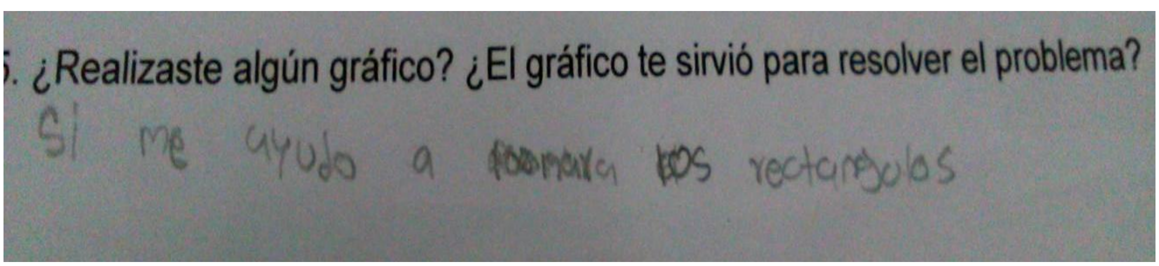


Figura 40. Ejemplo del uso de lápiz y papel para presentar respuestas parciales, situación problema 2.

Estrategias Heurísticas

El estudiante 22 (Método de ensayo y error)

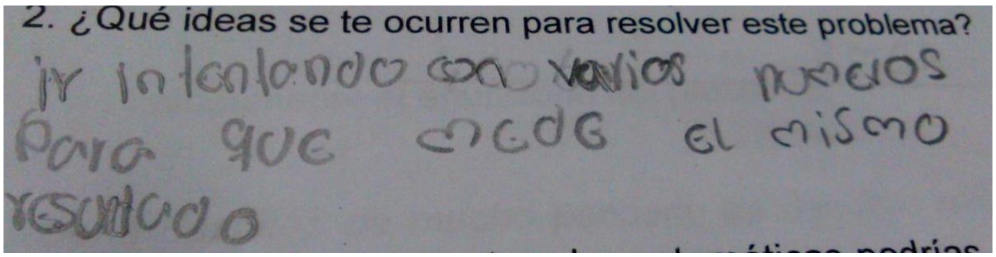


Figura 41. Ejemplo del uso de la estrategia heurística ensayo y error, situación problema 2.

El estudiante 15 y el estudiante 23 respectivamente (Pensar en un problema más simple)

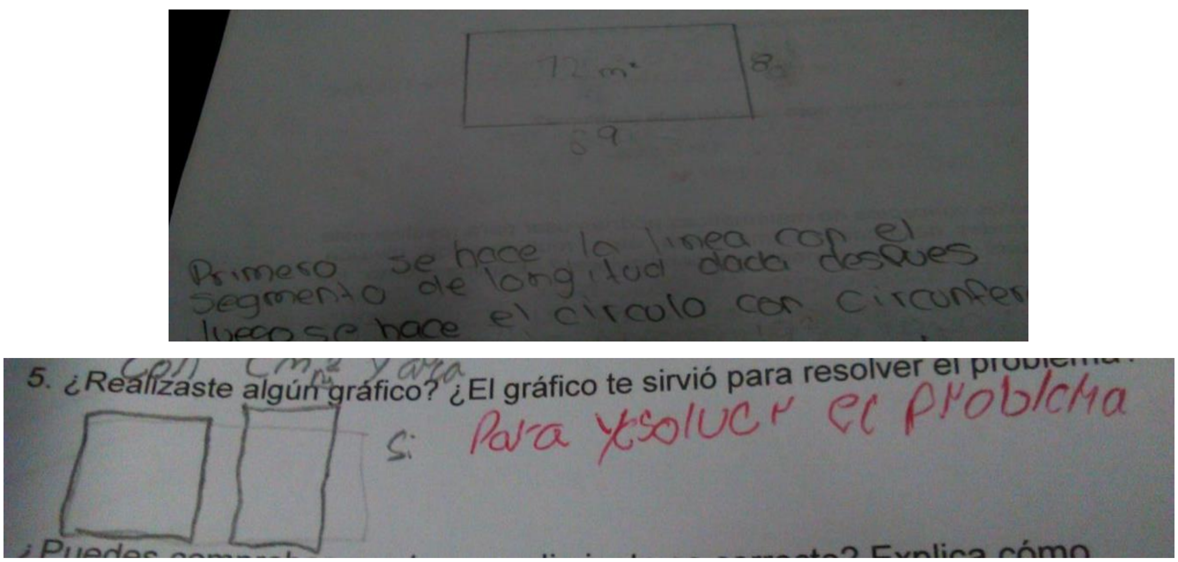


Figura 42. Ejemplos del uso de la estrategia heurística pensar en un problema más simple, situación problema 2.

El estudiante 15 (Relacionar con otros problemas conocidos con ayuda)

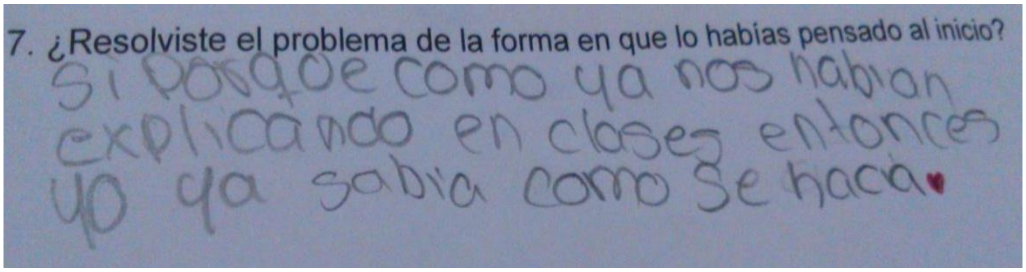

7. ¿Resolviste el problema de la forma en que lo habías pensado al inicio?
si porqoe como ya nos habian
explicando en clases entonces
yo ya sabia como se hacia

Figura 43. Ejemplo del uso de la estrategia heurística relacionar con otros problemas conocidos, situación problema 2.

Estrategias Metacognitivas

El estudiante 15 (Justificación usando términos del lenguaje matemático.)

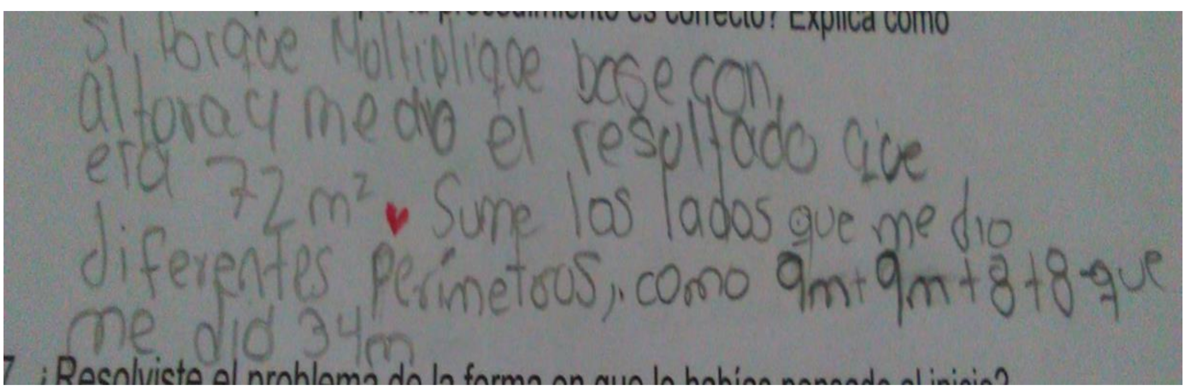

procedimiento es correcto? Explica como
si porqoe Moltipliqoe base con
altora y me dio el resultado qoe
era 72 m² Sume los lados que me dio
diferentes perimetros, como 9m+9m+8+8 que
me dio 34m

Figura 44. Ejemplo del uso de estrategia metacognitiva usando términos del lenguaje matemático, situación problema 2.

El estudiante 24 (Justificación usando términos del lenguaje natural)

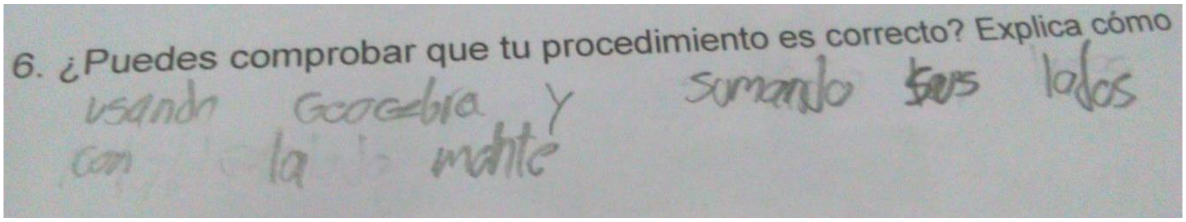

6. ¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo
usando Geogebra y sumando sus lados
con la mahte

Figura 45. Ejemplo del uso de estrategia metacognitiva usando términos del lenguaje natural, situación problema 2.

El estudiante 11 (Con evaluación de los procedimientos utilizados)

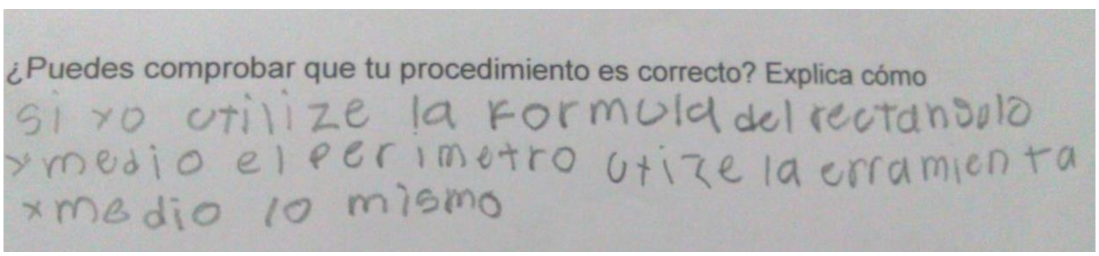

¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo
si yo utilize la formula del rectangolo
y medio el perimetro utize la erramienta
x medio lo mismo

Figura 46. Ejemplo del uso de estrategia metacognitiva evaluación de los procedimientos utilizados, situación problema 2.

El estudiante 12 (Sin evaluación de los procedimientos utilizados)

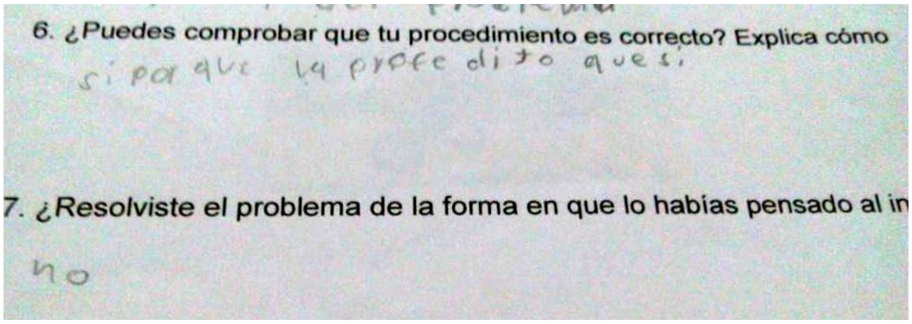
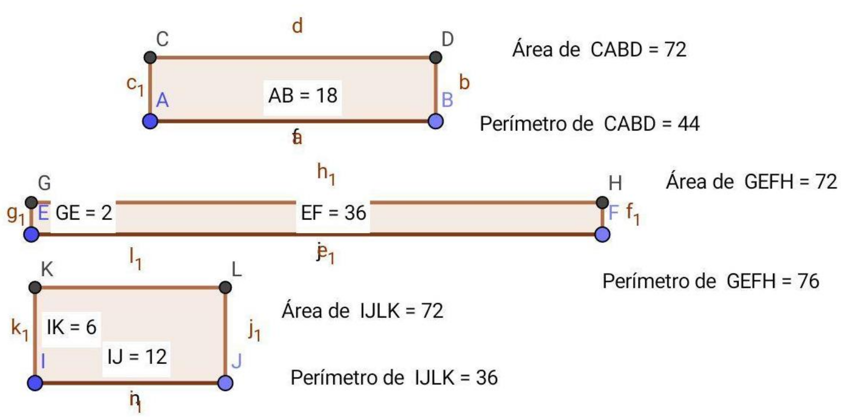


Figura 47. Ejemplo del no uso de estrategias metacognitivas situación problema 2.

Dentro de las respuestas encontradas, éstas son clasificadas como correctas o incorrectas, obteniendo que el 91,89% fueron correctas y 8,11% incorrectas. A continuación, se evidencian algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes.

Respuestas correctas esperadas:

El estudiante 21



El estudiante 16

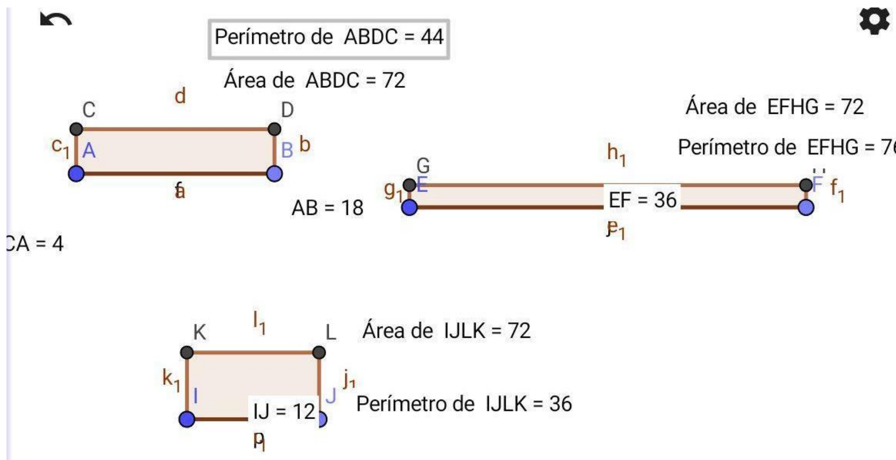


Figura 48. Ejemplos de respuestas correctas esperadas, situación problema 2.

El estudiante 2 (Respuesta correcta aproximada)

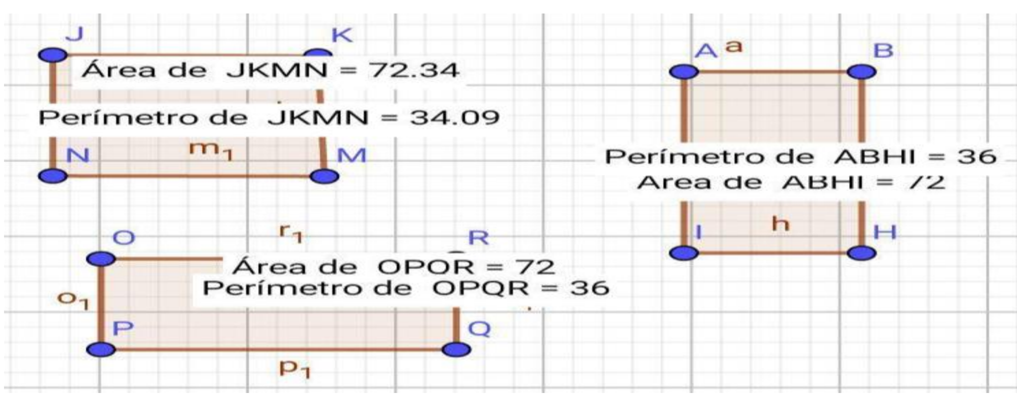


Figura 49. Ejemplo respuesta correcta aproximada, situación problema 2.

El estudiante 25 (Respuesta incorrecta)

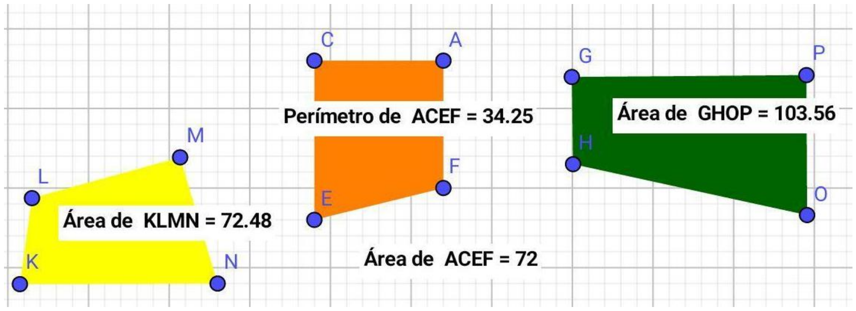


Figura 50. Ejemplo respuestas incorrectas, situación problema 2.

4.3.2.5. Comentarios finales de la situación problema 2

En la aplicación de la situación problema 2 se obtuvieron progresos significativos al incrementarse la cantidad de respuestas donde los estudiantes podían encontrar perímetros diferentes, con un área dada y, además, establecer la diferencia entre dichas nociones.

Otras conclusiones importantes son las siguientes:

- Con respecto a la situación problema 1 aumento el número de estudiantes que expresan de forma clara lo entendido en el enunciado del problema.
- Se utiliza por parte de los estudiantes otra estrategia heurística adicional a las usadas en la situación 1, a saber, relacionar con otros problemas conocidos.

- Muchos de los estudiantes lograron calcular las medidas de los lados de cada una de las tres partes del jardín teniendo en cuenta que el área de los tres rectángulos era igual, pero con diferentes perímetros, cabe aclarar que el uso del software GeoGebra, facilitó dicho proceso.
- El uso de la computadora permitió que muchos estudiantes (alrededor del 51.36%) justificaran sus respuestas en función de los gráficos realizados y la toma de medidas mostradas en su interfaz.

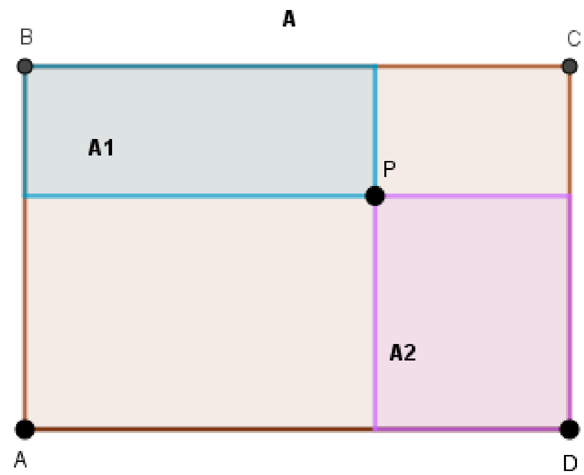
En términos generales se puede decir que la aplicación de esta situación problema permitió mayor progreso en el desarrollo de los pensamiento métrico y geométrico de los estudiantes.

4.3.3. Situación problema 3

4.3.3.1. Presentación de la actividad

En este caso (ver Anexo 2) se plantea la siguiente situación problema para ser resuelta por parejas:

*En la interfaz de GeoGebra pueden ver un rectángulo ABCD que tiene un área **A** y un punto **P** en su interior sobre una de sus diagonales. Si por P se trazan rectas paralelas a cada uno de los lados del rectángulo ABCD y se forman en su interior dos nuevos rectángulos con áreas **A1** y **A2**, donde los rectángulos son de diferente tamaño. Mueve el punto **P** y observa sucede.*



Después de leer este enunciado junto con tu compañero o compañera:

a. Hallen los perímetros y encuentren qué relación hay entre los perímetros de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande.

b. Hallen las áreas y encuentren qué relación hay entre las áreas de los de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande.

Durante el desarrollo de la situación se requiere que los estudiantes encuentren los perímetros y las áreas de los rectángulos de color azul y lila, así como de ABCD, de manera que en la primera parte de la hoja de trabajo con los resultados obtenidos puedan establecer relaciones métricas y numéricas que deben tener dichas figuras, para tal propósito podrán usar el recurso de arrastre con que cuenta el software Geogebra. De acuerdo a las respuestas que se dieron en la prueba diagnóstica, se plantean preguntas similares, esperando que puedan hallar dichas medidas mientras que avanzan en la segunda parte del trabajo y establecer que el perímetro del rectángulo ABCD es igual a la suma de los perímetros de los rectángulos azul y lila. Así como también que el área del rectángulo ABCD es igual a la mitad de la suma de las áreas de los rectángulos azul y lila cuando el punto P está en el centro del rectángulo ABCD.

Una estrategia para solucionar correctamente la situación consiste en establecer las medidas de los perímetros y áreas de los rectángulos ABCD, azul y lila; luego mover el punto P y observar el comportamiento de las medidas y posteriormente buscar relaciones entre las medidas de las figuras rectangulares. Como resultado de ello es posible establecer que la medida del perímetro de ABCD es 20 y que dicha cantidad corresponde a la suma de las medidas de los perímetros de los rectángulos azul y lila. Así como también que la medida del área A es igual a 24, la cual corresponde a la mitad de la suma de las medidas de las áreas A1 y A2, es decir 12, pero solo cuando el punto P está en el centro del rectángulo ABCD.

Posteriormente, en la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes deberán mostrar la comprensión del enunciado, sus estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas usadas al interactuar con la interfaz del software GeoGebra. Aquí se espera que dicho programa les permita observar que gráfica y numéricamente existe una sola opción de respuesta en el caso de comparar las áreas de los rectángulos dados y que existen múltiples respuestas en el caso de comparar los perímetros de estos rectángulos.

4.3.3.2. Propósitos

En la prueba diagnóstica, al plantear preguntas similares a la propuesta en la situación 3, se obtuvo un resultado sumamente bajo al justificar las comparaciones entre las áreas y perímetros de figuras dadas (86.48%). Esto se presenta debido a la falta de claridad en las nociones de área y perímetro y la diferenciación entre ellas, así como también a la falta de exploración de dichas nociones con material concreto o SGD como GeoGebra. Esta situación genera la necesidad de proponer una actividad didáctica que permitiera el aprendizaje de estrategias para determinar relaciones métricas y numéricas con figuras dadas.

Además de lo anterior, otro de los propósitos es contribuir al desarrollo de algunas competencias establecidas en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006), para lo cual se emprendieron las siguientes acciones:

- Resolución de un problema, para este caso, en un contexto desde las matemáticas.
- Comunicar por escrito las justificaciones a cada una de las actividades propuestas.
- Confrontar los saberes previos con el uso del SGD GeoGebra.
- Trabajar diferentes formas de representación.
- Trabajo cooperativo entre pares.
- Discutir en torno a la actividad (en grupo), favoreciendo con ello la interacción y la comunicación verbal.

4.3.3.3. Condiciones de aplicación

La situación problema 3 de trabajo se aplicó en una sesión de tres horas y treinta minutos, donde los estudiantes contestaron por parejas el trabajo propuesto en la sala de sistemas con el apoyo del software Geogebra.

En lo referente a las características generales, las hojas de trabajo contenían el enunciado de la situación problema y siete preguntas con espacios para justificar cada una de las respuestas.

Es importante resaltar que la actividad por sí sola no garantiza la consecución de los propósitos establecidos, ya que se hace necesario establecer una dinámica de clase donde los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje. Para ello, en la primera parte de la hoja de trabajo se tiene un acercamiento de las parejas de estudiantes a la situación problemática, al final de la sesión se realiza la discusión con los estudiantes sobre las soluciones encontradas y de las nociones matemáticas involucradas. Finalmente, se cerró la sesión con la exposición de las ideas más importantes por parte de la docente, señalando las dificultades observadas.

4.3.3.4. Análisis de resultados

Para los propósitos del presente estudio, es fundamental contrastar la respuesta que dan los estudiantes a la situación problema con el apoyo del software Geogebra. El análisis de esta información se hace simultáneamente desde dos enfoques, cuantitativa y cualitativamente. Los datos conseguidos son presentados en la siguiente tabla con la finalidad de mostrar por separado los recursos, las estrategias heurísticas y las metacognitivas utilizados por el grupo de estudiantes.

DIMENSIONES Y/O ETAPAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	INDICADORES O DESCRIPTORES	PORCENTAJES OBTENIDOS
COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO	*Problema entendido rápidamente.*	27,03%
	Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar.	10,81%
	Entiende la pregunta, pero no expresa los conceptos y ni las operaciones a utilizar.	10,81%

	Otro: no expresa de forma clara lo entendido del problema.	51,35%
TIPOS DE RECURSOS UTILIZADOS	*Gráficos con figuras geométricas regulares*	100%
	Arrastre	100%
	Software GeoGebra para la solución de la situación problema.	100%
	Lápiz y papel para registro de respuestas.	100%
ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS	*Pensar en problemas más simples al inicio del proceso de resolución*	100%
	*Estrategias irreflexivas: C*ontesta "cualquier cosa", sin hacer alguna operación	5,40%
ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS	*Justificación usando términos del lenguaje matemático.*	5,40%
	Justificación usando términos del lenguaje natural	89,20%
	Sin justificar	5,40%
	Con evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje matemático.	5,40%
	Con evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje natural.	83,79%
	Sin evaluación de procedimientos	10,81%

Tabla 6. Recursos, estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas utilizados por el grupo de estudiantes, situación problema 3.

Tal como se puede apreciar, el 27,03% de los estudiantes comprendieron rápidamente el enunciado de la situación problema y el 51,35% no expresa de forma clara lo entendido del problema. En cuanto a los recursos utilizados la totalidad de los estudiantes usa gráficos de figuras regulares, el software GeoGebra y el arrastre en la búsqueda de la solución correcta, el lápiz y el papel poseen un papel auxiliar en dicha labor.

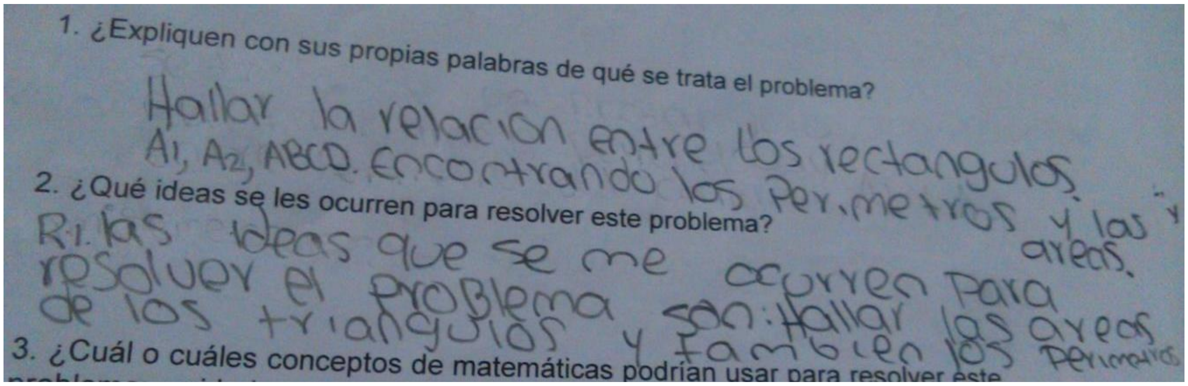
La estrategia heurística que posee el mayor porcentaje es pensar en problemas más simples al inicio del proceso de resolución (100%), algunos estudiantes poseen estrategias irreflexivas que no los conducen a la solución del problema planteado.

En las estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes se evidencia una gran dificultad para utilizar argumentos con términos matemáticos (solo el 5,40%), en consecuencia, las justificaciones están cargadas de un lenguaje natural (89,20%); en cuanto a la verificación de procedimientos prevalece la evaluación de los procedimientos utilizados justificados con términos del lenguaje natural. durante la resolución de la situación problema con un 83,79%. Para ilustrar lo anterior, se muestran a continuación algunas evidencias del trabajo realizado por los estudiantes durante el proceso de resolución de la situación problema.

A continuación, se proporcionan ejemplos de los registros de los estudiantes durante el proceso de solución de la situación problema 3, en los tópicos analizados:

***Comprensión del enunciado*:**

El estudiante 8 y el estudiante 26 (Problema entendido rápidamente)



1. ¿Expliquen con sus propias palabras de qué se trata el problema?

Hallar la relacion entre los rectangulos A1, A2, ABCD. Encontrando los Perimetros y las areas.

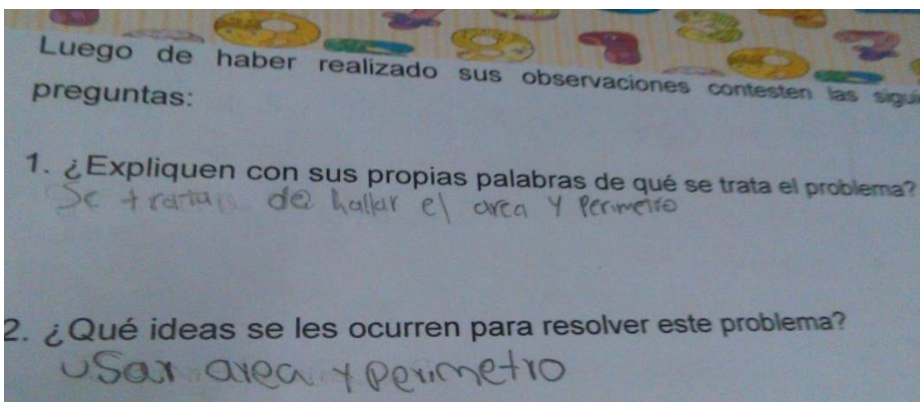
2. ¿Qué ideas se les ocurren para resolver este problema?

R.1. las ideas que se me ocurren para resolver el problema son: Hallar las areas de los triangulos y tambien los Perimetros

3. ¿Cuál o cuáles conceptos de matemáticas podrían usar para resolver este

Figura 51. Ejemplo de problema entendido rápidamente, situación problema 3.

El estudiante 3 y el estudiante 13 (No expresa de forma clara lo entendido del problema)



Luego de haber realizado sus observaciones contesten las sigu

preguntas:

1. ¿Expliquen con sus propias palabras de qué se trata el problema?

Se trata de hallar el area y Perimetro

2. ¿Qué ideas se les ocurren para resolver este problema?

usar area y perimetro

Figura 52. Ejemplo de no expresar de forma clara lo entendido del problema, situación problema 3.

Tipo de recursos utilizados:

El estudiante 27 y el estudiante 28 (Gráficos con figuras geométricas regulares)

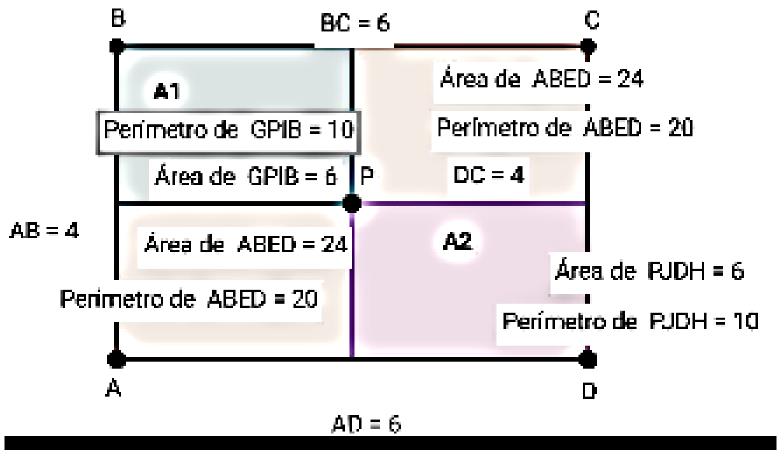


Figura 53. Ejemplo de uso de figuras geométricas regulares, situación problema 3.

El estudiante 7 y el estudiante 29 (Software GeoGebra- arrastre para la solución de la situación problema)

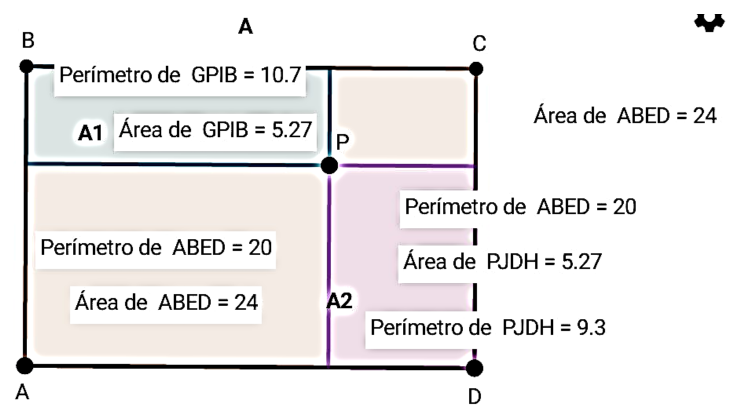


Figura 54. Ejemplo de uso de la opción de arrastre para la solución del problema, situación problema 3.

El estudiante 7 y el estudiante 16 (Lápiz y papel para registro de respuestas)

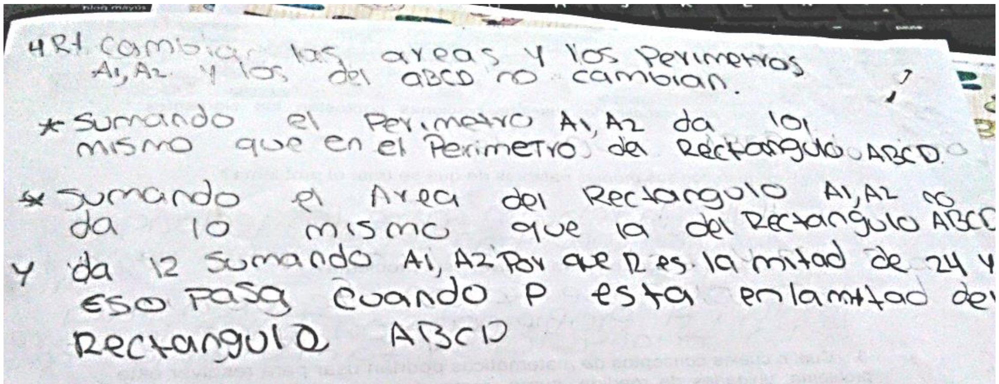
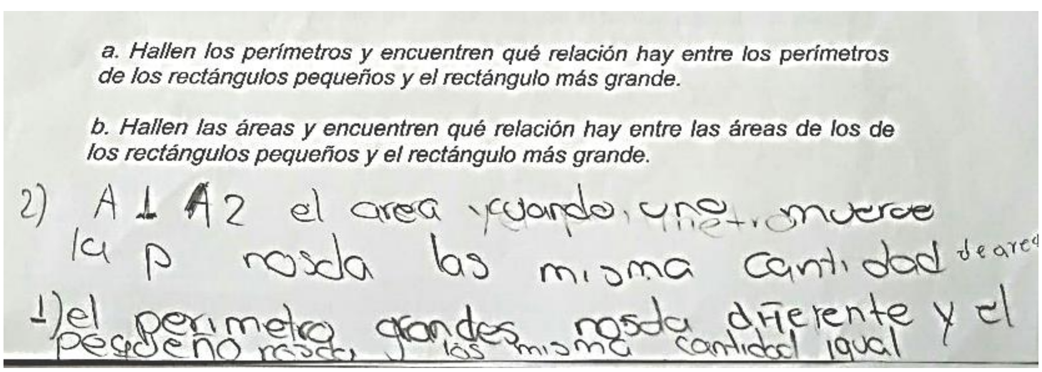

4 Rt. cambian las areas y los Perimetros A1, A2 y los del ABCD no cambian.
* Sumando el Perimetro A1, A2 da lo mismo que en el Perimetro de Rectangulo ABCD.
* Sumando el Area del Rectangulo A1, A2 no da lo mismo que la del Rectangulo ABCD
y da 12 sumando A1, A2 Por que 12 es la mitad de 24 y eso pasa cuando P esta en la mitad del Rectangulo ABCD

Figura 55. Ejemplo de uso de lápiz y papel para el registro de respuestas, situación problema 3.

Estrategias Heurísticas

El estudiante 12 y el estudiante 18 (Relacionar con otros problemas conocidos con ayuda)


a. Hallen los perímetros y encuentren qué relación hay entre los perímetros de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande.

b. Hallen las áreas y encuentren qué relación hay entre las áreas de los de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande.

2) A1 A2 el area y cuando uno mueve la p rosada las misma cantidad de area
1) el perimetro grandes rosada diferente y el pequeño rosado los misma cantidad igual

Figura 56. Ejemplo del uso de la estrategia relacionar con otros problemas conocidos, situación problema 3.

*El estudiante 4 y el estudiante 12 (Estrategias irreflexivas: c*ontesta "cualquier cosa", sin hacer alguna operación)

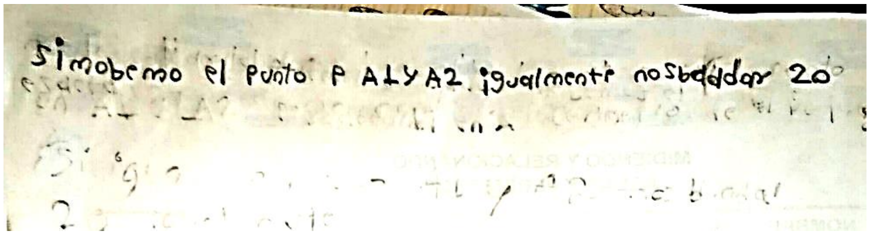
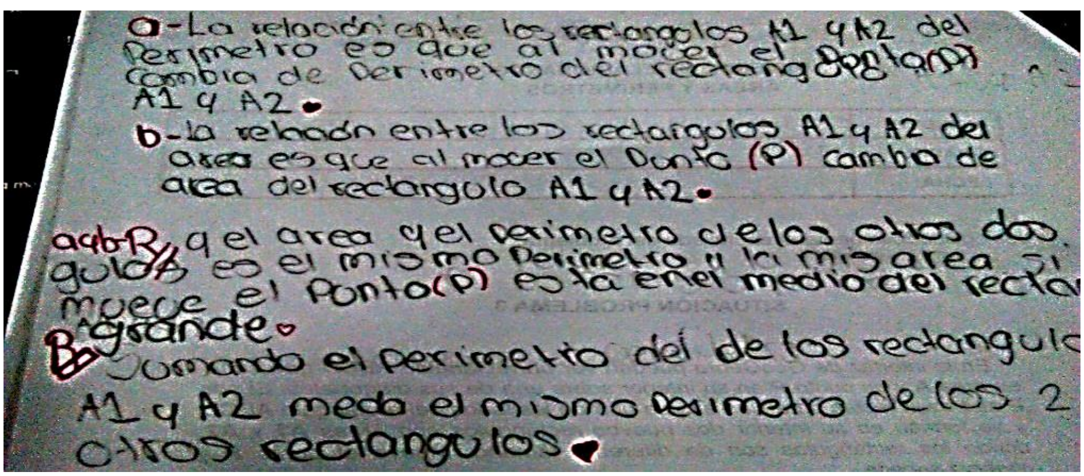

simobemo el punto P A1 y A2 igualmente nosbdddar 20

Figura 57. Uso de estrategias heurísticas irreflexivas, situación problema 1.

Estrategias Metacognitivas

El estudiante 15 y el estudiante 30 (Justificación usando términos del lenguaje matemático.)


a- La relación entre los rectangulos A1 y A2 del Perimetro es que al mover el punto cambia de perimetro del rectangulo A1 y A2.

b- la relación entre los rectangulos A1 y A2 del area es que al mover el punto (P) cambio de area del rectangulo A1 y A2.

a y b R/ q el area y el perimetro de los otros dos rectangulos es el mismo perimetro y la mis area si mueve el punto (P) esta en el medio del recta grande

B/ sumando el perimetro del de los rectangulos A1 y A2 medo el mismo perimetro de los 2 otros rectangulos

Figura 58. Ejemplo del uso de la estrategia metacognitiva usando términos del lenguaje matemático, situación problema 3.

El estudiante 3 y el estudiante 13 (Justificación usando términos del lenguaje natural)

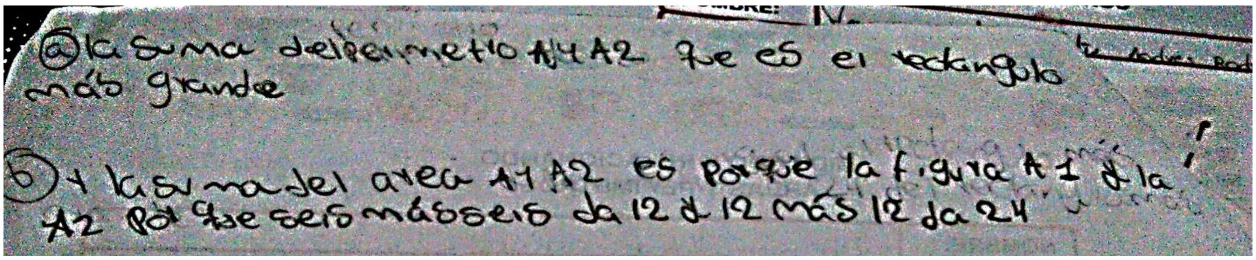


Figura 59. Ejemplo del uso de la estrategia metacognitiva usando términos del lenguaje natural, situación problema 3.

El estudiante 5 y el estudiante 11 (Con evaluación de los procedimientos utilizados)

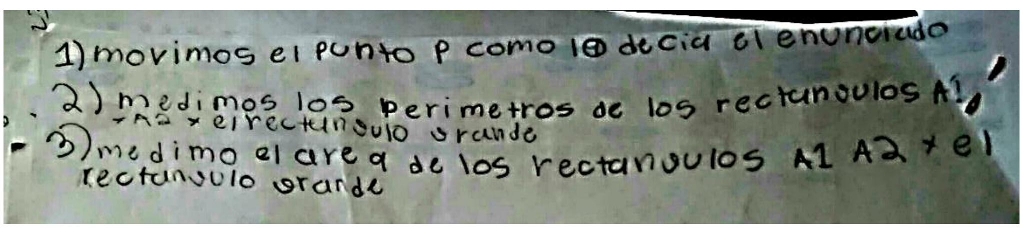


Figura 60. Ejemplo del uso de la estrategia irreflexivas: contesta "cualquier cosa", sin hacer alguna operación, situación problema 3.

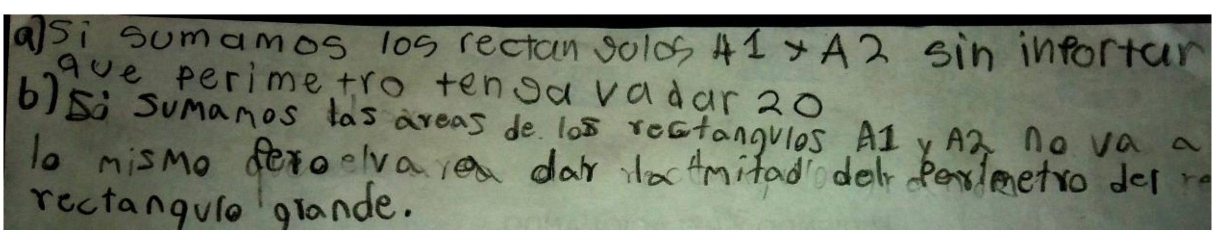


Figura 61. Ejemplo del uso de la estrategia metacognitiva con evaluación de los procedimientos utilizados, situación problema 3.

El estudiante 7 y el estudiante 28 (Sin evaluación de los procedimientos utilizados)

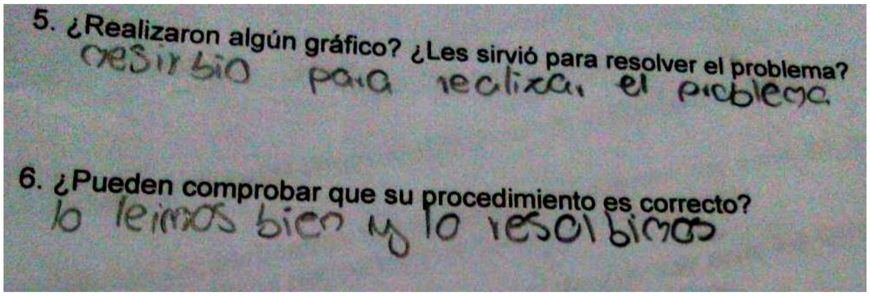


Figura 62. Ejemplo del uso de la estrategia metacognitiva sin evaluación de los procedimientos utilizados, situación problema 3.

Dentro de las respuestas encontradas, éstas son clasificadas como aproximadas correctas o incorrectas, obteniendo que el 51,36% fueron correctas, 27,02% aproximadas y 21,62% incorrectas. A continuación, se evidencian algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes.

El estudiante 19 y el estudiante 31 (Respuesta correcta esperada)

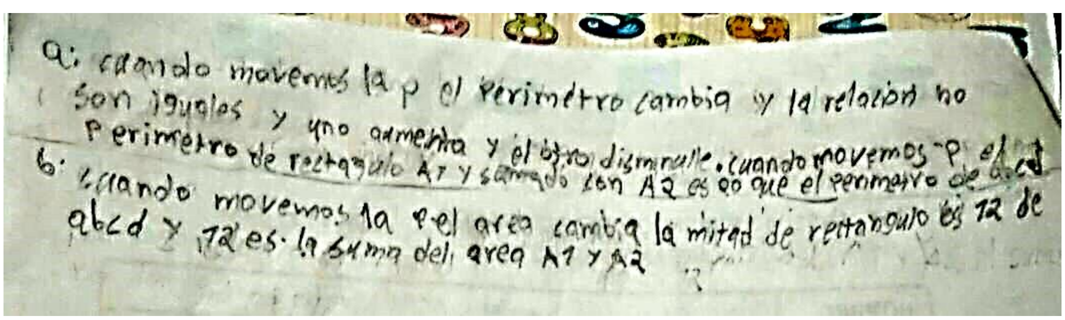
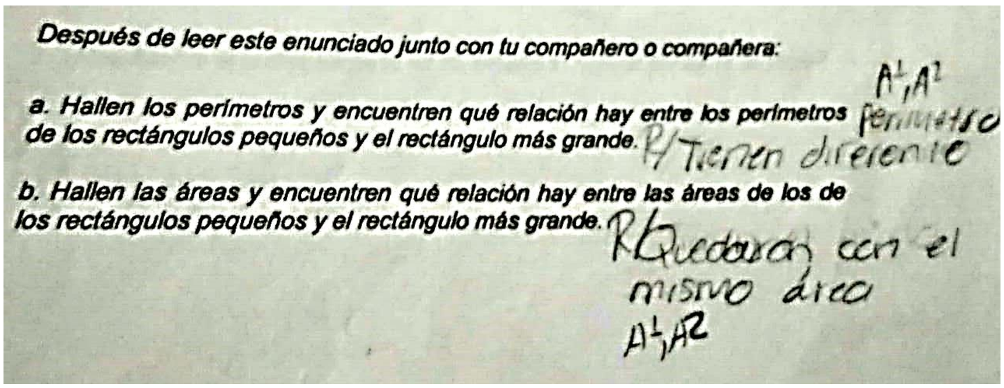


Figura 63. Ejemplo respuesta correcta esperada, situación problema 3.

El estudiante 9 y el estudiante 16 (Respuestas correctas aproximadas)



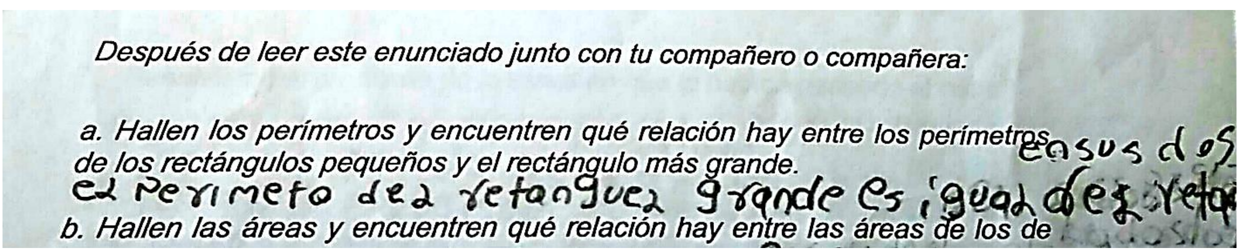
Después de leer este enunciado junto con tu compañero o compañera:

a. Hallen los perímetros y encuentren qué relación hay entre los perímetros de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande. R/ Tienen diferente perímetro A^1, A^2

b. Hallen las áreas y encuentren qué relación hay entre las áreas de los de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande. R/ Quedaron con el mismo área A^1, A^2

Figura 64. Ejemplo respuesta aproximada esperada, situación problema 3.

El estudiante 10 y el estudiante 20 (Respuestas incorrectas)



Después de leer este enunciado junto con tu compañero o compañera:

a. Hallen los perímetros y encuentren qué relación hay entre los perímetros de los rectángulos pequeños y el rectángulo más grande. en sus dos el perimeto del retangulo grande es igual del retan

b. Hallen las áreas y encuentren qué relación hay entre las áreas de los de

Figura 65. Ejemplo respuesta incorrecta, situación problema 3.

4.3.3.5. Comentarios finales de la situación problema 3

En la aplicación de la situación problema 3 se obtuvieron progresos significativos al incrementarse la cantidad de respuestas donde los estudiantes podían comparar perímetros y áreas de los rectángulos dados-para establecer relaciones entre éstos.

Otras conclusiones importantes son las siguientes:

- La mayoría de los estudiantes lograron establecer que la medida del perímetro del rectángulo ABCD es 20 y que dicha cantidad corresponde a la suma de las medidas de los perímetros de los rectángulos azul y lila. Así como también que la medida del área A es igual a 24, la cual corresponde a la mitad de la suma de las medidas de las áreas A1 y A2, es decir 12, pero solo cuando el punto P está en el centro del rectángulo ABCD. Esto gracias a las herramientas de distancia o longitud, área y arrastre con que cuenta el software GeoGebra.
- El uso de la computadora propició que todos los estudiantes justificaran sus respuestas en función del arrastre tal como se esperaba.
- En términos generales se puede decir que la aplicación de esta situación problema permitió un avance en el desarrollo de los pensamiento métrico y geométrico de los estudiantes, por ejemplo, les fue posible determinar un área fija y perímetros variables, pudieron establecer relaciones numéricas entre las medidas de las áreas y perímetros de las figuras geométricas dadas y estuvieron en capacidad de reconocer la independencia de las nociones tratadas.

Capítulo 5.

Conclusiones y sugerencias

5.1. Introducción

El planteamiento inicial de algunas preguntas de investigación, en torno a la caracterización del proceso general de resolución de problemas en los estudiantes de grado 5 en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra, propició el interés en implementar una serie de situaciones problema con la intención de encontrarles respuesta. Esos cuestionamientos se tornaron en el eje central de las actividades que aquí se han registrado. En este capítulo se da respuesta a los interrogantes que originaron el presente trabajo.

Además de dar respuesta a las preguntas de investigación, se proponen algunas sugerencias que pueden guiar tanto la enseñanza y aprendizaje como investigaciones sucesivas.

5.2. Respuestas a las preguntas de investigación

En el primer capítulo del presente trabajo (apartado 1.4) se mencionó la pregunta que guio la indagación, considerada como central, y tres más consideradas auxiliares o complementarias. A continuación, se da respuesta a cada una de ellas.

5.2.1. Respuesta a la pregunta central

La pregunta central es la siguiente:

¿Qué dimensiones de las etapas del proceso de resolución de problemas se evidencian en los estudiantes de grado 5° en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

Con relación a las dimensiones de las etapas del proceso de resolución de problemas planteadas por Polya y Schöenfeld (2002), a través de las situaciones planteadas se pueden establecer las siguientes observaciones:

A pesar de que casi el 50% de los estudiantes entendieron lo que se requería en los enunciados de las situaciones problemas propuestos, se evidencia que para la mayoría de educandos que participaron en su realización, es difícil llegar a una buena interpretación del enunciado del problema, es decir, que reconozcan los datos suministrados y requeridos para la solución de las mismas.

Se evidencia la carencia de un plan organizado para la solución de las situaciones problema, es decir, un abordaje sistemático que lleve a la identificación de las ideas esenciales que deben considerarse como parte de las estrategias, conduciéndoles a la solución de las mismas. Esto corresponde a que, durante la fase inicial los estudiantes no le dedican el tiempo suficiente al análisis de los elementos y las relaciones presentes en los enunciados de las situaciones problema.

En cuanto a la ejecución del plan, para la gran mayoría de los estudiantes no es difícil llevar a cabo acciones concebidas en la fase anterior hasta llegar a la solución. Aunque inicialmente el plan no está bien diseñado, su realización es viable, los conocimientos previos y la preparación necesaria les permiten ejecutarlo sin contratiempos. Para quienes tuvieron dificultades, les fue necesario regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para cambiarlo por completo, de manera que pudieran encontrar un camino que los condujera hacia la solución.

La visión retrospectiva al encontrar la solución o no, es tal vez la etapa más difícil para los estudiantes. Les resulta muy complejo justificar el contraste de sus resultados, sus razonamientos, examinar los caminos escogidos y usar el lenguaje matemático para expresar sus hallazgos.

Finalmente se reconoce que en el trabajo de los estudiantes utilizando el software GeoGebra se abordaron estrategias heurísticas importantes para la solución de las situaciones planteadas, tales como, el método de ensayo y error, el pensar en problemas más simples al iniciar el proceso de resolución y el relacionar con otros problemas conocidos.

5.2.2. Respuestas a las preguntas auxiliares de la investigación

Del interrogante principal se despliegan algunas preguntas auxiliares que a continuación se mencionan, incluyendo en cada una de ellas la respuesta correspondiente.

5.2.2.1. Respuesta a la primera pregunta auxiliar

¿Qué tipo de situaciones problema se deben diseñar de manera que permitan la descripción de las dimensiones que utilizan los estudiantes durante las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

Las situaciones problemas planteadas debían tener un nivel de complejidad que permitiera el desarrollo de las dimensiones requeridas en cada una de las etapas del proceso de resolución de problemas, además de una preparación del docente en cuanto al conocimiento didáctico del contenido que le permita abordar las nociones tratadas desde diferentes campos como la historia, la epistemología y la didáctica.

5.2.2.2. Respuesta a la segunda pregunta auxiliar

¿Cómo se deben implementar las situaciones problema diseñadas durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

Las situaciones problemas planteadas requieren de tiempos que permitan respetar los ritmos de aprendizaje de los estudiantes involucrados, para que les sea posible desarrollar las soluciones de manera eficiente. Por otro lado, esto le permitirá al docente observar de manera sistemática los procesos y progresos de cada uno de sus educandos en forma individual y colectiva.

5.2.2.3. Respuesta a la tercera pregunta auxiliar

¿Cuál es el desempeño de los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

El desempeño de los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra, evidencia un mayor interés en la búsqueda de la solución en cada una de las situaciones problemas planteadas y en la utilización de diversos recursos y estrategias en dicho proceso. Además de asumir un papel más activo en la construcción de sus saberes de manera individual y colectiva.

5.2.2.4. Respuesta a la cuarta pregunta auxiliar

¿Cuáles son las dimensiones que utilizan los estudiantes durante las etapas del proceso de resolución de problemas en el contexto de las nociones de área y perímetro de figuras geométricas con la mediación de GeoGebra?

De acuerdo a los resultados del diagnóstico, se evidencia que los estudiantes usan de forma mínima algunos recursos para la obtención de sus respuestas en ambientes de lápiz y papel, pero durante el proceso de solución de problemas con la mediación de GeoGebra emerge la utilización de algunos de ellos como el uso los pre saberes en contextos de la vida real y desde las Matemáticas, el uso de algunos razonamientos como que existan figuras geométricas con igual área y diferente perímetro o viceversa y el uso de gráficos que se pueden arrastrar para esbozar las posibles soluciones, lo cual se dificulta en los ambientes tradicionales.

La mayoría de los grupos de estudiantes elaboran construcciones de tipo euclidiano, lo que les permite conservar las propiedades geométricas de las figuras construidas. Solo unos pocos las realizan "a simple vista" de acuerdo a lo que se muestra en la pantalla, es decir, generan construcciones optimales, que se acercan tanto como desean a aquellas figuras geométricas que quieren representar.

En conclusión, los factores mencionados en el párrafo anterior impactan de manera significativa el desempeño de los estudiantes, particularmente el uso de recursos durante la búsqueda de la solución de las situaciones problema, les permiten desarrollar habilidades en dicho proceso.

En cuanto a las estrategias que utilizaron los estudiantes durante este estudio, es posible afirmar que:

La mayoría de los participantes son capaces de usar estrategias heurísticas como la estimación, el método de ensayo y error, el relacionar la situación problema dada con otros problemas conocidos, pensar en problemas más simples y otra adicional, el arrastre. Dichas estrategias surgen con el uso de GeoGebra, puesto que como se observa durante la prueba diagnóstica (en ambientes de lápiz y papel) no les es posible pensar en estrategias que los conduzcan a la solución del problema planteado.

Todos los estudiantes utilizan el programa GeoGebra, para realizar sus gráficos y/o para el uso del menú que permite tomar de medidas, se puede afirmar que la utilización de diferentes registros de representación influye determinantemente en el éxito de la resolución de problemas que involucran las nociones de área y perímetro.

Los estudiantes no utilizan registros como tablas que permitan una visualización más amplia de la situación planteada, ni la descomposición y composición de figuras y de forma mínima el uso de fórmulas.

El uso de los sistemas de geometría dinámica, como lo manifiesta Santos Trigo (1997), es una excelente opción para la solución de situaciones problema que involucran nociones de geometría, en particular GeoGebra, le permite a los estudiantes corregir sus concepciones erróneas, cuando originan construcciones que se pueden arrastrar mostrando propiedades que cambian o se conservan según el caso. Precisamente, los estudiantes pudieron determinar que existen figuras con igual área y diferente perímetro o viceversa, posibilitándoles identificar la independencia de dichas nociones.

Considerando lo expresado por Schöenfeld (1992) y según lo observado durante la implementación de las situaciones problema planteadas, la metacognición juega un papel relevante en el aprendizaje de las matemáticas ya que permite a los estudiantes establecer de manera ordenada la resolución de un problema y realizar un proceso de reflexión tanto al momento de seleccionar las estrategias, como al momento de identificar los errores cometidos y los aciertos para tenerlos en cuenta en la resolución de problemas posteriores.

Se puede observar que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para verbalizar y/o escribir los procesos cuando resuelven las situaciones problema. Y cuando lo hacen carecen de lenguaje matemático para justificar sus procesos, muy pocos de ellos monitorean el curso de las acciones que realizan en sus intentos de solución. Les es casi imposible describir conceptualmente las tareas “generales" que realizan al pasar por cada una de los instantes del proceso, el lenguaje utilizado en la gran mayoría de los casos es propio de la lengua materna.

5.3. Conclusiones de orden didáctico

Después del análisis de la prueba diagnóstica con los estudiantes del grado 5 – 5 se vio la necesidad de diseñar actividades de aprendizaje auxiliares donde se incorporaron el uso de unidades de medida antropométricas y convencionales, así como el uso de material concreto, que les permitiera a los estudiantes diferenciar las nociones de área y perímetro, ante de llegar al uso de fórmulas para encontrar sus medidas en figuras geométricas. Lo que se considera importante tener en cuenta para próximos estudios.

Otro aspecto que surgió durante las intervenciones en el aula fue el trabajo colaborativo, donde los estudiantes de acuerdo a sus dificultades o habilidades establecieron roles que les permitieron llegar a acuerdos, hacer inferencias, comparaciones y conclusiones sobre el trabajo desarrollado. La docente se torna de esta manera en una orientadora y el protagonismo de la clase queda en manos de los estudiantes al construir sus propios saberes.

En cuanto la competencia de "resolución" que evalúa la prueba Saber en el grado 5, es posible observar que los estudiantes mejoraron notablemente en el uso de recursos, las estrategias heurísticas y de las estrategias metacognitivas, con el desarrollo de las actividades que implementan el uso del software GeoGebra, el cual permite visualizar la variación o la conservación de las medidas de área y perímetro de las figuras geométricas y sus propiedades. Además, gracias al uso de herramientas como el arrastre es posible que los estudiantes formulen y verifiquen conjeturas. La competencia de "comunicación" evaluada por la misma prueba requiere según los hallazgos, de mayor número de actividades en el aula que les permitan a los estudiantes desarrollar habilidades para la expresión de sus ideas.

El desarrollo de actividades de este tipo requiere que los docentes estén dispuestos a asignar espacios de tiempo, tanto para el diseño de las actividades acordes a las necesidades de los estudiantes, como para el desarrollo de las mismas, esto incluye considerar aspectos como destinar el tiempo necesario para llevar a cabo las actividades solicitadas y desarrollar el proceso de aprendizaje, convenir los tiempos para el uso de los recursos logísticos, tener en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje, entre otros.

El uso de GeoGebra durante la planeación de las actividades permite a los docentes mejorar las prácticas de aula, en tanto que los estudiantes se involucran cognoscitiva y activamente en las actividades planeadas y orientadas al aprendizaje, a través de la interacción entre ellos; la realización de preguntas, respuestas, acciones, reacciones, propuestas y creaciones. De esta manera los aprendizajes que se generan en los estudiantes resultan ser más significativos. Finalmente, el trabajo con los SGD permite a los estudiantes ver la evaluación como parte de su proceso de aprendizaje y no como un juicio de valor que busca calificarlos.

5.4. Sugerencias para la enseñanza de área y perímetro

Como resultado del presente trabajo, se derivan las siguientes sugerencias para la instrucción, y entre las cuales se mencionan las siguientes:

a) El profesor de matemáticas debe ser consciente que los pensamientos métrico y geométrico de los estudiantes están guiados por creencias y esquemas mentales, lo cual en ocasiones se constituye en un obstáculo epistemológico que requiere de acciones concretas en el aula para poder mejorarlas.

b) Es necesario realizar diagnósticos de los estudiantes que permitan tomar decisiones de cómo abordar las nociones implicadas con un manejo adecuado del conocimiento didáctico del contenido, como lo manifiestan Pinto & González, (2008).

c) Se recomienda la utilización de Geogebra por varias razones: en primer lugar, dicho software es gratuito y de fácil manejo tanto para docentes como estudiantes; en segunda instancia el potencial que tiene al visualizar la variación de medidas y la conservación de propiedades geométricas; y en tercer lugar la capacidad de mostrar diversos registros de representación.

d) Se sugiere la utilización de otro tipo de recursos didácticos manipulables como el geoplano, el tangram, etc. que pueden complementar las actividades planeadas con SGD.

e) Implementar una metodología similar a la que se reporta en el presente trabajo que implica el diagnóstico, la aplicación situaciones problema con el apoyo de tecnología, y la dinámica establecida al interior de la clase (trabajo individual, en equipos, socialización de saberes y resultados y la institucionalización de la actividad).

5.5. Sugerencias para posteriores trabajos

Durante el desarrollo del presente trabajo surgieron algunas interrogantes que no están al alcance del mismo y, por lo tanto, se sugiere darles continuidad en posteriores estudios. Entre las preguntas se encuentran las siguientes:

¿Qué resultados se obtienen durante el proceso de resolución de problemas con los estudiantes de grado 5 si además de SGD se incorpora el uso de material concreto como el tangram y el geoplano, entre otros?

¿Qué papel juegan los SGD en el sistema de creencias de los estudiantes?

¿Por qué los estudiantes consideran los SGD como una herramienta al momento de justificar sus procedimientos de resolución de problemas?

¿Qué resultados se obtienen si se aplican las actividades aquí propuestas en el nivel de básica secundaria?

¿Cómo se promueve la construcción de conocimiento matemático nuevo en los estudiantes bajo la visión de la resolución de problemas?

¿Cómo se transforman las relaciones en el aula de clase cuando se trabaja desde la perspectiva de resolución de problemas con la mediación de un SGD?

Referencias bibliográficas

Alcaldía de Cali. (2015). *Educación Digital para Todos – Tit@.* Recuperado de http://www.cali.gov.co/educación/publicaciones/109725/tit_educación_digital_para_todos_información_básica_del_proyecto/

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas el trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1* (1), p. 1-9.

Barroso, R. y Gavilán, J. (2003). Resolución de problemas de geometría con Cabri II. En *Sociedad Española de Investigación en Investigación Matemática*, *54*, p. 23-30.

Chamorro, M. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Revista 1*(3), p. 31-53.

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las Matemáticas para primaria*. Madrid: Editorial Pearson Prentice Hall.

Cortés, M., & Galindo, N. (2007). *El modelo de Polya centrado en resolución de problemas en la interpretación y manejo de la integral definida.* Tesis de maestría. Universidad de la Salle, Bogotá, Colombia.

Del Olmo, M.; Moreno, M & Gil, C (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Editorial Síntesis.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

García, B., Coronado, A. y Giraldo, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas*. Florencia, Colombia: Universidad de la Amazonia.

García J. (1999). *La Didáctica de las Matemáticas: una visión general*. Gobierno de Canarias. España. Recuperado de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm#inicio

Godino, J., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Roa, R. & Ruiz, F. (2004*). Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, Granada, España.

González, M. (2001). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica*. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Universidad de Granada, Granada, España. P. 277-290. Recuperado de https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF

Juídias, B. & Rodríguez, O. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, *342*, p. 257-286.

López, L. & Suárez N. (2010). *Trabajando los conceptos de área y perímetro con actividades didácticas en alumnos de cuarto grado de primaria.* Tesis de maestría**.** Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, D.C.

MEN (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares: áreas obligatorias y fundamentales*. Santafé de Bogotá: Punto EXE Editores.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Cundinamarca. Bogotá, D.C.

MEN. (2016). *Cuadernillo del estudiante Grado 4 Módulo 123.* Textos del Programa Todos a Aprender construidos en el marco del convenio PREST Póle regional pour l´einsegnement de la science et de la technologie, Ministerio de Educación Nacional y Universidad de los Andes.

MEN. (2016). *Cuadernillo del estudiante Grado 5 Módulo 123.* Textos del Programa Todos a Aprender construidos en el marco del convenio PREST Póle regional pour l´einsegnement de la science et de la technologie, Ministerio de Educación Nacional y Universidad de los Andes.

MEN (2017). *Informe nacional de resultados Colombia en PISA 2015*. Bogotá D.C. ICFES

MEN. (2017). *"Todos a aprender": Programa para la Transformación de la Calidad Educativa.* Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-299245_recurso_1.pdf

Mieles, M. (2012, enero a diciembre). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

Escenario. Recuperado de http://ojs.uac.edu.co/index.php/escenarios/article/viewFile/214/198

Moreno, L. (2002). *Ideas geométricas en el curriculum presentadas mediante el Cabri Géomètre.* En: Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias. Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica y Media de Colombia. Santafé de Bogotá: Enlace Editores.

Obregón, M., & Rodríguez, B. (2005). *Estrategias de resolución de problemas de área y perímetro en ambientes de geometría dinámica en estudiantes de educación básica.* Tesis de licenciatura. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pabón, O. (2002). *Resolución de problemas geométricos en el ambiente de geometría Cabri por profesores de matemáticas en formación. En Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas.* Bogotá D.C: Enlace editores.

Pabón, O. (2007). *Resolución de problemas matemáticos y estrategias heurísticas: del lápiz y papel a los Ambientes de Geometría Dinámica.* Tesis de maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pérez, A. (1992). Matemáticas experimentales. Suma*. Revista sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, *11*, p. 27-41.

Pérez, Y. & Ramírez, R. (2016). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35* (73), p.169 - 194. Recuperado de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009

Pifarré, M. & Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(2), p. 297-308.

Pinto, J. & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática*, *20*(3), p. 83-100. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262008000300005&script=sci_arttext&tlng=pt

Piscoya, L. (2004). Pruebas Pisa: Niveles de desempeño y construcción de preguntas. *Revista Educación, 1,* (2), p. 21 - 34. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/publicaciones/educacion/n2_2004/03.pdf

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Editorial Comares.

Rico, L., Segovia, I., & González, M. J. (2000). Representación y resolución de problemas geométricos por profesores de matemáticas en formación. *Educación Matemática*, *12(2),* p. 5-26.

Santos, L. (1997). *Hacia un modelo de análisis de la resolución de problemas.* En *Principios y métodos de en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana S.A.

Santos, L. (2008). *La resolución de problemas matemáticos*: *Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica*. Cinvestav – IPN.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., & Pérez, M. D. L. L. C. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta Edición). México: Mcgraw-hill.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P. & Álvarez, E. (2001). La Educación Matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación,* p. 1-11. Recuperado de http://rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF

Anexo 1

Prueba diagnóstica

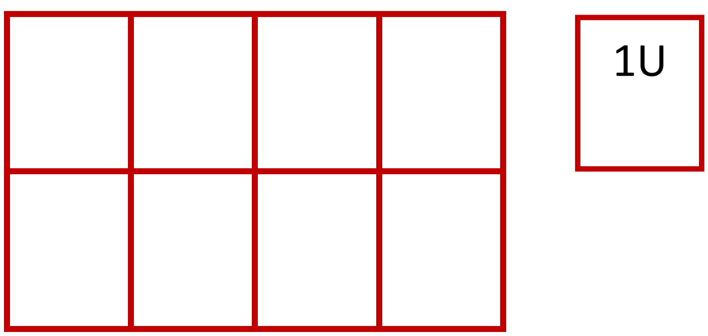
INSTITUCIÓN EDUCATIVA CARLOS HOLMES TRUJILLO

GRADO: 5

NOMBRE: ______________________________

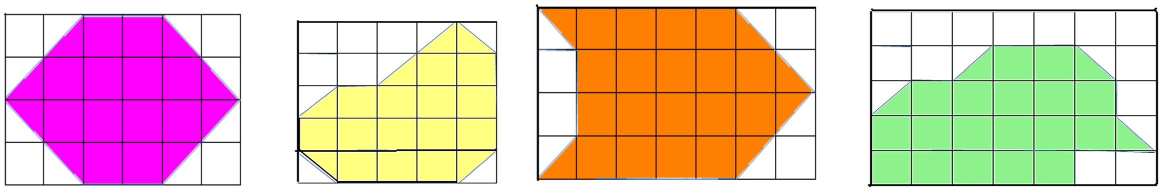
PRUEBA DIAGNÓSTICA

1) ¿Cuántos cuadrados de 1U tienen la siguiente figura?



a) 4 U
b) 12 U
c) 8 U

2) ¿Cuál de las figuras sombreadas tiene un mayor número de triángulos como este  ?



A) B) C) D)

Describe cómo obtuviste la respuesta: ____

____

____

3) El área de un polígono es:

a) La medida de su contorno.

b) Una fórmula.

c) La medida de su superficie.

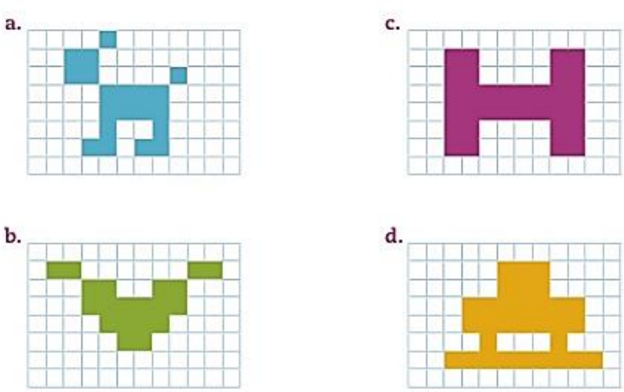
4) El perímetro de un polígono es:

a) El volumen del polígono

b) La medida de su contorno.

c) La forma del polígono.

5) ¿Cuando, comparas las siguientes figuras, qué se puede decir de su perímetro?



a) Todos son diferentes.
b) Es mayor la del conejo.
c) Todas son iguales.

6) Mira las figuras y completa la tabla. Para el perímetro, toma como unidad el lado de los cuadrados de la cuadrícula, y para el área, considera los cuadrados que ocupa la figura:

.

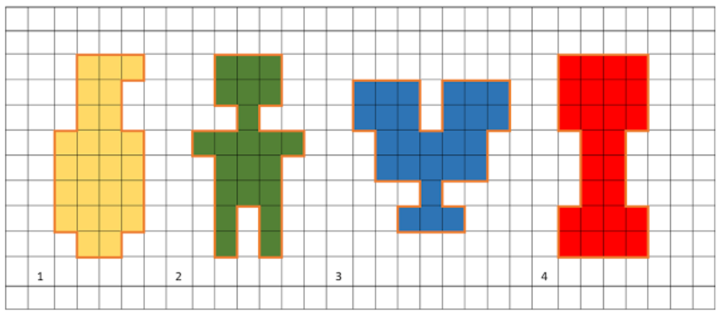


Figura	Perímetro	Área
1	____ lados	____ cuadritos
2	____ lados	____ cuadritos
3	____ lados	____ cuadritos
4	____ lados	____ cuadritos

7) Compara y responde de acuerdo a las respuestas de la tabla:

a) ¿Cuáles tienen igual perímetro? ¿Sus áreas son iguales?

____

____

b) ¿Cuáles tienen igual área? ¿Sus perímetros son iguales?

____

____

c) ¿Se cumple que la figura de menor perímetro es la de menor área? ____

____

8) ¿Con cuál de las siguientes fórmulas se calcula el área del cuadrado?

a) $A = \frac{(base\ x\ altura)}{2}$
b) $A = lado\ x\ lado$
c) $A = \frac{((base\ mayor + base\ menor)\ x\ altura)}{2}$

9) ¿Con cuál de las siguientes fórmulas se calcula el área del triángulo?

a) $A = \frac{((base\ mayor + base\ menor)\ x\ altura)}{2}$
b) $A = \frac{(base\ x\ altura)}{2}$
c) $A = lado\ x\ lado$

10) ¿Luego de contestar las anteriores preguntas puedes sacar alguna(s) conclusión(es)?
____
____
____
____
____

Anexo 2

Rejilla para valorar el proceso y los resultados de la prueba diagnóstica.

✓ Cumple ✓ Cumple parcialmente ✓ No cumple

COMPETENCIA MATEMÁTICA	ASPECTOS DESARROLLO HUMANO	COMPETENCIA	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIOTORES	TAREAS	ESTUDIANTES																			
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS	*METACOGNITVO*	*ARGUMENTAR*	*Codificar – Descodificar*	Diferencia el perímetro y el área de figuras geométricas.	*7*	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
				Utiliza unidades de medida para expresar el perímetro y el área de figuras geométricas.	*1, 2, 5, 6*	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Conceptualiza las nociones de área y perímetro.	Generaliza información sobre las nociones de área y perímetro o sus elementos esenciales.	Reconoce las expresiones que le permiten determinar el área de figuras geométricas.
3, 4	***10***	***8, 9***
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓
✓	✓	✓

✓ Cumple ✓ Cumple parcialmente ✓ No cumple

COMPETENCIA MATEMÁTICA		PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS		
ASPECTOS DESARROLLO HUMANO		COGNITIVO – AFECTIVO – TENDENCIA DE ACCIÓN – METACOGNITVO		
COMPETENCIAS		DESCRIBIR - ARGUMENTAR – RAZONAR - ARGUMENTAR		
PROCESOS		*Describir e interpretar – Comunicar – Argumentar – Codificar - Descodificar*		
INDICADORES O DESCRIOTORES		Diferencia el perímetro y el área de figuras geométricas	Utiliza unidades de medida para expresar el perímetro y el área de figuras geométricas.	Reconoce las expresiones que le permiten determinar el área de figuras geométricas.
	TAREAS	***7***	***1 , 2 , 5 , 6***	***8 , 9***
21	ESTUDIANTES	✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
22		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ No cumple
23		✓ No cumple	✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente
24		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ No cumple
25		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ No cumple
26		✓ Cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ No cumple
27		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
28		✓ No cumple	✓ No cumple	✓ No cumple
29		✓ No cumple	✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente
30		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple
31		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
32		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple
33		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
34		✓ Cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
35		✓ No cumple	✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente
36		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
37		✓ No cumple	✓ Cumple parcialmente	✓ Cumple parcialmente
38				

				Generaliza información sobre las nociones de área y perímetro o sus elementos esenciales.	***10***	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
				Conceptualiza las nociones de área y perímetro.	***3, 4***	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Anexo 3

Situaciones problema

ACLARACIONES MATEMÁTICAS

En Midiendo y Relacionando Áreas y Perímetros podrás aprender algunos aspectos relacionados con el área y el perímetro de las figuras geométricas:

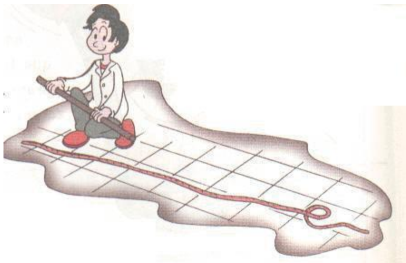
Comparar los tamaños de las superficies y contornos de diferentes figuras, te ayudará a entender mejor las nociones de área y perímetro.

Contrastar los tamaños de las superficies y contornos de diferentes figuras, observando y midiendo figuras de diferentes formas, te llevará a comprender algunos aspectos de las nociones de área y perímetro.

Componer y descomponer diferentes cuadriláteros te permitirá entender la distinta naturaleza de las unidades de medida de los contornos y superficies de las figuras.

Manejar el Software GeoGebra te dará la posibilidad de explorar algunas relaciones que se presentan con el área y el perímetro de diferentes figuras.

PARA TENER EN CUENTA



Tu puedes establecer la medida del área y el perímetro de superficies de diferentes maneras. Para ello puedes usar palabras - como largo, corto, ancho, angosto - para dar una descripción general de su tamaño. Cuando quieres ser más específico puedes usar números y unidades de medida -por ejemplo, centímetros, metros, metros cuadrados, entre otras.

Las preguntas que involucran la medida de los contornos y superficies de diferentes figuras, te permitirán aclarar algunas ideas sobre las relaciones entre éstas dos nociones: área y perímetro.

MIDIENDO Y RELACIONANDO

ÁREAS Y PERÍMETROS

NOMBRE:	
GRADO:	
FECHA:	

SITUACIÓN PROBLEMA 1

Lee cuidadosamente el enunciado del problema:

Dos pinturas de un gran artista están en la colección de un museo de arte contemporáneo. Una tiene forma cuadrada y la otra forma rectangular, cada una tiene un perímetro de 240 cm. Para proteger las dos obras mientras las transportan, el administrador del museo tiene que envolverlas en empaques plásticos de burbujas que las protejan. El administrador necesita saber los tamaños de las obras para lograr su objetivo.

Encuentra las medidas de cada pintura teniendo en cuenta que el área de la pintura rectangular es muy similar al área de la pintura cuadrada[10].

[10] Tomado y adaptado de PREST (2016). Cuadernillo del estudiante Grado 5 Módulo 123, p. 84.

Luego de haber leído la situación problema contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Explica con tus propias palabras de qué se trata el problema?

2. ¿Qué ideas se te ocurren para resolver este problema?

3. ¿Cuál o cuáles conceptos de matemáticas podrías usar para resolver este problema: unidades de medida, suma, resta, área, multiplicación, división, perímetro, líneas paralelas, líneas perpendiculares? Explica cómo los usarías.

4. Ahora resuelve la situación problema usando el software GeoGebra, también puedes usar la parte trasera de la hoja para realizar anotaciones y describir con detalle cada paso que realizaste.

5. ¿Realizaste algún gráfico? ¿El gráfico te sirvió para resolver el problema?

6. ¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo

7. ¿Resolviste el problema de la forma en que lo habías pensado al inicio?

MIDIENDO Y RELACIONANDO

ÁREAS Y PERÍMETROS

NOMBRE:	
GRADO:	
FECHA:	

SITUACIÓN PROBLEMA 2

Lee cuidadosamente el enunciado del problema:

Juliana después de mucho pensarlo ha decidido reformar el jardín de su finca. Ella desea tener flores nuevas que llenen su vida de color. Para ello, ha decidido distribuirlo en tres partes con forma de rectángulos de diferentes tamaños. Juliana sabe que tiene suficiente tierra para cubrir 72 m^2 de terreno en cada uno de ellos. Ayúdale a Juliana a dibujar las tres partes del jardín y encuentra las medidas de sus perímetros de manera que pueda cercarlos con alambre y así evitar que dañen sus flores.[11]

[11] Tomado y adaptado de PREST (2016). Cuadernillo del estudiante Grado 4 Módulo 123, p. 126.

Luego de haber leído la situación problema contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Explica con tus propias palabras de qué se trata el problema?

2. ¿Qué ideas se te ocurren para resolver este problema?

3. ¿Cuál o cuáles conceptos de matemáticas podrías usar para resolver este problema: unidades de medida, suma, resta, área, multiplicación, división, perímetro, líneas paralelas, líneas perpendiculares? Explica cómo los usarías.

4. Ahora resuelve la situación problema usando el software GeoGebra, también puedes usar la parte trasera de la hoja para realizar anotaciones y describir con detalle cada paso que realizaste.

5. ¿Realizaste algún gráfico? ¿El gráfico te sirvió para resolver el problema?

6. ¿Puedes comprobar que tu procedimiento es correcto? Explica cómo

7. ¿Resolviste el problema de la forma en que lo habías pensado al inicio?

MIDIENDO Y RELACIONANDO

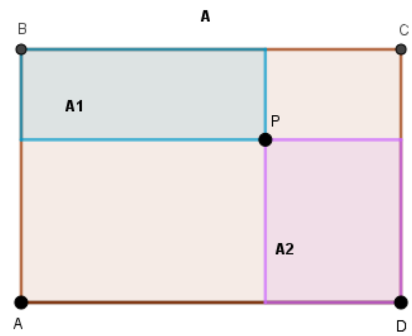
ÁREAS Y PERÍMETROS

NOMBRE:	
GRADO:	
FECHA:	

Lean cuidadosamente el enunciado del problema:

SITUACIÓN PROBLEMA 3

*En la interfaz de GeoGebra pueden ver un rectángulo ABCD que tiene un área **A** y un punto **P** en su interior sobre una de sus diagonales. Si por P se trazan rectas paralelas a cada uno de los lados del rectángulo ABCD y se forman en su interior dos nuevos rectángulos con áreas **A1** y **A2**, donde los rectángulos son de diferente tamaño. Muevan el punto **P** y observen sucede.*



Después de leer este enunciado junto con tu compañero o compañera:

a. Hallen los perímetros y encuentren qué relación hay entre los perímetros de los triángulos pequeños y el triángulo más grande.
b. Hallen las áreas y encuentren qué relación hay entre las áreas de los triángulos pequeños y el triángulo más grande.[12]

[12] Tomado y adaptado de Duval (2004), p. 165.

Luego de haber realizado estos cálculos contesten las siguientes preguntas:

1. ¿Expliquen con sus propias palabras de qué se trata el problema?

2. ¿Qué ideas se les ocurren para resolver este problema?

3. ¿Cuál o cuáles conceptos de matemáticas podrían usar para resolver este problema: unidades de medida, suma, resta, área, multiplicación, división, perímetro, líneas paralelas, líneas perpendiculares, líneas paralelas? Expliquen cómo las usarían.

4. Ahora resuelvan la situación problema usando el software GeoGebra, también pueden usar la parte trasera de la hoja para realizar anotaciones y describir con detalle cada paso que realizaron.

5. ¿Realizaron algún gráfico? ¿Les sirvió para resolver el problema?

6. ¿Pueden comprobar que su procedimiento es correcto?

7. ¿Resolvieron el problema de la forma en que lo habían pensado al inicio?

Anexo 4

Hoja para la recolección de la información

Nombre(s): ____

Fecha: ___________________________ **Tiempo:** _________

Problema: _____________________________________

Herramientas disponibles:

Enunciado del problema

PC con el software GeoGebra.

Papel y lápiz

Entendimiento del enunciado:

☐ Problema entendido rápidamente.

Evidencia: ____

Dificultad con:		
		Relación entre perímetro fijo y área variable.
		Relación entre área fija y perímetro variable
		Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar
		Entiende la pregunta, pero no expresa los conceptos y ni las operaciones a utilizar.
		Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la pregunta.
		Otro:

Tabla 7. Entendimiento del enunciado, hoja de recolección de la información.

Preguntas, tipos de ayuda y comentarios: _______________________________

Estrategias:

Uso de unidades de medida		Siempre		Algunas veces		Con Ayuda		Nunca
Estimación		Usado inicialmente		Exclusivamente		Algunas veces		
Método de Ensayo y error		Usado inicialmente		Exclusivamente		Algunas veces		
Uso de gráficos		Siempre		Algunas veces		Con Ayuda		Nunca
		Lo guiaron a la solución		Con ayuda		Sin ayuda		
Figuras geométricas utilizadas		Regulares		Irregulares				
Relacionar con otros problemas conocidos		Usado Inicialmente		Exclusivamente				
Pensar en problemas más simples		Usado Inicialmente		Exclusivamente		Algunas veces		
		Lo guiaron a la solución		Con ayuda		Sin ayuda		
Otra		Usado Inicialmente		Exclusivamente		Algunas veces		
		Lo guiaron a la solución		Con ayuda		Sin ayuda		
Solución		Sin expresar		Parcialmente correcta.		Correcta		Incorrecta
Estrategias irreflexivas		Adivina la operación o fórmula y realiza operaciones mecánicamente		Contesta “cualquier cosa”, sin hacer alguna operación.		Borra las operaciones que realiza.		
Justificación		Sin justificar		Justificación usando términos del lenguaje matemático.		Justificación usando términos del lenguaje natural.		
Uso Geogebra		Inicialmente		Exclusivamente		Algunas veces		
		Lo guiaron a la solución		Con ayuda		Sin ayuda		
Uso Lápiz y papel		Inicialmente		Exclusivamente		Algunas veces		

Verificación de procedimientos		Sin evaluación de los procedimientos utilizados.		Con evaluación de los procedimientos utilizados, justificados a través del lenguaje matemático.		Con evaluación de los procedimientos utilizados, justificados a través del lenguaje natural .		

Tabla 8. Estrategias utilizadas por los estudiantes, hoja de recolección de la información.

Comentarios:

____
____
____
____