

**SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL ESTUDIO DE LAS GRÁFICAS  
CARTESIANAS QUE FAVORECE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO  
VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

**GISELA MURILLO JURADO**

**JOHANNA ORTIZ BRAVO**

**UNIVERSIDAD ICESI**

**ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**

**Cali, Junio 2017**

**SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL ESTUDIO DE LAS GRÁFICAS  
CARTESIANAS QUE FAVORECE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO  
VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

**GISELA MURILLO JURADO**

**JOHANNA ORTIZ BRAVO**

Proyecto de investigación presentado como requisito para optar el título de  
Magister en Educación

**Director de Tesis:**

**HENRY ARLEY TAQUEZ QUENGUAN**

**UNIVERSIDAD ICESI  
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**

**Cali, Junio 2017**

## **AGRADECIMIENTOS**

Primeramente, damos gracias a Dios porque permitió que viviéramos esta experiencia enriquecedora desde todos las áreas de la vida. Además, nos dió las fuerzas y las palabras precisas en los momentos donde el ánimo decaía.

En segundo lugar agradecemos a aquellas personas que fueron esos pilares que nos acompañaron en estos dos años:

A Luis Carlos Vallejo y Rafael Andrés Uribe, nuestros esposos por su apoyo incondicional.

A Oswaldo Murillo y Luciele Jurado, Norberto Ortiz y Gloria Bravo, nuestro padres por sus palabras de amor y aliento en la conquista de este logro.

A Luis David Vallejo y Maria José Uribe por todos los momentos en que mami no estuvo presente, debido a que tenía que cumplir con los deberes adquiridos.

A nuestros familiares y amigos que de una u otra forma estuvieron presentes en este caminar.

A Bernardo García Quiroga y Freddy Asprilla, nuestros maestros en didácticas de la Matemática, por sus orientaciones y ese excelente ambiente entre colegas preocupados por la educación matemática de nuestros estudiantes.

A Henry Arley Taquez, nuestro director del trabajo de grado por conducir este proyecto a la meta.

## Tabla de Contenido

Introducción.....	10
1 Aspectos Generales De La Investigación .....	14
1.1 Presentación Del Problema .....	14
1.2 Justificación.....	20
1.3 Objetivos .....	22
Objetivo General .....	22
Objetivos Específicos .....	23
2 Marco Teórico .....	24
2.1 Estado Del Arte .....	24
Investigación sobre el pensamiento variacional y las gráficas cartesianas .....	24
Investigación sobre la competencia argumentar y las gráficas cartesianas.....	29
Investigación sobre el uso de las TIC en la Educación Matemática .....	31
Investigación sobre el desarrollo de competencias y el uso de Geogebra.....	33
Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las gráficas cartesianas.....	36
2.2 Fundamentos De Didácticas De Las Matemáticas.....	41
Modelo Teórico A Priori .....	41
Competencia Matemática Razonar y Argumentar .....	47
Secuencia Didáctica.....	49
Pensamiento Variacional .....	51
Registros Semióticos de Representación.....	53
Evaluación .....	59
Maestro Reflexivo .....	61
2.3 Perspectiva Disciplinar.....	62
Algo de Historia .....	62
Objeto Matemático .....	65
El Concepto de Función .....	66
2.4 Perspectiva Tecnológica.....	70
Uso de las TIC en la Educación .....	70
Las TIC en la Educación Matemática .....	73
Contexto .....	75
El Entorno Geogebra .....	77

3	Aplicación del modelo MTP .....	80
4	Marco Metodológico .....	87
4.1	Enfoque .....	87
4.2	Tipo de Investigación.....	87
4.3	Diseño de Investigación .....	88
4.4	Método de Estudio .....	89
4.5	Instrumentos de Recolección de Datos .....	89
	Secuencia didáctica (cuadernillo).....	89
	Grabaciones de audio .....	90
	Diario de campo .....	90
	Entrevista abierta y semiestructurada a los estudiantes.....	91
	Prueba Diagnóstica.....	91
	Prueba Final.....	92
4.6	Contexto de la Institución .....	92
4.7	Sujetos Participantes .....	93
5	Análisis de Resultados.....	94
5.1	Identificación de Necesidades.....	94
5.2	Diseño e Implementación de la Secuencia Didáctica .....	97
5.3	Evaluación de la Implementación de la Secuencia Didáctica .....	98
	Las TIC en la Secuencia Didáctica.....	98
	Gráficas Cartesianas .....	102
	Competencia Razonar y Argumentar .....	106
	Desempeño de los estudiantes .....	114
6	Conclusiones.....	122
7	Bibliografía.....	125

## Lista de Tablas

Tabla 1. Caracterización de la Pregunta N°25 Prueba Saber 9° Matemáticas 2014.....	15
Tabla 2. Procesos de la competencia de Argumentación.....	30
Tabla 3. Aspectos Locales y Globales en la Interpretación de una Grafica .....	37
Tabla 4. Tres Maneras de Ver las Gráficas Cartesianas .....	58
Tabla 5. Elementos Estructuradores de la Competencia Matemática Razonar y Argumentar .....	80
Tabla 6. Cronograma de las Sesiones de la Secuencia Didáctica.....	88
Tabla 7. Triangulación de la Información .....	94

## Lista de Figuras

Figura 1. Pregunta N°25 Prueba Saber 9° Matemáticas 2014.....	15
Figura 2. Modelo de Interacción de los Elementos del Pylvar .....	28
Figura 3. Niveles de Complejidad. ....	44
Figura 4. Modelo Teórico A Priori MTP .....	46
Figura 5. Representación Esquemática del Concepto de Función.....	63
Figura 6. Registros de Representación de una función lineal.....	67
Figura 7. Modelo TPACK .....	71
Figura 8. Pantallazo Situaciones de la Vida Diaria - Dependencia entre Dos Variables .....	83
Figura 9. Pantallazo Recorrido Sobre el Eje X.....	84
Figura 10. Pantallazo Explorando los Puntos en el Plano Cartesiano .....	84
Figura 11. Explorando la Gráfica de una Función con Comportamientos Lineales.....	85
Figura 12. Comparación Gráfica de Funciones con Comportamiento Lineal .....	86
Figura 13. Respuesta de la Pregunta 7. Prueba Diagnóstica.....	96
Figura 14. Respuesta de la pregunta 11. Prueba Diagnóstica.....	96
Figura 15. Grado de Dificultad en el Uso de Geogebra.....	100
Figura 16. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 4 .....	103
Figura 17. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 6 .....	103
Figura 18. Respuesta a la Pregunta 2 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 4 .....	104
Figura 19. Respuesta a la Pregunta 3 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 1 .....	105
Figura 20. Respuesta a la Pregunta 3 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 6 .....	105
Figura 21. Respuesta a la Pregunta 3 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 7 .....	106
Figura 22. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 1. Grupo 1 .....	107
Figura 23. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 1. Grupo 6 .....	107
Figura 24. Respuesta a la Pregunta 1 y 2 Perteneciente a la Tarea 2. Grupo 1 .....	108
Figura 25. Respuesta a la Pregunta 1 y 2 Perteneciente a la Tarea 2. Grupo 2 .....	108
Figura 26. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 3. Grupo 2 .....	109
Figura 27. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 3. Grupo 3 .....	110
Figura 28. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 3. Grupo 5 .....	110

Figura 29. Respuesta a la Pregunta 9 Pertenciente a la Tarea 4. Grupo 6 .....	111
Figura 30. Respuesta a la Pregunta 10 Pertenciente a la Tarea 4. Grupo 2 .....	111
Figura 31. Respuesta a la Pregunta 7 Pertenciente a la Tarea 6. Grupo 4 .....	113
Figura 32. Respuesta a la Pregunta 9 Pertenciente a la Tarea 6. Grupo 4 .....	114
Figura 33. Comparación Entre Prueba Diagnóstica y Final. Pregunta 7. ....	119
Figura 34. Comparación Entre Prueba Diagnóstica y Final. Pregunta 11. ....	120



## **Anexos**

Anexo A. Cuadernillo de Secuencia didáctica.....	129
Anexo B. Transcripción de Audios.....	140
Anexo C. Entrevista Semiestructurada a los estudiantes .....	158
Anexo D. Preguntas de la Prueba Diagnóstica .....	159
Anexo E. Preguntas de la Prueba Final.....	161
Anexo F. Carta de Consentimiento.....	163

## **Resumen**

Se presenta una propuesta innovadora que pretende dar protagonismo a elementos curriculares que han estado en el papel y que no han adquirido la trascendencia esperada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, se articulan el pensamiento variacional, la competencia matemática razonar y argumentar, la representación gráfica de funciones con comportamientos lineales y las TIC con el software Geogebra, a través de una secuencia didáctica. En este punto es significativo el aporte que da el modelo teórico a priori MTP, propuesto por García et al. (2015) ya que proporciona la ruta para alinear aquellos elementos y en este orden de ideas llevar a un nivel de concreción esta investigación. La formulación del problema se sustenta en el informe día “E” del año 2015 de las I.E. General Francisco de Paula Santander y Normal Superior Santiago de Cali. El trabajo de campo y el análisis se realizarán solo en una de las instituciones, no obstante, los resultados y las reflexiones fruto de esta intervención aspiran a impactar en ambas. Por otro lado, esta investigación adopta el enfoque cualitativo y a través del estudio de caso se implementa la secuencia didáctica: “Viajando por el mundo de las gráficas cartesianas” con jóvenes de grado octavo de la I.E. General Francisco de Paula Santander, con edades que oscilan entre los 13 y 15 años.

## **Abstract**

It presents an innovative proposal that pretends to give prominence to curricular elements that have been in the paper and that have not acquired the expected transcendence in the processes of teaching and learning of the mathematics. In this way is articulate, variational thinking,

mathematical competence reason and argue, graphical representation of functions with linear behaviors and ICT with Geogebra software through a didactic sequence. At this point, the contribution given by the a priori theoretical model MTP, proposed by García et al. (2015) since it provides the route to align those elements and in this order of ideas carry a level of concreteness to this investigation. The formulation of the problem is based on the "E" report for the year 2015 of the I.E. General Francisco de Paula Santander and Superior Normal Santiago de Cali. Fieldwork and analysis will be done only in one of the institutions, however, the results and reflections resulting from this intervention aspire to impact both. On the other hand, this research adopts the qualitative approach and through the case study the didactic sequence is implemented: "Traveling through the world of Cartesian graphics" with young people of eighth grade of the I.E. General Francisco de Paula Santander, with ages between 13 and 15 years.

## Introducción

La presente investigación tiene como propósito reconocer como el estudio de las gráficas cartesianas, a través de tareas en torno a los procesos de razonar y argumentar contribuye al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de las I.E. General Francisco de Paula Santander y Normal Superior Santiago de Cali. Para lograrlo se diseña una secuencia didáctica llamada “viajando por el mundo de las gráficas cartesianas” en la cual el uso del programa Geogebra juega un papel clave. La organización de este documento se hizo de la siguiente manera:

**Capítulo 1:** Se aborda la construcción de la problemática a partir de los resultados de las pruebas saber 2014 en ambas Instituciones Educativas. En este capítulo se incluye también la importancia de la Investigación y se definen los objetivos generales y específicos.

**Capítulo 2:** Contiene el marco teórico, el cual está conformado por el estado del arte y el marco conceptual. El primero tiene en cuenta las investigaciones que se vinculan con el objeto de interés y que han sido realizadas durante los últimos años. En el segundo se hace un acercamiento general a los elementos conceptuales en los cuales se enmarca el trabajo. Ambos constituyen la fundamentación teórica necesaria para llevar a cabo procesos de análisis y validez.

**Capítulo 3:** Se describe la manera de planificar y articular de forma armoniosa los elementos conceptuales desarrollados en el capítulo 2. Lo anterior se logra gracias un modelo denominado modelo teórico a priori MTP. Este modelo tiene en cuenta las tareas matemáticas, los procesos matemáticos, los niveles de complejidad y las expectativas de aprendizaje.

**Capítulo 4:** se presenta la metodología adoptada para realizar esta investigación. En este apartado se describe el enfoque, tipo y diseño metodológico utilizado. De igual manera se describen los instrumentos para la recolección de datos y los sujetos participantes, los cuales son estudiantes de grado octavo de la I.E. General Francisco de Paula Santander.

**Capítulo 5:** Se presentan los resultados obtenidos a través de la recolección de datos y el análisis realizado sobre los mismos.

**Capítulo 6:** Contiene las conclusiones a las que este estudio permite llegar de acuerdo a los objetivos planteados al inicio del proyecto y los resultados obtenidos. Así mismo, se plantean algunos interrogantes que el presente estudio permite dilucidar y que pueden ser un referente útil para próximas investigaciones en relación a la temática abordada.

## 1 Aspectos Generales De La Investigación

### 1.1 Presentación Del Problema

La propuesta curricular para el área de matemáticas que inició con los lineamientos curriculares (1998) y que el MEN fue fortaleciendo con documentos como los estándares de competencias (2006) y los procesos de evaluación externa de las instituciones educativas por parte del ICFES *prueba saber*, han consolidado un marco teórico que permite cimentar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Colombia. En efecto, el informe “día E” que detalla los resultados de las *pruebas saber* presentadas en el año 2014, enviado al siguiente año por el MEN a los establecimientos educativos adquiere protagonismo. En ese documento se encuentran los aprendizajes evaluados con el porcentaje de estudiantes que no contestaron correctamente cada pregunta. La finalidad de esta información es presentar a las instituciones educativas un resultado sobre los aprendizajes que se espera que los estudiantes alcancen al completar cada ciclo, se centra la atención en los aprendizajes con los porcentajes más altos, para que de esta manera se puedan incluir en los planes de mejoramiento metas más precisas y concretas.

El informe “día E” enviado a la I.E. General Francisco de Paula Santander, presenta la siguiente situación para el grado noveno, en el área de matemáticas, componente numérico-variacional y la competencia razonar y argumentar: “El 74% de los estudiantes no interpretan tendencias que se presentan en una situación de variación” (2015a). Para el caso de la I.E. Normal Superior Santiago de Cali: “El 64% de los estudiantes no interpretan tendencias que se presentan en una situación de variación” (2015 b)

La revisión de la prueba saber del grado noveno del año 2014, remite a la pregunta número 25, que fue identificada porque en la parte final del cuadernillo se encuentra la tabla de resultados. A continuación se presenta el ejemplo de la caracterización de esta pregunta en dicha tabla.

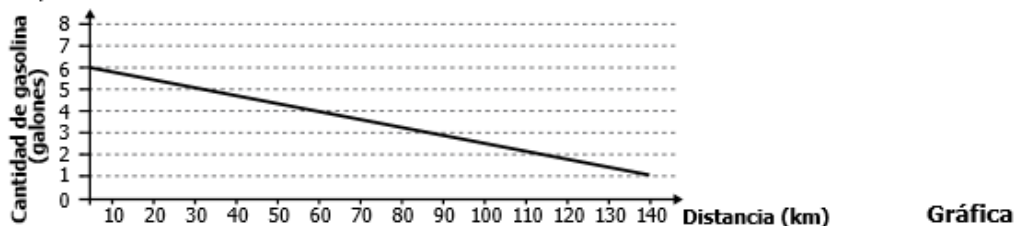
Tabla 1. *Caracterización de la Pregunta N°25 Prueba Saber 9° Matemáticas 2014*

Posición (N° de la pregunta)	Clave (Respuesta)	Componente (Pensamiento matemático)	Competencia	Afirmación (Indicador de desempeño)
25	A	Numérico – variacional	Razonamiento	Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación.

**Nota.** Fuente: Cuadernillo de prueba Saber del año 2014, en la parte final presenta un cuadro como el anterior con las 54 preguntas, que titula: "Claves de respuestas, Matemáticas 9°"

La presente figura corresponde a la pregunta número 25 del cuadernillo prueba saber 9° 2014

25. La gráfica representa la cantidad de galones de gasolina que tiene el tanque de un automóvil, cuando se desplaza entre dos ciudades.



El conductor afirma que el automóvil consumió en total 4 galones de gasolina en este desplazamiento. Esta afirmación es

- A. falsa, porque consumió 5 galones en total.
- B. falsa, porque consumió 1 galón en total.
- C. verdadera, porque inició su recorrido con 4 galones y terminó sin gasolina.
- D. verdadera, porque inició su recorrido con 5 galones y terminó con 1 galón.

*Figura 1. Pregunta N°25 Prueba Saber 9° Matemáticas 2014*

**Nota.** Fuente: Cuadernillo de prueba Saber Matemáticas 9° del año 2014.

En esta pregunta, se observa que a través de un gráfico lineal se representa la covariación entre la distancia recorrida por un automóvil entre dos ciudades y la cantidad de gasolina que tiene

en su tanque. Con este planteamiento y mediante una afirmación que describe la situación de variación, el estudiante debe razonar sobre el valor de verdad de cuatro proposiciones y además escoger la opción que tiene la justificación correcta.

Esta información corrobora las deficiencias en el aprendizaje de la variación y covariación en las dos I.E que se analizan. Por ello, es conveniente dirigir la mirada sobre el desarrollo del pensamiento variacional, en especial sobre esos procesos que aluden al cambio y a la identificación de magnitudes involucradas en un fenómeno de variación, a través del uso de las gráficas cartesianas.

Tradicionalmente, los programas educativos en Colombia movilizan el pensamiento variacional usando el concepto de función, sólo a partir del grado noveno. Esto es así por la distribución de los estándares en matemáticas. El siguiente estándar para el grado noveno en el pensamiento variacional justifica esta afirmación: “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas y analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales” (MEN, 2006, p. 87).

En la pregunta número 25, donde la gráfica representa el consumo de combustible cuando un automóvil se desplaza entre dos ciudades, se observa que el uso de la gráfica de una función dista del enfoque tradicional. El doctor Vasco, cuando caracterizó el camino para lograr el desarrollo del pensamiento variacional, es enfático en afirmar que el manejo dado a las funciones de manera tradicional en las aulas de clases no es el camino para lograr tal fin, no consiste en



dibujar y manejar las gráficas, tampoco es suficiente con saberse las gráficas de determinadas funciones (Vasco, 2003). Esta observación es pertinente porque el trabajo que se realiza alrededor del proceso de graficar, se ha centrado en clasificar la función a partir de la expresión algebraica y, por consiguiente, se ejecuta cada uno de los pasos que como por “arte de magia” permiten llegar al “dibujo de esa gráfica”. Para el caso de la función lineal, bastaba con identificar el intercepto con el eje “y” y mediante manipulación algebraica hallar otro punto y listo; luego, se localizan esos puntos en el plano cartesiano y al unirlos ¡Voilà! se ha graficado la función. En muchas ocasiones lo que se obtenía era un dibujo sin mayor significado que su equivalencia con la expresión algebraica, y con esto el estudiante ya había hecho la tarea. Lo mismo ocurría con las otras clases de funciones.

Este tratamiento estático, aleja del propósito de desarrollar el pensamiento variacional, lo obstaculiza, causa ruido, ya que no se puede reconocer, o mejor, como lo dice el doctor Vasco, no es posible captar qué varía, por qué varía y cómo varía. Lo anterior conlleva a que los estudiantes presenten dificultad a la hora de analizar o resolver problemas, donde las gráficas cartesianas sirven de soporte para representar la información de un fenómeno o una situación de la vida real. Hasta aquí se han definido dos cosas: el tipo de pensamiento (el variacional) y el objeto matemático (la función). Debe aclararse que de las funciones nos interesan las gráficas cartesianas con comportamiento lineal.

Es en este momento que toman voz las situaciones problemas que constituyen una secuencia didáctica, pues por medio de ellas se define el contexto social específico donde las matemáticas tienen aplicación. Estas actividades inducen al estudiante a que dé sentido a lo que

aprende, reconozca la importancia del lenguaje utilizado, represente de diferentes formas y sea capaz de razonar, argumentar y proponer soluciones a dichos problemas. El lugar otorgado al contexto en los procesos de enseñanza y aprendizaje es el que hace emerger la postura epistemológica del docente del área, ya que él, es el actor encargado de llevar toda la propuesta pedagógica a un nivel de concreción.

Concomitante con lo expuesto, está la postura de una matemática para la vida, una matemática para unos sujetos ubicados en un contexto cultural y social específico. De esta manera, es importante contar con una base epistemológica cercana a esta concepción de las matemáticas. Dentro de la literatura en Educación Matemática, D'Amore (2005) ha señalado dos posturas teóricas acerca de la naturaleza de las matemáticas: La realista y la Pragmática. En la realista, las matemáticas se consideran como un sistema de verdades absolutas, eternas y no modificables, que conducen a unas prácticas educativas de corte transmisionista. Mientras que en la perspectiva pragmática de las matemáticas, se tiene en cuenta el contexto, el uso y las circunstancias del conocimiento; el aprendizaje pasa a ser el foco de atención y por tanto, las actividades que se proponen en el aula se centran en el estudiante. Esta última, es la perspectiva en la que se inscribe este trabajo y es antagónica al modelo de transferencia cognitiva que subyace en la visión realista de las matemáticas.

Por otro lado, en las dos últimas décadas, se ha incrementado el uso de software educativo en la enseñanza de diversos conceptos matemáticos, debido a que el uso de nuevas tecnologías permite un mayor acceso a la representación múltiple de dichos conceptos. La tecnología y en este caso el software Geogebra, promueve la articulación entre diferentes representaciones, en el caso

de las funciones, permite explorar su comportamiento y características, gracias a las interacciones dinámicas que permite el instrumento. Del mismo modo, favorece procesos de visualización que llevan al estudiante a un nivel más complejo en el aprendizaje de las matemáticas. Es evidente tener en cuenta que la mera estrategia de añadir un computador y un software a las clases no va a generar por sí misma procesos de conceptualización matemática, pero sí, es menester del docente aprovechar este instrumento para transformar sus prácticas de enseñanza. Luego el plan es impactar la enseñanza y el aprendizaje de las representaciones gráficas, haciendo uso de nuevas tecnologías.

Esta propuesta, que responde a la problemática identificada en las I.E. General Francisco de Paula Santander y Normal Superior Santiago de Cali, espera incorporar desde el grado octavo una forma innovadora de abordar el trabajo de las funciones con comportamientos lineales. Para ello, se diseñará e implementará una secuencia didáctica que favorezca el desarrollo del pensamiento variacional, ligado al proceso de razonamiento y apoyado en el software educativo Geogebra. El trabajo de campo y el análisis que hacen parte de la presente investigación se realizará solo en una de las instituciones. No obstante, los resultados y las reflexiones fruto de esta intervención aspiran a impactar ambas instituciones, teniendo en cuenta dos cosas: Primero, ayudar a la sistematización de experiencias que favorezcan el desarrollo de procesos de pensamiento matemático usando TIC; segundo, transformar los planes de estudio dichas instituciones.

En síntesis, la pregunta de la investigación es la siguiente:

¿De qué manera una secuencia didáctica basada en el estudio de las gráficas cartesianas con comportamiento lineal, a través de tareas diseñadas en torno a los procesos razonar y argumentar,

y con la incorporación del software Geogebra promueve el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado octavo de la I.E. General Francisco de Paula Santander?

## **1.2 Justificación**

Las orientaciones curriculares para el área de Matemáticas dadas por el MEN (1998, 2006) están direccionadas al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en Colombia. Las pruebas saber se encuentran alineadas con esta propuesta y tienen como propósito contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación en Colombia (MEN, 2014). Con el presente trabajo de investigación se quiere trascender en el manejo de la información que arrojan estas pruebas y efectivamente encaminarnos en la ruta de planes de mejoramientos más contextualizados.

En el planteamiento del problema se expresa la necesidad de enfocar la atención en el desarrollo del pensamiento variacional y la competencia razonamiento y argumentación, lo cual se hace evidente en los resultados de las pruebas saber enviados en el año 2015 a las I.E. que participan en el proyecto, a través del informe “día E”. En este punto es significativo el aporte que da el modelo MTP, ya que es una propuesta que da voz en el proceso educativo a las competencias matemáticas. Provee de una ruta que permite efectivamente armonizar el desarrollo de una competencia, en este caso razonamiento y argumentación, con una propuesta de trabajo específica (García et al., 2015).

Este plan de trabajo inicia con una búsqueda bibliográfica tomando como referencia los dos elementos mencionados en el párrafo anterior. De esas pesquisas emergen dos pilares

esenciales para la fundamentación teórica de esta investigación. El primero es el contenido matemático que efectivamente proporciona un ambiente apto para el desarrollo del pensamiento variacional y el segundo elemento que se hace presente es las TIC a través del software educativo Geogebra.

El concepto de función sirve para representar múltiples fenómenos sociales y naturales permitiendo explicar, predecir y de alguna manera controlar el comportamiento de dichos fenómenos de manera general. Promueve habilidades para la observación, el registro de datos, las representaciones gráficas, que le permiten la identificación de variables y el establecimiento de relaciones funcionales aplicables a los contextos reales (MEN, 1998, 2006). Para esta investigación se delimitó este contenido y se han seleccionado las gráficas cartesianas de funciones con comportamientos lineales.

Las representaciones gráficas tal como lo afirman Dolores (2007), se pueden considerar como herramientas visuales útiles porque posibilitan la detección de tendencias, facilitan las comparaciones y se constituyen en medios idóneos para analizar el comportamiento de fenómenos de variación. El análisis de las gráficas debe permitir al estudiante poner en relación la información que proporciona la gráfica con el contexto o el fenómeno que se representa, así como la elaboración de conclusiones, explicaciones y predicciones sobre el comportamiento de dicho fenómeno.

Finalmente, el software matemático Geogebra se constituye en un medio potente y dinámico que facilita el acercamiento a algunos conceptos fundamentales del álgebra. Este software, diseñado en el 2002 por Markus Hohenwarter, permite al estudiante generar su propio

conocimiento a través del desarrollo de conjeturas, de suposiciones que pueden ser o no descartadas y al mismo tiempo a través de procesos de visualización del cambio o la variación.

De esta manera a través de una secuencia didáctica hacemos converger cuatro elementos fundamentales para articular la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de grado octavo de la I.E. General Francisco de Paula Santander y Normal Superior Santiago de Cali, que son el pensamiento variacional, la competencia matemática razonar y argumentar, las representaciones gráficas de funciones con comportamientos lineales y las TIC.

Con esta propuesta innovadora se pretende dar protagonismo a elementos curriculares que han estado en el papel y que no han adquirido la trascendencia esperada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se destaca la articulación eficaz de estos elementos, que marca un lineamiento para la planeación y diseño de trabajos con una mirada más amplia, que proyecten la transformación de currículos, planes de área y de aula de las I.E. involucradas en la investigación.

### **1.3 Objetivos**

#### **Objetivo General**

Promover el desarrollo del pensamiento variacional y la competencia razonar y argumentar, mediante una secuencia didáctica apoyada en el software Geogebra a través del estudio de las

gráficas cartesianas de funciones con comportamiento lineal, en los estudiantes de grado octavo de la I.E. General Francisco de Paula Santander y la I.E. Normal Superior Santiago de Cali.

### **Objetivos Específicos**

- Identificar las necesidades educativas en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes de la I.E. General Francisco de Paula Santander.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que estructure la variación y el cambio, a la luz del uso de las gráficas cartesianas, como elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional.
- Evaluar la implementación de una secuencia didáctica basada en el reconocimiento de las características de las gráficas cartesianas que movilizan el desarrollo del pensamiento variacional.

## 2 Marco Teórico

### 2.1 Estado Del Arte

Las investigaciones que a continuación se presentan comparten algún aspecto de interés con el presente trabajo de investigación. Sin embargo, es importante tener en cuenta que, a pesar de la búsqueda sistemática realizada, no se presenta ningún estudio que integre las cuatro líneas de interés (el pensamiento variacional, la competencia razonar y argumentar, la enseñanza de las gráficas cartesianas y el uso de las TIC) de manera tan específica como si pretende este trabajo.

A continuación se realizará una breve exposición la literatura revisada que aporta elementos muy valiosos para la consecución de los objetivos de la presente investigación.

#### **Investigación sobre el pensamiento variacional y las gráficas cartesianas**

Este trabajo presentado por Caballero & Cantoral (2013) hace parte de un proyecto de investigación que busca identificar las causas que originan las dificultades en los profesores para desarrollar el pensamiento variacional, por consiguiente, es menester encargarse de los siguientes interrogantes: qué es, en qué consiste y cómo se desarrolla. Lo que permite caracterizar el Pensamiento y lenguaje variacional Pylvar. El Pylvar se caracteriza por estudiar las situaciones y fenómenos en los que se involucra el cambio, así como estudiar y analizar la variación a partir de la necesidad de predecir estados futuros. Por tanto, las ideas de cambio y variación son



fundamentales para el Pylvar, quien se centra en identificar aquello que cambia, en cuantificar ese cambio y en analizar la forma como se dan esos cambios.

El sustento teórico de la investigación se encuentra en la teoría socioepistemológica. Cantoral (como se citó en Caballero & Cantoral, 2013) plantea que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas socialmente aceptadas y establecidas. Para Cabrera (como se citó en Caballero & Cantoral, 2013) es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento. En particular para el cálculo esta praxis alude a las prácticas propias de la variación.

La caracterización se realizó en tres fases. La primera, análisis documental de los trabajos inscritos en la línea de investigación Pylvar. La segunda, recopilación de caracterizaciones realizadas en estudios previos sobre los elementos del Pylvar. En la tercera, se elaboró un modelo para caracterizar la forma en que se desarrolla el pensamiento variacional.

En la primera Fase se seleccionaron los trabajos bajo dos criterios, aquellas investigaciones que analizan como es usado el Pylvar y las que realizan diseño de actividades donde se incorpore elementos del Pylvar. En estos trabajos se analizaron tres aspectos: el primero se refiere a la forma como la variación se hace presente, lo que depende del contexto donde se desarrolle la situación (gráfico, numérico y analítico). El segundo trata de los conocimientos matemáticos que emergen, los cuales no necesariamente deben ser explícitos, pero juegan un papel importante. El tercero, considera como la actividad orienta el aprendizaje, tomando como punto de referencia las

estrategias variacionales EV caracterizadas por Salinas (como se citó en Caballero & Cantoral, 2013) que son comparación, seriación, estimación y predicción.

En la segunda Fase se estableció una nueva caracterización de los elementos estructurales del Pylvar incluyendo los citados en la primera fase. A continuación se presenta una corta descripción de ellos:

Situación Variacional SV: conjunto de problemas cuyo tratamiento demanda la utilización de las estrategias variacionales. Una situación no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que lleve a la respuesta sin necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables.

Argumentos Variacionales AV: son argumentos que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación. Estos son los que permiten dar explicación a la situación variacional.

Códigos Variacionales CV: Expresión oral o escrita del cambio y la variación, que son articulados para generar argumentos variacionales.

Estructura Variacional Específica EstV: para González (como se citó en Caballero & Cantoral 2013) son herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico que permiten abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en la situación variacional.

Estrategia Variacional EV: forma particular de razonar y actuar ante una situación variacional y que permite generar los argumentos variacionales que explican la situación. Se retoman las cuatro estrategias caracterizadas por Salinas (como se citó en Caballero & Cantoral, 2013). No se descartar la existencia de otras estrategias variacionales.

Comparación: acción de establecer la diferencias entre estados (valor final e inicial). Esta estrategia se usa de acuerdo al contexto, las nociones y los conceptos presentes en la situación de variación.

Seriación: comparar entre estados sucesivos y establecer relaciones y propiedades, tales como, relación funcional y patrones de comportamiento de una gráfica.

Predicción: poder anticipar un comportamiento, estado o valor, a partir del análisis de la variación de estados previos. La seriación hace parte de la predicción cuando el estudiante recurre a ella para encontrar ese nuevo estado.

Estimación: se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global a partir del comportamiento de los estados previos de un fenómeno.

Tareas Variacionales TV: actividades, acciones y ejecuciones dentro de la situación variacional que guardan relación entre los objetivos y contextos en que se desarrollan. Se caracterizan por la utilización de una o más estrategias variacionales. Algunas de las tareas variacionales identificadas son:

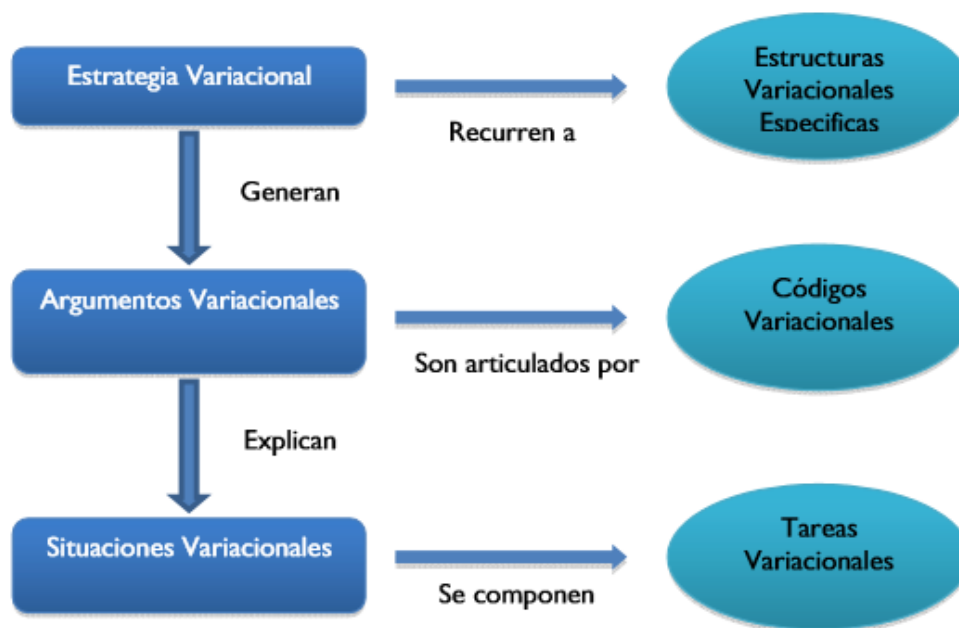
Tabulación como Variación Numérica TVN: acción de proporcionar valores distintos a una variable para observar y analizar sus efectos en cuanto a comportamiento, forma, posición o valor. La tarea variacional no se limita sólo al llenado de la tabla sino a observar los efectos derivados de la acción tabular.

Análisis de Datos en Tablas Numéricas ADT: a partir de datos presentados en tablas numéricas, se realiza el análisis centrándose en patrones de comportamiento y en las relaciones que se dan entre los datos.

Construcción de Gráficas con la Variación como Punto de Referencia CGV: construcción de gráficas apoyándose en el análisis de las variaciones, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica. El objetivo es bosquejar una gráfica que modele la situación que se presenta.

Análisis Gráfico con la Variación como Punto de Referencia AGV: se identifican patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos. Las acciones a realizar giran en torno, incluso de gráficas generadas con tecnología.

En la tercera fase se establece un modelo para interpretar la forma como se desarrolla el pensamiento variacional, el cual involucra varios aspectos que relacionan el uso sistemático de los elementos del Pylvar, presentes en el siguiente esquema:



*Figura 2. Modelo de Interacción de los Elementos del Pylvar*

**Nota.** Fuente: Artículo Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional (Caballero & Cantoral, 2013).

Por tanto para desarrollar el pensamiento variacional es necesario el uso sistemático e interacción de los elementos que conforman el Pylvar. Ajustando la idea, esta caracterización ofrece un marco de referencia para identificar acciones e ideas para generar el desarrollo del pensamiento variacional.

### **Investigación sobre la competencia argumentar y las gráficas cartesianas**

En el presente estudio Solar, Azcarate y Deulofeu (2012) caracterizan el Modelo de Competencias Matemáticas MCM, el cual está conformado por cuatro componentes: competencia matemática, procesos matemáticos, organizaciones matemáticas y niveles de complejidad (reproducción, conexión, generalización y reflexión). Por medio del MCM se estudia la argumentación como competencia, teniendo en cuenta las siguientes premisas: los procesos matemáticos son un elemento fundamental de las competencias y que no se puede caracterizar la competencia sino está asociada a un tema matemático.

De esta manera, el foco de la investigación es caracterizar los procesos matemáticos que aparecen en la argumentación. Para ello, realiza una fundamentación teórica sobre la argumentación matemática que inicia con el modelo de Toulmin (1958) que implica seis elementos que van desde los datos hasta la conclusión (datos, justificar, fundamentar, calificadores modales, refutar y conclusión). Para Solar estas componentes del modelo descrito se asumen como procesos matemáticos.

La metodología consistió en el diseño, la implementación y el análisis de la unidad didáctica UD: “Analizando y Construyendo gráficos” cuyo propósito era introducir las funciones por medio de la interpretación y construcción de gráficas funcionales. La UD consta de tres etapas: la primera, el sistema de representación cartesiano, la segunda, la noción de dependencia de variables y la tercera, Interpretación y construcción de gráficas. La implementación se hace con una estrategia de observación no participativa, durante cinco sesiones grabadas en vídeo. Se centra la atención en aquellos episodios en los que se da la interacción entre la profesora y los estudiantes, que muestran mayor riqueza en los procesos de argumentación.

De este trabajo se obtiene el siguiente listado de procesos asociados a la competencia de argumentación relacionados con la interpretación de gráficas funcionales:

*Tabla 2. Procesos de la competencia de Argumentación*

<i>Procesos</i>	<i>Descripción</i>
Identificar datos	Identificar los datos (generalmente en una gráfica o tabla) o enunciados que sirven para argumentar.
Interpretar datos	Interpretación de los datos y de las representaciones asociadas.
Validar datos/refutar	Validar o refutar la identificación de lectura o interpretación de datos.
Justificar	Justificar las declaraciones e interpretaciones.
Validar la justificación	Validar o refutar la justificación.
Fundamentar	Conocimiento básico que permite asegurar la justificación.
Reflexionar sobre la argumentación	Reflexionar en relación con los datos o sobre el proceso de argumentación.
Concluir	La tesis que se establece.

**Nota.** Fuente: Artículo Competencia de Argumentación en la interpretación de gráficas funcionales (Solar Azcarate Deulofeu, 2012)

Por consiguiente, la caracterización de las componentes de la competencia argumentar es una estructura que hace posible la planificación de una secuencia didáctica, así como el desarrollo de la argumentación en el aula. Por último, se ha analizado dos posturas de la argumentación, una como competencia que emerge en el aula de matemáticas y la otra como organizador del currículo.

### **Investigación sobre el uso de las TIC en la Educación Matemática**

En este estudio Moreno (2013) expone su punto de vista frente al impacto de las tecnologías digitales en la Educación Matemática. Esta intervención está fundamentada en su experiencia, la cual inicia con los trabajos de incorporación de las calculadoras graficadoras al aula de clase. Los primeros resultados hacen evidente que el plan de estudio “estático” empezaba a ser obsoleto, lo que indica que el trabajo debe hacerse de lleno con la formación de los profesores. En otras palabras, surge un choque entre el plan de estudio diseñado para una enseñanza “estática” y la presencia de las calculadoras algebraicas que además hablan algebra y saben trazar perpendiculares.

El proceso de formación de profesores, comienza con el conocimiento técnico del mediador digital (así llaman a la tecnología digital) y luego la integración del conocimiento matemático con el objetivo de lograr fluidez digital y conceptual. Se hace una exploración preliminar sobre las representaciones dinámicas/digitales de los objetos matemáticos. Un rasgo central de dichas representaciones es su naturaleza ejecutable que permite trasladar los algoritmos al universo interno del mediador digital.

Algunas observaciones importantes a partir de las experiencias con tecnología: se evidencia un aumento en la capacidad expresiva de los estudiantes, mayor integración comunicativa, se expone que las matemáticas de la variación y el cambio podrán tonarse en una dinámica que transforme los currículos del futuro, se válida el salón de clase como el sistema nervioso central de muchos proyectos educativos, por otro lado, surgen problemas que tienen que ver con una nueva epistemología del conocimiento matemático escolar.

En este punto, se hace necesario plantear que hay dos principios orientadores respecto a la presencia de los instrumentos digitales en la enseñanza de las matemáticas:

**Principio cognitivo:** los artefactos materiales y simbólicos median para ganar conocimiento.

**Principio epistemológico:** los artefactos materiales y simbólicos que median para ganar conocimiento, no son epistemológicamente neutros.

El conocimiento que produce la actividad humana está ligado a los artefactos que median la acción. Por consiguiente, la exploración matemática que se da en un medio digital está mediada por sistemas de representación activos, los cuales hacen emerger un conocimiento distinto del conocimiento que se construye con un medio estático.

Para Moreno una propuesta en relación a la incorporación de las tecnologías digitales como instrumento de mediación es la consideración del objeto borde. Este objeto es susceptible de un doble tratamiento, inicialmente se encuentra en un medio estático de lápiz y papel y que posteriormente puede ser explorado significativamente en sus refracciones digitales.



Por último, Moreno presenta algunas reflexiones finales: el conocimiento depende de la mediación de los sistemas semióticos de representación. Cuando se introduce sistemas digitales de representación se da lugar a una refracción del objeto matemático en el medio que se le otorga y con las características de ejecutabilidad propias del sistema de representación. La co-acción es un genuino proceso dialéctico entre el aprendiz y el medio, que se pone en marcha gracias a la ejecutabilidad. Finalmente se está entrando a una nueva fase de exploración, en la cual los objetos borde pueden hacer tangibles propiedades inesperadas de los objetos matemáticos.

### **Investigación sobre el desarrollo de competencias y el uso de Geogebra**

García López (2011), en su estudio tiene en cuenta tres aspectos importantes para realizar su investigación. El primero, tiene que ver con la forma de aumentar la motivación de sus estudiantes frente a las matemáticas de tal manera que mejoren sus aprendizajes. El segundo, se relaciona con la incorporación de las TIC a las prácticas diarias. El tercero, es que su investigación se basa en el trabajo y evaluación de las competencias matemáticas de los estudiantes desde la geometría.

En este punto cabe anotar que aunque la investigación mencionada no coincide con el pensamiento variacional que si es el objeto del presente estudio, se considera pertinente puesto que se centra en el software Geogebra y en el modo en que sus características y atributos contribuyen a la mejora de determinadas actitudes y competencias matemáticas.

En la indagación realizada sobre el aspecto actitudinal se destaca la motivación intrínseca de los estudiantes, entendiendo lo intrínseco como aquello que permite “realizar una actividad por el placer y la satisfacción que uno experimenta mientras aprende, explora o trata de entender algo nuevo. La persona explora, tiene una actitud de curiosidad, trabaja por los objetivos de aprendizaje para aprender” Gómez y Chacón (como se citó en por García López, 2011, p. 12).

De los resultados del estudio García López (2011) plantea que algunos atributos de Geogebra asociados a la transformación de actitudes hacia las matemáticas son los siguientes:

A nivel cognitivo se destaca:

- a. La constructividad: permite al estudiante estar activo y trabajar con mayor autonomía y confianza.
- b. La interactividad: Es la capacidad dinámica que refleja un sistema que provee retroalimentación al usuario en tiempo real, adapta o modifica dinámicamente su comportamiento en función de los eventos recibidos y entabla alguna modalidad conversacional con cierto grado de detalle, complejidad y modalidad.
- c. La interfaz: Es el modo de capturar la acción y atención del aprendiz y de reflejar el estado y contenido del sistema. La interfaz tiene fuerte impacto en la navegación, construcción e interactividad.

A nivel afectivo:

La mayoría de los estudiantes manifiestan gusto por el trabajo con Geogebra.

A nivel comportamental:

Se da mayor participación e implicación en la construcción de su propio aprendizaje.

Por otro lado, los resultados de la investigación también permiten identificar las características de Geogebra asociadas a la transformación de actitudes matemáticas, destacando la flexibilidad del pensamiento, el espíritu crítico y la perseverancia.

La flexibilidad del pensamiento se evidencia con el interés puesto en la manera en que otros resuelven el problema y el cambio de opinión en base a argumentos convincentes. El espíritu crítico se refleja en acciones como analizar la solución obtenida y revisar los pasos para comprobar que es correcto o encontrar errores. Finalmente la perseverancia se obtiene gracias a que los estudiantes sienten confianza para investigar posibles caminos de resolución y también sienten gusto por el software, razones por las cuales están concentrados durante más tiempo en las tareas propuestas.

Algunos aspectos de la resolución de problemas matemáticos que se pueden mejorar con el uso del Software de Geometría Dinámica SGD según Santos Trigo (como se citó en García, 2011) es el proceso de verificación de conjeturas considerando distintos métodos que incluyen visual, empírica, dragging (arrastre) y demostraciones formales para apoyar conjeturas. De igual manera la retroalimentación que permite el software ayuda a vencer situaciones de bloqueo que los estudiantes pueden experimentar en algunas tareas ganando confianza en resolver problemas por sí mismos.

Para concluir, es posible afirmar que la investigación hace un gran aporte en la caracterización de las competencias en matemáticas atendiendo a los diferentes niveles de complejidad en el ámbito de la geometría. Así mismo, permite reflexionar sobre la importancia

de que los docentes estudien la forma de integrar las TIC con éxito en el salón de clase, explorando la potencialidad de los recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

### **Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las gráficas cartesianas**

Núñez, Banet y Córdón (2009), identifican los errores más importantes al elaborar e interpretar una gráfica así como las posibles causas de dichas dificultades. En este punto es necesario aclarar que aunque los autores no abordan su investigación desde el punto de vista de la educación matemática, los resultados contribuyen al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y de las mismas matemáticas.

Las gráficas cartesianas son importantes para el aprendizaje de las ciencias y también tienen presencia importante en los medios de comunicación, razón por la cual es obvia la necesidad de que las personas adquieran según Barquero (como se citó en Núñez, Banet y Córdón, 2009) una alfabetización gráfica, es decir, que las personas sepan comunicar información con graficas o diagramas y también sepan comprender las que producen otros.

Según los autores, una de las causas de las dificultades es, entre otras, la escasez de actividades relacionadas con la elaboración e interpretación de las gráficas en el aula de clase. De igual manera, los libros de texto incorporan las gráficas como instrumentos que sirven para describir e ilustrar información más que como instrumentos ligados al planteamiento y resolución de problemas.

El objetivo del estudio es abarcar en distintos niveles educativos tres aspectos que son. Primero, el grado de conocimiento de los estudiantes sobre las características y la utilidad de los gráficos cartesianos en la enseñanza de las ciencias. Segundo, la habilidad para elaborar gráficas. Tercero, la habilidad para interpretar gráficas.

Para realizar el análisis de los resultados en cuanto a la interpretación, se diferencian dos tipos de capacidades: Local y global. La primera se refiere a la búsqueda de datos concretos y que se pueden calcular o deducir directamente de la gráfica. Lo global se basa en un análisis más general de los datos que se suministran. A continuación se muestra la siguiente tabla que permite distinguir entre aspectos locales y globales:

*Tabla 3. Aspectos Locales y Globales en la Interpretación de una Grafica*

HABILIDADES	TAREAS
Información local	Correspondencia de valores entre ejes
	Interpolar
Información global	Incremento entre dos puntos de una línea
	Comparar tramos de una línea.
	Extrapolar
	Poner título a la grafica
	Obtener conclusiones
	Inferir la tendencia de la grafica
	Comparar tramos de dos líneas distintas
Comparar puntos de dos líneas distintas	

**Nota.** Fuente: Artículo Capacidades del alumnado de educación secundaria obligatoria para la elaboración e interpretación de gráficas (Núñez Banet Cordón, 2009).

A partir de los resultados de la investigación es posible afirmar que, en términos generales, los estudiantes son capaces de proponer un ejemplo en el cual han utilizado graficas pero una

amplia mayoría desconoce la utilidad de las gráficas pues las explicaciones que dan son poco precisas. Es de anotar que esta situación mejora a medida que el grado de escolaridad es mayor.

En cuanto a la elaboración de la gráfica se tienen los siguientes errores que cometen los estudiantes:

- a. No respetan la proporcionalidad de los valores en los ejes coordenados.
- b. Se escriben los valores de los ejes en el orden que aparecen en las tablas, aunque alguno de ellos este repetido.
- c. Dejan incompleta la gráfica, indicando solamente los puntos correspondientes a cada par de valores.
- d. Utilizan un tipo de representación inadecuada a los datos realizando un diagrama de barras en vez de una gráfica de línea.

En la interpretación de las gráficas, en cuanto a lo local, los estudiantes no manifiestan dificultad, es decir, establecen correspondencia entre valores. La mayor dificultad se manifiesta en los procesos de interpolación.

En cuanto a las conclusiones e implicaciones educativas se puede afirmar que la progresión de las habilidades sobre las gráficas a medida que los estudiantes aumentan su grado de escolaridad es claramente insuficiente. De igual manera la elaboración e interpretación de gráficas, exige por parte de los estudiantes unas capacidades matemáticas (como hacer cálculos aritméticos y manejar la proporcionalidad) y una capacidad lingüística para comprender las preguntas que se formulan,

sin embargo los estudiantes no las tienen. Es por ello que confunden aumento o incremento con mayor valor y tramos e intervalos con valores puntuales.

Todo lo anterior conlleva a pensarse la enseñanza y el aprendizaje de las gráficas como una habilidad de investigación en la cual se rescatan tres aspectos esenciales: En primer lugar, el contexto, el cual debe enriquecerse a través de las ciencias naturales. En segundo la diversificación de materiales didácticos, como por ejemplo el uso de las nuevas tecnologías de la información y por último un enfoque educativo basado en la investigación escolar.

Un segundo documento en esta misma línea de investigación es el de Díaz & Pérez (2016) quienes afirman que las gráficas cartesianas escolares son la principal herramienta para la figuración del cambio, aunque el sistema escolar actual no permite que estas sean consideradas como un medio de argumentación en sí mismas y solo son consideradas como la representación de una función; el estudiante se restringe a dibujar la función pero no desarrolla lenguaje gráfico.

La investigación realizada por los autores permite estudiar el uso de las gráficas a partir de un fenómeno de variación que involucra cambios en la posición y el tiempo de una persona que camina. La historia del problema considera las diferentes posiciones en las que dicha persona se puede encontrar, así como la identificación de la manera en que ella realiza el movimiento (rápido, lento, más rápido, detenido) y el tipo de velocidad que se relaciona con cada cambio de dirección. El marco teórico que sustenta la investigación es una aproximación socio epistemológica la cual sostiene que las gráficas deben estudiarse desde una perspectiva de su origen y su funcionamiento. De esta manera, las producciones de los estudiantes se analizan teniendo en cuenta las visiones

locales y globales de la gráfica. Esta clasificación corresponde a la hecha por Torres (como se citó en Díaz y Pérez, 2016).

En cuanto a los resultados se puede concluir que antes de llegar a la gráfica cartesiana, la mayoría de los estudiantes realizan figuraciones preliminares. Lo anterior da cuenta de la necesidad de representar el contexto y movimiento de aquello que cambia en el fenómeno. En la visión global, todos los estudiantes dan cuenta de los cambios de posición. En la visión local, los estudiantes tienen en cuenta los dos ejes (tiempo y distancia) al construir la gráfica y complementan información textual respecto a la velocidad positiva, negativa o nula. También se observa que la gran mayoría utiliza trazos rectos para describir los movimientos sin considerar los trazos curvos, es decir, presentan dificultad para dar cuenta de los cambios de velocidad de la persona que camina, asumiendo un movimiento constante.

Finalmente, el estudio realizado permite obtener una visión del conocimiento de los estudiantes al interpretar y realizar gráficas. Igualmente propone privilegiar figuraciones previas a la gráfica cartesiana que permitan dar significado y establecer características del fenómeno a representar.



## 2.2 Fundamentos De Didácticas De Las Matemáticas

### Modelo Teórico A Priori

Enfocar un currículo en torno a competencias, implica principalmente un cambio de paradigma frente a las matemáticas escolares, donde el papel de los contenidos pierde protagonismo y se promueve una nueva organización curricular en la que los procesos matemáticos adquieren el hilo conductor de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ahora, el interrogante es cómo llevar esta visión a un nivel de concreción.

Puig (como se citó en García Quiroga et al., 2013) plantea que para lograr organizar una investigación y sus resultados es necesario un modelo teórico local, el cual debe permitir la descripción, el análisis y la explicación de los aspectos centrales del proceso didáctico. Fundamentado en lo anterior, el grupo de investigadores en educación matemática de la Universidad de la Amazonía, determinan unas componentes que constituyen lo que ellos definen como modelo teórico a priori (MTP). En efecto este modelo busca analizar y explicar de manera coherente y progresiva todo el proceso de movilización de las competencias matemáticas al interior del aula de clase. Para ello toman unos referentes teóricos relacionados con aspectos socioculturales de la educación matemática y dirigen la mirada en el actuar del estudiante, es decir, se enfoca en el sujeto que aprende.

Antes de continuar con la descripción del modelo, es indispensable definir qué se entiende por competencia matemática. Según los autores D'Amore, Godino y Fandiño (como se citó en

García Quiroga et al., 2013), en una competencia matemática se evidencian tres aspectos que son: el *cognitivo*, que es el conocimiento de la disciplina, el *afectivo*, que se relaciona con la disposición y voluntad y la *tendencia de acción*, que tiene que ver con aspectos tales como la persistencia, continuidad y dedicación. En esta misma línea, Solar (2009) afirma que la competencia matemática tiene tres componentes que son: Los procesos matemáticos, las tareas matemáticas y los niveles de complejidad. En seguida se explicitaran dichos componentes permitiendo mayor comprensión del modelo.

### ***Los Procesos Matemáticos***

En los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, los procesos generales se consideran como uno de los tres grandes aspectos “para organizar el currículo en un todo armonioso” (MEN, 1998, p. 35). Puesta la mirada en: el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, los estándares de competencias plantean la similitud que hay entre estos procesos generales y aquellos que indican que un estudiante es *matemáticamente competente*, ya que son capaces de:

“Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.

Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas.

Usar la argumentación, la prueba, la refutación, el ejemplo y el contraejemplo como medio de validar o rechazar conjeturas.

Dominar procedimientos, algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz” (MEN, 2006, p. 50-51)

De lo anterior se evidencia que los procesos son la base de las competencias matemáticas. En este punto cabe resaltar dos aspectos importantes: el primero, es reconocer que estos procesos no se presentan puros, ya que siempre es posible establecer relaciones y conexiones entre los mismos. El segundo, es tener en cuenta que estos procesos no agotan el trabajo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que se pueden encontrar o formular otros.

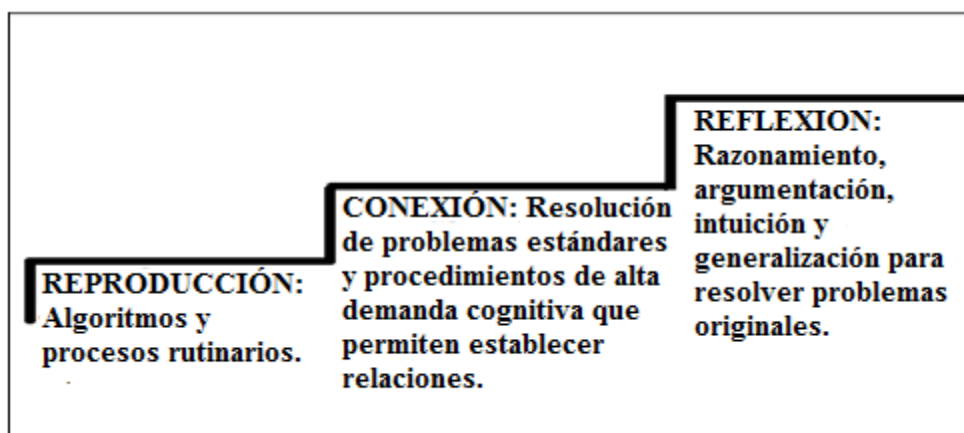
Finalmente es importante tener en cuenta: que los procesos se desarrollan a largo plazo y que tienen carácter transversal con respecto a los contenidos (Solar, 2009).

### ***Las Tareas Matemáticas***

Goñi (como se citó en García, Coronado y Giraldo, 2015) plantea que en el campo de la educación matemática, particularmente en el proceso comunicativo que se vive en el aula de clase, la tarea se asume como la propuesta de trabajo acción que da el docente y la actividad de aprendizaje es la respuesta por parte del estudiante a los requerimientos presentados. Los NCTM (como se citó en Batanero, Font y Godino, 2004) afirman que las tareas que el profesor propone deben estar basadas en unas matemáticas significativas y razonables, que incorporen los intereses y experiencias cotidianas de los estudiantes en sus contextos sociales. Lo anterior permite la articulación con los saberes previos, promueve la comunicación y la argumentación en y con las matemáticas; también permite que el estudiante reconozca la utilidad social de las matemáticas y al mismo tiempo, sienta gusto e inclinación hacia su aprendizaje y su uso social. Las buenas tareas se centran en estimular la curiosidad del estudiante, constituyéndose en una serie de desafíos cognitivos cuyo nivel de complejidad va en aumento.

### *Los Niveles De Complejidad*

Estos niveles de complejidad según las pruebas OCDE (2007), se pueden clasificar en reproducción, conexión y reflexión. En el siguiente esquema se presentan los tres niveles con las tareas que lo caracterizan:



*Figura 3. Niveles de Complejidad.*

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de la clasificación que hace la OCDE (2007) a los niveles de complejidad de una tarea matemática

Allanado el campo conceptual de las competencias matemáticas, se retoma un aspecto fundamental del MTP que recopila todos los referentes teóricos antes mencionados: la actividad matemática de aprendizaje. García et al. (2015) plantea que para abordar esta componente del modelo, es necesario hacer la distinción entre lo que él define como *expectativas de aprendizaje a largo plazo* y las *expectativas de aprendizaje a corto plazo*.

Las expectativas de aprendizaje a largo plazo corresponden a las competencias, debido a que éstas no se desarrollan en una clase o en un periodo, sino que corresponden a un tratamiento a lo largo de la vida escolar, ya que nunca se puede afirmar que se es totalmente competente ni mucho menos que se es incompetente. De esta manera el trabajo por competencias según García

et al. (2015) se enmarca en el proceso de *enculturación matemática* de Bishop (2005), quien plantea tres constructos que son esenciales en su visión sociocultural de la educación matemática: Las actividades matemáticas, la comunicación y la negociación.

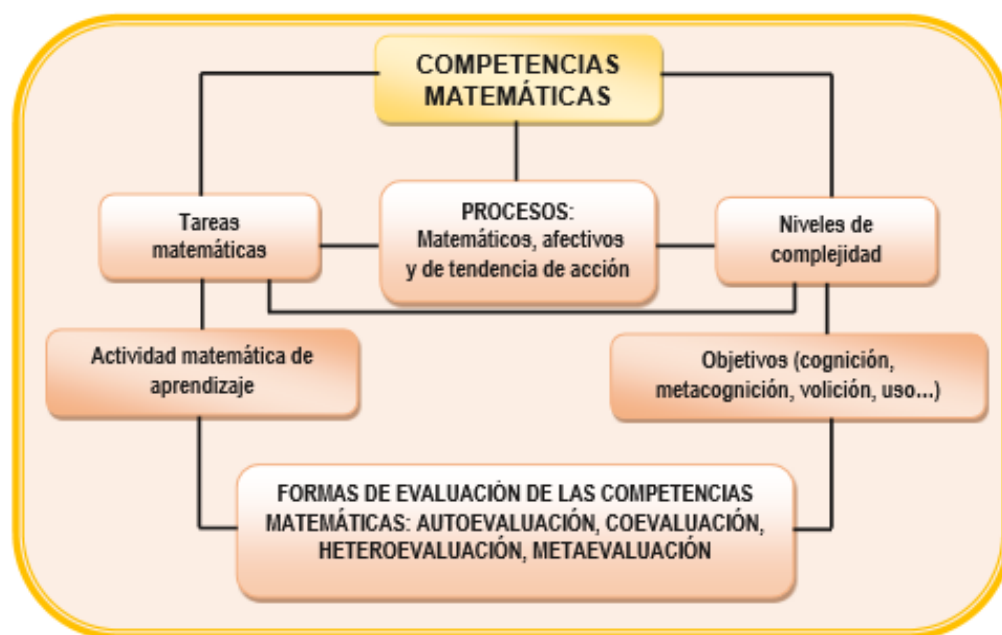
Las actividades matemáticas, hacen énfasis en lograr que el estudiante se involucre con las matemáticas. La comunicación, se enfoca en lograr compartir significados y conexiones de índole matemática durante las clases, las cuales se dan en tres vías: de profesor a estudiante, de estudiante a profesor y de estudiante a estudiante. En este constructo, cobra relevancia la exposición de ideas, las charlas, los diferentes contextos, las descripciones escritas, las analogías, las metáforas, etcétera. La negociación, por su parte, hace referencia a que los estudiantes sean protagonistas en la construcción de sus propios significados matemáticos e implica procesos de validación; por otro lado, el docente debe tener claro el contexto y las metas de aprendizaje. Lo anterior, tal como ya se expresó arriba se da a lo largo de la formación escolar.

Las expectativas de aprendizaje a corto plazo se relacionan con los objetivos, los cuales se enuncian enfocados en las actuaciones del estudiante y no en los contenidos. Esta perspectiva se justifica desde dos lugares, el primero es la relación entre los objetivos con los procesos inherentes a cada competencia matemática y segundo, los objetivos permiten establecer las tareas propuestas por el docente para que el estudiante realice la actividad matemática de aprendizaje. Finalmente por su carácter de corto plazo corresponde con metas alcanzables en la brevedad del tiempo.

Las expectativas a largo y corto plazo, evidencian la “metáfora de la participación” propuesta por la doctora Sfard (2008). En esta postura, *el aprendiz* participa en ciertas actividades

que le permiten ser reconocido como un miembro de la comunidad matemática, es decir, el estudiante hace parte integral de ella, por tanto, debe entender y cumplir las normas de actuación y desarrollar de forma progresiva sus habilidades de comunicación. De esta manera, es pertinente mencionar que el trabajo realizado en las expectativas de aprendizaje a corto plazo permite avanzar de forma coherente y planificada en la obtención de las expectativas de aprendizaje a largo plazo.

De igual manera, un aspecto de gran importancia en el MTP lo da el término “a priori” el cual hace referencia a la reflexión minuciosa que debe realizar el docente a cada uno de esos componentes, antes del proceso de intervención en el aula. En pocas palabras, el propósito que tiene el MTP, es contribuir a planificar el desarrollo coherente y progresivo del proceso de movilización de las competencias matemáticas en cuanto a que toma las componentes de una competencia matemática: tareas, procesos y niveles de complejidad y las articula con la actividad matemática de aprendizaje, los objetivos de las tareas y las formas de evaluación.



*Figura 4. Modelo Teórico A Priori MTP*

**Nota.** Fuente: Libro Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas, (García et al., 2015).

## **Competencia Matemática Razonar y Argumentar**

Con el propósito de definir claramente que se entiende por razonar y argumentar, se presenta un seguimiento de estos conceptos a través de diferentes documentos. Para empezar, en los lineamientos curriculares (1998) se concibe el concepto de razonar no como competencia sino como proceso general y lo define como la acción de ordenar ideas para llegar a una conclusión. El razonamiento está relacionado con la capacidad que tiene el estudiante de dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que él mismo sigue, es decir, permite justificar la elección de cada uno de los pasos que va ejecutando. Para favorecer procesos de razonamiento en el aula, el docente debe solicitar al estudiante que justifique las estrategias empleadas para llegar a una respuesta y que explore y compruebe sus propias ideas sobre un tema en particular.

Los estándares (2006) plantean que la formación en matemáticas contribuye a la capacidad para pensar, lo cual se evidencia en acciones tales como: el acto de percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones, formular hipótesis y conjeturas y por último dar explicaciones coherentes respecto a afirmaciones. Con respecto al razonamiento, los estándares afirman que su desarrollo se da a través de materiales y modelos físicos que permitan mayor comprensión para poco a poco irse desprendiéndose de ellos, para alcanzar niveles altos de abstracción. En relación con lo anterior, se tiene que el uso de las gráficas sirve como apoyo para el razonamiento de la proporcionalidad.

En la guía pruebas saber tercero, quinto y noveno grado (2014) es donde se da el paso de caracterizar el razonamiento como un proceso general a competencia matemática. En este

documento se plantea que para efecto del diseño de las pruebas, se realiza una reagrupación de las competencias en tres bloques de la siguiente manera: comunicación, representación y modelación, razonamiento y argumentación y finalmente, planteamiento y resolución de problemas. En dicha guía se establece que el razonamiento y la argumentación consisten en:

“... dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problemas, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamientos y distinguir y evaluar cadena de argumentos.” (MEN, 2014, p. 66)

Por su parte, la OCDE (2007), realizan una distinción entre razonamiento y argumentación. Por un lado, el desarrollo de procesos de razonamiento implica que el estudiante sepa plantear preguntas tales como ¿cuántos? ¿Cómo hallamos? ¿Cómo puedo hallar? ¿Qué procedimiento matemático implica? y conozca los tipos de respuesta que las matemáticas ofrecen a esas preguntas, así mismo que sepa diferenciar proposiciones, es decir, determinar si se trata de un teorema, una definición, una conjetura, etcétera. Por otro lado, la argumentación, implica entender las pruebas de matemáticas y diferenciar tipos de razonamiento, así como evaluar cadenas de argumentaciones, seguir y justificar procesos.

Una postura relevante sobre la argumentación la plantea Krummeheuer (como se citó en García et al., 2015), quien indica que esta, trata de un fenómeno colectivo que involucra varios participantes, lo que denota como argumentación colectiva. En palabras del doctor García las interacciones que se dan en el aula de clase son las que dan sentido a la argumentación.



Finalmente García et al. (2015), caracterizan el razonamiento y la argumentación desde la postura de competencias como procesos de pensamiento que involucran el conocimiento matemático, los procesos de comunicación y representación, con el apoyo del dominio afectivo y cierto tipo de disposición, hacia el potente apoyo de establecer estrategias y justificaciones en el planteamiento y solución de problemas.

Esta exposición más que precisar lo que se entiende por razonar y argumentar, permite reconocer aquellos subprocesos inherentes a la competencia que permiten ir la construyendo. En particular para la presente investigación se van a utilizar los siguientes subprocesos: identificar, verificar, explorar, hacer conjeturas, desarrollar, evaluar, generalizar y sistematizar argumentos.

### **Secuencia Didáctica**

Teniendo en cuenta que el propósito es trabajar la competencia razonar y argumentar, la forma más apropiada para movilizar situaciones problemas es a través de la secuencia didáctica. La caracterización de esta técnica de trabajo que más se ajusta a esta investigación es la presentada por Tobón, Pimienta y García (2010) quienes dan a las competencias el lugar de paradigma educativo y desde esta mirada lo ubican en el enfoque socioformativo. Dicho enfoque permite abordar las competencias dando prioridad a la formación humana integral del ciudadano del siglo XXI, es así como se da un gran peso a los valores humanos, a promover el *aprendizaje cooperativo* y a emprender una oposición a la fragmentación de los contenidos. Esta orientación requiere un docente con dominio de las competencias que va a desarrollar, que tenga manejo del contenido disciplinar y que incorpore una reflexión permanente sobre su quehacer diario, que implemente

estrategias didácticas pertinentes donde explore siempre esos saberes previos de los estudiantes y sobre todo que tenga pericia para formar equipos de trabajo, es decir, un docente consciente de su rol activo dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por tanto, “Las secuencias didácticas son, sencillamente, conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, busca el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos.” (Tobón et al., 2010, p. 20). El autor, propone los siguientes componentes para una secuencia didáctica que trabaje el desarrollo de competencias:

**Situación problema del contexto:** Consiste en definir un problema significativo y pertinente.

**Competencia a formar:** En esta parte se describe la competencia que se formará y se consideran más que contenidos, los procesos desde el saber ser, saber hacer y el saber conocer relacionados con la competencia.

**Recursos:** Se establecen los recursos necesarios para ejecutar las actividades de aprendizaje y las que se han planificado para la evaluación.

**Proceso metacognitivo:** Es la orientación dada a los estudiantes para que reflexionen sobre su desempeño y lo autorregulen. Es un instrumento de mejoramiento, que va más allá de un juicio y lo que busca es generar las acciones concretas para que los estudiantes realicen el cambio pertinente y se focalicen en el perfeccionamiento de sus competencias.

**Actividades de aprendizaje y evaluación:** Se articulan las actividades propuestas de tal manera que haya dependencias entre ellas y contribuyan a la resolución del problema que se ha propuesto. La evaluación se planea en paralelo a dichas actividades.

En este orden de ideas, para la presente investigación se contemplan los siguientes componentes:

**Situación problema del contexto:** comportamiento de un fenómeno de variación: cantidad de agua en un tanque (litros) Vs Tiempo (minutos)

**Competencia a formar:** razonar y Argumentar

**Recursos:** lápiz y papel y TIC.

**Proceso metacognitivo:** es un proceso que se da de forma integrada durante el desarrollo de las tareas, porque constantemente se presenta un diálogo entre los estudiantes y luego entre ellos y la docente investigadora que les permite validar o corregir sus propios argumentos.

**Actividades de aprendizaje y evaluación:** se diseñan seis tareas con su respectiva evaluación, teniendo en cuenta los niveles de complejidad propuestos por la prueba PISA (reproducción, conexión y reflexión). Las tareas 1, 2 y 3 corresponden al nivel de reproducción, las tareas 4 y 5 pertenecen al nivel de conexión y finalmente la tarea 6 se ubica en el nivel de mayor exigencia cognitiva llamado nivel de reflexión, donde se da prioridad al registro de representación verbal. Por otro lado, esta investigación incorpora las TIC para el desarrollo de las tareas 2 hasta la 5 a través del software Geogebra, el cual permite construir representaciones de gráficas de funciones con comportamientos lineales. El propósito de utilizar este software es introducir a los estudiantes en un entorno dinámico que permita interactuar con dichas gráficas.

### **Pensamiento Variacional**

El MEN, en los lineamientos y estándares curriculares para el área de Matemáticas, establece el pensamiento variacional como uno de los cinco pensamientos que contribuye al

desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Puntualiza que el pensamiento variacional "... involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas." (MEN, 1998, p. 72)

De ahí, que la directriz para el desarrollo del pensamiento variacional, gire en torno al estudio de la variación y el cambio, aludiendo a su reconocimiento, su percepción, su descripción y a sus distintas representaciones. En efecto, en estos documentos oficiales se sugieren diferentes formas para poner en escena la variación en las aulas de clase. Un primer tratamiento es hacer uso de tablas, también se habla de la construcción de expresiones algebraicas que expliciten un patrón de variación, así como profundizar en el estudio de patrones aditivos y multiplicativos en diferentes contextos. Por otro lado, expresan el gran aporte de las gráficas cartesianas porque permiten el estudio dinámico de la variación.

Concomitante con lo anterior se tienen los siguientes núcleos conceptuales que involucran la variación: la noción de variable, los patrones de variación, la comprensión y el uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y del cálculo diferencial e integral. Finalmente es relevante la sugerencia hecha para acercarse al concepto de función, la cual consiste en el reconocimiento de la dependencia funcional entre magnitudes variables, en la que se presenta la correlación entre los cambios de una magnitud  $Y$  con respecto de otra magnitud  $X$ .

Para terminar, el doctor Vasco (2003) revalida toda esta propuesta y manifiesta la importancia de iniciar este proceso desde los primeros años de escolaridad, ya que el propósito es llegar a pensar de una manera dinámica, donde se trata de captar qué varía, con qué y cómo.

### **Registros Semióticos de Representación**

El docente de matemáticas, permanentemente debe inquietarse por conocer cómo los estudiantes aprenden, es decir, es menester que él identifique las interacciones que se dan entre el conocimiento y el sujeto que aprende. Ya que al reconocer las etapas por las cuales atraviesa dicho proceso, podrá dilucidar las dificultades que se presentan, así como visualizar las maneras de favorecerlo. En consecuencia el conocimiento es un elemento fundamental en el proceso de aprendizaje y por ende se hace necesario precisar su tratamiento, aquí toma importancia el aporte de Duval quien afirma que “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación” (Duval, 1999, p. 25), es decir, que establece esa estrecha relación entre conocimiento y representación.

Tamayo (2006) considera las representaciones como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior. Según esto, las representaciones pueden ser internas o externas. Las representaciones internas son aquellas que se encuentran en la mente del sujeto, tal como los conceptos, las nociones, los modelos mentales entre otros. Las representaciones externas o también llamadas representaciones semióticas, como por ejemplo, las palabras o las notaciones simbólicas utilizadas en el estudio de una ciencia

particular, son aquellas que permiten comunicar y hacer visibles y accesibles las representaciones mentales.

En el aprendizaje de un dominio específico tal como las matemáticas, es de suma importancia distinguir un objeto de su representación. Un objeto tiene muchas maneras de representarse, por tanto, la comprensión de éste, va unida siempre a la movilización de los sistemas de representación. Según Duval (2004) un sistema semiótico está compuesto por reglas que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también sentido dentro del sistema. En este punto, es importante resaltar que Duval usa la palabra registro para referirse a un sistema de representaciones.

Se habla de desarrollo cognitivo, cuando un estudiante es capaz de realizar transformaciones de las representaciones que utiliza a través de dos operaciones denominadas tratamiento y conversión. Con respecto al tratamiento, puede afirmarse que es una operación que implica el manejo del mismo registro de representación tal y como sucede al realizar una operación entre números o al resolver una ecuación. La conversión por su parte, implica el manejo de por lo menos dos registros diferentes. En esta operación es importante tener en cuenta que dos registros de representación distintos muestran contenidos o aspectos diferentes de un mismo objeto matemático. Un ejemplo, es pasar de la expresión algebraica de la función a su representación gráfica cartesiana.

En muchas ocasiones se considera que el paso de un registro de representación a otro es un proceso automático, sin embargo, teniendo en cuenta que los estudiantes tienden a encapsular

el objeto solo con un registro de representación, es preciso que el docente proponga tareas que favorezcan y propicien una reflexión detallada por parte de los estudiantes sobre los cambios en la representación, donde se tome conciencia de las reglas de correspondencia semióticas entre los diferentes registros.

La conversión también se caracteriza por ser una operación orientada, en la cual, se hace necesario precisar el registro de partida y el registro de llegada. Siguiendo el ejemplo de la función, no es lo mismo pasar de una expresión algebraica a su gráfica correspondiente, que a partir de una gráfica, deducir la expresión algebraica. Otra característica está relacionada con criterios de congruencia y no congruencia. Lo anterior se refiere a que la conversión de una representación a otra puede ser un proceso espontáneo y transparente, mientras que en otros casos puede tratarse de una operación poco clara e incomprensible.

Teniendo en cuenta las características mencionadas, para realizar el trabajo de conversión, se debe buscar la discriminación de unidades significantes y pertinentes a cada una de las representaciones del objeto, para que de esta manera se pueda realizar dicha operación. Así mismo, es importante que el profesor de matemáticas distinga muy bien lo que proviene de un tratamiento y lo que proviene de una conversión, con la intención de comprender los mecanismos y las dificultades que se presentan en el aprendizaje.

### *El Registro de las Gráficas Cartesianas*

Duval (2004) Clasifica las gráficas cartesianas como un registro no discursivo y monofuncional. Para entender claramente estas características es importante tener en cuenta que según el autor, las representaciones que se usan en clase de matemáticas se pueden clasificar en cuatro grandes grupos que son: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales. Los registros discursivos utilizan una lengua. En estos registros se pueden formular proposiciones o transformar expresiones. Este tipo de registros posibilitan la descripción, la inferencia, el razonamiento y el cálculo. Los registros no discursivos como por ejemplo las figuras geométricas (en cero, una, dos o tres dimensiones) son aquellos que muestran formas o configuraciones de formas. Ese tipo de registros permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible. Los registros plurifuncionales se utilizan en todos los dominios de la vida cultural o social y tienen un espectro amplio de tratamiento. Los registros monofuncionales se caracterizan por ser especializados y tener una estructura técnica o formal.

Para Duval, los docentes de matemáticas privilegian los registros monofuncionales o técnicos sobre los plurifuncionales, porque los primeros, permiten el desarrollo de algoritmos o secuencias de reglas operatorias o procedimientos. Es tanta la importancia dada a los registros monofuncionales, que se considera que un estudiante adquiere conocimientos en matemáticas en la medida que mejor maneje este tipo de registros, olvidando que la manera de acceder realmente a los objetos matemáticos es a través de diferentes registros. Según Duval, las dificultades más importantes y decisivas del cambio de registro se dan de un registro de tipo monofuncional a otro plurifuncional como es el caso de las gráficas al lenguaje natural.



Teniendo en cuenta lo anterior, pasar de las gráficas cartesianas al lenguaje natural, tal como lo manifiesta Duval, implica un nivel de dificultad importante por tratarse de un cambio de registro de tipo mono a plurifuncional. Este paso no se da de forma simple ni evidente, como con frecuencia se cree, así que no debe subestimarse sino que por el contrario, el docente está llamado a realizar un análisis de los conocimientos matemáticos en términos de registros, lo cual conlleva a considerar tanto los tratamientos como las conversiones en objetos de aprendizaje en los cuales se debe tomar conciencia de los modos de funcionamiento y transformación propios de cada registro.

Duval afirma que la actividad cognitiva no se explica solamente a través de los sistemas o estructuras que se ponen en acto, sino que se debe tener en cuenta la función para la cual cada uno de estos sistemas se ve movilizad. De lo anterior surge un aporte relevante y es el análisis de contenido. Así, las gráficas cartesianas, que tienen mucha aplicación en contextos cotidianos, se pueden ver de dos maneras: una puntual, que da la indicación de un valor en un momento dado, y otra icónica que evoca lo alto y lo bajo, las subidas suaves y abruptas a partir del nivel de base. Sin embargo, hay una tercera forma de ver las gráficas, denominada aprehensión global cualitativa, que permite visualizar la relación entre dos conjuntos de valores, que posibilita tratamientos cualitativos tales como la interpolación y extrapolación y que se utiliza siempre de forma articulada con otros registros. Por tanto, a cada una de las tres maneras de ver una gráfica cartesiana, se le asocia lo que es observado y lo que es identificado tal y como lo muestra la siguiente tabla:

Tabla 4. *Tres Maneras de Ver las Gráficas Cartesianas*

Tres maneras de ver	Lo que es OBSERVADO	Lo que es IDENTIFICADO
I. Aprehensión <b>LOCAL</b> <b>POR</b> <b>PUNTEO</b> (solo se retienen puntos considerados aisladamente)	Asociaciones. (puntos, parejas de números)	<b>Una asociación entre dos valores numéricos</b> La regla de construcción es una regla de codificación: Un punto de intersección sobre un plano cuadriculado según dos ejes graduados (la figura fondo) corresponde a una pareja de números.
II. Aprehensión <b>ICÓNICA</b> (la imagen de una “tendencia”)	Desplazamientos de subida o de bajada <b>en relación con un nivel horizontal</b>	<b>Una analogía</b> Con cambios de posición en el espacio físico real (estar más alto, más bajo), relieve...
III. Aprehensión <b>GLOBAL</b> <b>CUALITATIVA</b> (se trata de poder discriminar las características de la misma forma o no)	Formas D1 (rectas ,curvas) o D2 (zonas) que tienen <b>características figurales intrínsecas y características extrínsecas</b> Orientación con respecto a los dos ejes, y posición (intersección) En relación a los ejes	<b>Una relación entre dos variables</b> Definida sobre dos conjuntos de valores.

**Nota.** Fuente: Libro Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo (Duval, 2004)

El lograr que los estudiantes pasen de ver las gráficas desde la manera icónica a la global cualitativa, es según Duval, uno de los problemas específicos del aprendizaje de las gráficas. Las razones que explica el autor para que esta transición no se dé, son las siguientes: Primero, en matemáticas, las posibilidades interesantes de visualización que ofrece una representación construida son independientes de los procedimientos de construcción. Para el caso de las gráficas, los procedimientos de construcción se limitan a la ubicación de puntos en el plano cartesiano. Segundo, la mayoría de tareas que requieren el uso de gráficos consisten en tres cosas: pasar de tablas a gráficas, pasar de expresiones algebraicas a gráficas o pasar del gráfico hacia uno o varios

puntos particulares limitándose a “leer las coordenadas”. Por el contrario, Duval propone que para favorecer este paso se deben discriminar las unidades significantes de una representación y asociar la representación correspondiente en otro registro, de tal manera que tomando simultáneamente los dos registros se analice cognitivamente las tareas de los estudiantes y se ponga a su disposición dicho instrumento de análisis.

### **Evaluación**

Tobón et al (2010) afirman que es necesario asumir la evaluación de las competencias como una valoración que además de servir de recurso para saber cuál es nivel de competencia que tiene el estudiante, debe posibilitar el crecimiento personal desde el proyecto ético de vida, considerando el contexto, los saberes previos y los aspectos por mejorar. De igual manera, la evaluación teniendo en cuenta el desarrollo de competencias debe trascender los procesos de aprendizaje de tal forma que la información obtenida sirva de retroalimentación tanto a docentes como a directivos para poder mejorar las prácticas educativas, el currículo y todo aquello que sucede en el aula.

Para llevar a cabo este proceso, reconociendo que es un tema que requiere una atención especial, es pertinente considerar los siguientes aspectos recomendados por Tobón et al (2010). Primero, la evaluación no puede estar aparte de la secuencia didáctica sino que por el contrario es paralela a las actividades que se realizan en dicha secuencia. Segundo, la evaluación debe posibilitar las re-elaboraciones por parte del estudiante después de la corrección del docente, de

tal manera que ayude a aprender y a mejorar en lugar de limitarse a calificar/clasificar. Tercero, la evaluación se debe abordar mediante rúbricas, que en la medida de lo posible deben describir las competencias, los criterios, las evidencias, la ponderación y los niveles de dominio. Cuarto, los procesos metacognitivos son esenciales en la evaluación por competencias, ya que permiten que la evaluación no se convierta sólo en un proceso de verificación de logros o aspectos por mejorar sino que sirva como instrumento de mejoramiento en sí misma. Es así como la metacognición incluye preguntas orientadoras tales como: ¿Qué errores se detectaron y como se corrigieron? ¿Cuáles fueron mis aciertos? ¿Qué fue lo más difícil y por qué? ¿Cómo puedo mejorar? ¿Es posible encontrar otras formas de abordar la tarea? ¿Cómo fue mi trabajo en equipo?, etcétera.

A partir de la competencia que se propone desarrollar, se definen unos procesos inherentes a ella, para formular los criterios (indicadores) y tenerlos como referencia, así como las evidencias del desempeño, las cuales aluden a los productos que se van obtener a partir de las actividades de aprendizaje (cuadernillo de la secuencia). Por último, para cada criterio se formulan indicadores que dan cuenta del nivel de dominio que tienen los estudiantes con el fin de irlos valorando con claridad a medida que se vayan realizando las actividades de aprendizaje. Los niveles de dominio utilizados para valorar los indicadores formulados en la secuencia didáctica de la presente investigación son: Cumple (C), Cumple parcialmente (CP) y no lo Cumple (NC). Tomado de García et al. (2015)

Para completar el proceso de evaluación, es menester tener en cuenta las tres modalidades de evaluación caracterizadas por Díaz Barriga (2002). La primera es la diagnóstica, la cual se realiza de manera previa al proceso educativo. Ésta se clasifica a su vez en inicial o puntual. La

inicial tiene como propósito identificar el grado de adecuación de las capacidades cognitivas generales y específicas de los estudiantes. La puntual pretende identificar los conocimientos previos de los estudiantes. La segunda es la formativa: “Esta forma de evaluación se realiza concomitante con el proceso de enseñanza y aprendizaje por lo que debe considerarse más que las otras, como una parte reguladora y consustancial del proceso” (Díaz, 2002, p.406). La tercera, que se denomina evaluación sumativa, es la que se realiza al final con el objetivo de verificar el grado en el cual las intenciones educativas han sido alcanzadas.

### **Maestro Reflexivo**

Perrenound (2007), plantea que para un “enseñante reflexivo”, la reflexión se debe convertir en una forma de identidad, algo que sucede constante y permanente hasta que se transforma en un *habitus*. De esta manera, el enseñante se hace consciente de los *esquemas reflexivos* que conforman el *habitus*, los cuales le permiten plantear preguntas, comprender su fracaso, proyectarse en el futuro, y concentrarse en objetivos más definidos entre otras. Estos funcionamientos interiorizados se obtienen con entrenamiento intensivo, para que con el tiempo se inscriba como algo rutinario. Por tanto, el paradigma reflexivo es un emblema de la profesionalización donde los enseñantes se empoderan de su trabajo y su organización.

De este modo, el enseñante reflexivo adquiere un estatus de autoridad en su campo laboral, que se evidencia con las decisiones sabias que toma, ello lo conduce a un proceso continuo de perfeccionamiento.

Complementario con lo anterior, se tiene tres ideas básicas que plantea Schön (1992), conocimiento en la acción, reflexión en la acción y sobre la acción. Conocimiento en la acción, es el conocimiento que se revela en las acciones inteligentes que realiza el docente, su carácter es dinámico, espontáneo y hábil. La reflexión en la acción posee una función crítica, donde el docente piensa en lo que está haciendo mientras lo hace, se distingue por su relevancia sobre la acción presente, es decir, a partir de lo observado se idean y prueban nuevas acciones que reorganizan lo que se está haciendo. Reflexión sobre la acción, es pensar sobre acciones pasadas, reflexionar sobre las acciones realizadas, es pasar a un nivel superior de reflexión, donde se reflexiona sobre la reflexión realizada.

### **2.3 Perspectiva Disciplinar**

#### **Algo de Historia**

La consecución del concepto de función no fue fácil. Al contrario, fue un camino que implicó diferentes definiciones y niveles de abstracción a lo largo del tiempo. A continuación se presenta una pequeña descripción de las transformaciones que ha tenido el concepto a lo largo de la historia para llegar a la usual expresión algebraica  $y = f(x)$ .

Inicialmente se presentan dos representaciones icónicas que sirven para ilustrar el concepto de función: para todo  $x$  en el dominio de  $f$  existe exactamente un  $y$  tal que  $(x, y) \in f$ , por tanto  $y = f(x)$  (Apóstol, 1984).

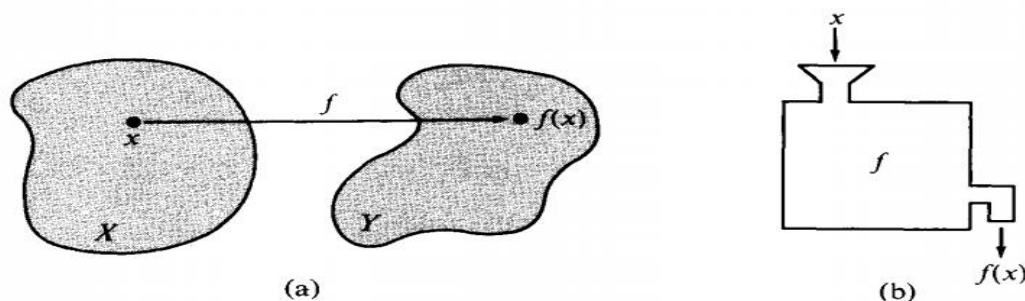


Figura 5. Representación Esquemática del Concepto de Función

**Nota.** Fuente: Libro Calculus Volumen 1 (Apóstol, 1984)

Luego se presenta un breve recorrido histórico por la génesis y la evolución de la noción de función, fundamentado en el trabajo de Jaimes (2012). Dicho concepto emergió de manera implícita a través de registros como las tablas y el lenguaje natural. Ejemplo de ello son los babilonios durante la época antigua (2000a.C-500 a.C), que a partir de del uso de tablillas de astronomía relacionaban los periodos en los cuales se hacía visible un planeta y la distancia angular de dicho planeta al sol. Más tarde, el aporte lo hacen los griegos (500 a.C -500 d.C) que gracias a sus estudios sobre las relaciones entre magnitudes geométricas tales como longitudes, áreas y volúmenes, surgen elementos esenciales para la construcción de este concepto.

La representación gráfica (sin números) de la función se lleva a cabo gracias a Nicolás Óreseme (1323-1382), durante la edad media, a través de la asociación del cambio físico con figuras geométricas. El estudio de fenómenos naturales como la caída libre, el movimiento uniformemente acelerado, en los cuales intervienen la distancia, la velocidad y la aceleración, involucra la idea de cantidades variables dependientes e independientes. Teniendo en cuenta lo anterior, la construcción del concepto de función se asocia al estudio del cambio y del movimiento. Hasta este momento una función se representa a través del lenguaje natural, las tablas y las gráficas (sin números).

Díaz Gómez (2013) plantea que durante la edad moderna (1450-1650), gracias a cuatro desarrollos fundamentales se origina una evolución importante del concepto de función: Primero, la unión del álgebra y la geometría a través de Fermat y Descartes. Segundo, la introducción del movimiento como un problema central en la ciencia con Kepler y Galileo. Tercero, la invención del álgebra simbólica con Vieta y Descartes y por último la invención de la geometría analítica. Todo lo anterior conlleva a la aparición de la función como expresión analítica.

A partir del desarrollo del cálculo diferencial, integral, las ecuaciones diferenciales, el análisis y la teoría de conjuntos (siglo XVII en adelante), surgen nociones importantes asociadas al concepto de función tales como la consideración continua y dinámica de las relaciones funcionales, la función como curva, y los conceptos de correspondencia y relación, los cuales contribuyen al concepto tal y como se conoce hoy en día.

En este orden de ideas, Díaz Gómez (2013) afirma que el análisis de la evolución histórica permite dilucidar algunas ideas pedagógicas, entre las cuales se destaca que: las tareas propuestas por el docente deben propiciar en el estudiante un interés por reconocer regularidades, identificar lo que cambia y cómo cambia. Además propone los siguientes aspectos para lograr una profunda comprensión del concepto de función: interpretar las funciones a través de gráficas, describir situaciones, fórmulas y tablas, y utilizar la tecnología para representar funciones, entre otras.

Finalmente, retomando el recorrido histórico del concepto de función se tiene que:

“En este proceso de formalización de los objetos matemáticos se desecharon ideas intuitivas, representaciones figurales y sobre todo pérdida del contexto específico que les dio “vida”. Por ejemplo, la definición de función en términos de relación entre variables (idea dinámica) por medio



de una expresión analítica (Euler, 1748) se transformó en una conjuntista (estática)” (Hitt, 1998, p. 24)

Lo anterior indica que el concepto de función se ha transformado hasta llegar a la noción estática, la cual es la que prevalece hoy en día, ello se refleja en los textos escolares y portales educativos que sirven como recurso para los docentes, desconociendo aspectos fundamentales como la variabilidad que corresponden a los primeros acercamientos que se dieron a través de la historia y que se relacionan con la noción dinámica de este concepto.

### **Objeto Matemático**

En este punto, es pertinente hacer una breve reflexión acerca de la naturaleza de los conceptos matemáticos, lo que permite precisar algunos lineamientos para su puesta en escena en un aula de clase. Bruno D'Amore (2005) precisa que en las matemáticas los conceptos tienen un matiz especial, ya que remiten a objetos no tangibles, abstractos, colmados de representaciones y variados significados. En ese orden de ideas, se habla más del “objeto matemático” que del “concepto matemático”. En ese sentido el concepto matemático está ligado al significado y se encuentra continuamente en fase de construcción, en palabras de Bruno D'Amore este proceso se establece como “conceptualización”. En otras palabras, el “concepto matemático” se acerca al “objeto matemático” a través de las diferentes representaciones y registros que el sujeto se hace de él. Este significado no es único, dado que depende del contexto y de los saberes previos del sujeto que aprende, lo que implica que el concepto se va transformando y evolucionando hasta lograr ser expresado en un lenguaje matemático, esto es, llegar a un nivel de formalización tan abstracto que el objeto matemático ya no depende de los diferentes registros de representación semiótica que lo

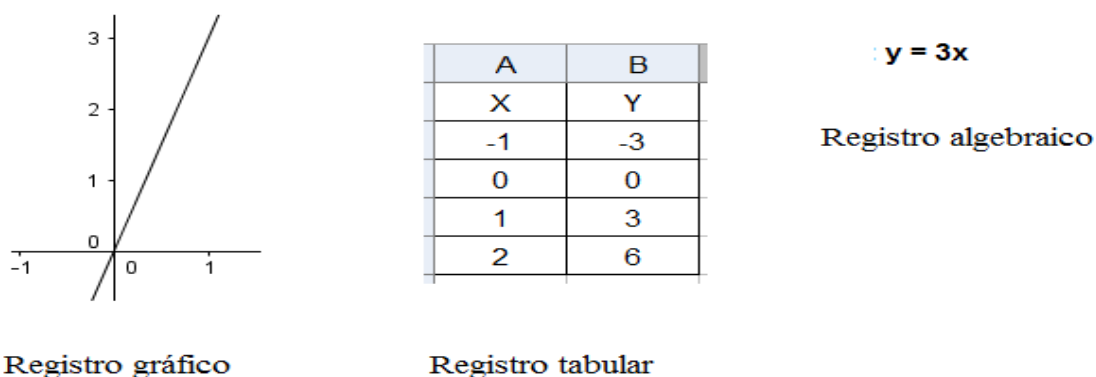
conceptualizaban. Pero en este recorrido del concepto matemático es necesario tener presente lo planteado por Bruno D`Amore, cuando se pretenden integrar estos elementos en los procesos de enseñanza y aprendizaje: el niño no asimila objetos puros sino las situaciones en las cuáles esos objetos tienen roles específicos.

### **El Concepto de Función**

El camino teórico que a continuación sigue para la construcción del objeto matemático de la presente investigación es delimitado por Rico (2012), quien plantea la importancia de identificar tres dimensiones que lo constituye las cuales son: Los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología. Siguiendo a Rico, los sistemas de representación se definen por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otro. La estructura conceptual por su parte, se refiere a los conceptos, propiedades y proposiciones derivados en este caso de la noción de función y por último la fenomenología que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido.

#### ***Sistemas de Representación***

La función lineal se puede presentar mediante diversos registros de representación que son lenguaje natural, icónico, algebraico, gráfico y tabular.



*Figura 6. Registros de Representación de una función lineal*

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de un ejemplo del libro orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas (García et al., 2015)

### *Gráficas Cartesianas*

Esta investigación se fundamenta en dos ideas fuertes del trabajo de Dolores (2007, 2008, 2009), las cuáles no son excluyentes sino que por el contrario se articulan para evidenciar la importancia de la temática en cuestión. La primera, hace referencia al uso social de las gráficas porque posibilitan la comunicación de la información, ellas permiten una visualización de los fenómenos ahí representados. La segunda, plantean que las gráficas favorecen el desarrollo del pensamiento variacional, es decir permiten el estudio del cambio y de la variación.

En este orden de ideas, Dolores exponen los siguientes elementos teóricos.

Reconoce tres niveles en el procesamiento de la información en las gráficas:

- a. Nivel elemental: extraer datos y/o lectura de puntos aislados.
- b. Nivel intermedio: identificar tendencias en intervalos.
- c. Nivel más alto: comprender la estructura de los datos y su comportamiento.

Además, define cinco acciones sistemáticas:

1. ¿Qué cambia?
2. ¿Cuánto cambia?
3. ¿Cómo cambia?
4. ¿Qué tan rápido cambia?
5. ¿Cómo se comporta global y puntualmente la gráfica?

### *Estructura Conceptual*

Las ideas presentadas en torno a la estructura conceptual se fundamentan en los aportes presentados en la parte del recorrido histórico del concepto de función. Desde las matemáticas este concepto tiene dos acepciones, una desde el punto de vista dinámico, en la cual subyace las nociones de variación y dependencia a través de Euler en 1748 y el otro estático desde la perspectiva conjuntista de Bourbaki en 1939.

A continuación se presentan las definiciones formales extraídas del libro de Apóstol (1984). La definición de función que se centra en la relación de dependencia entre variables es: dadas dos cantidades, se dice que la primera está en función de la segunda cuando cada valor de la segunda determina sólo un valor de la primera. La definición de función en el lenguaje de conjuntos es esencialmente la siguiente: dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro

conjunto denominado el recorrido de la función. Este trabajo se enmarca en la perspectiva dinámica, es decir, que retomamos el tratamiento del concepto de función desde la variación.

### *Fenomenología*

El análisis fenomenológico de un concepto consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que dicho concepto es el medio de organización, es decir, ese concepto estructura una serie de fenómenos que lo constituyen. Los fenómenos que ejemplifican el concepto además de tener en cuenta el desarrollo y uso actual de las matemáticas, deben incluir aquellas situaciones que dieron origen (Puig, 1997).

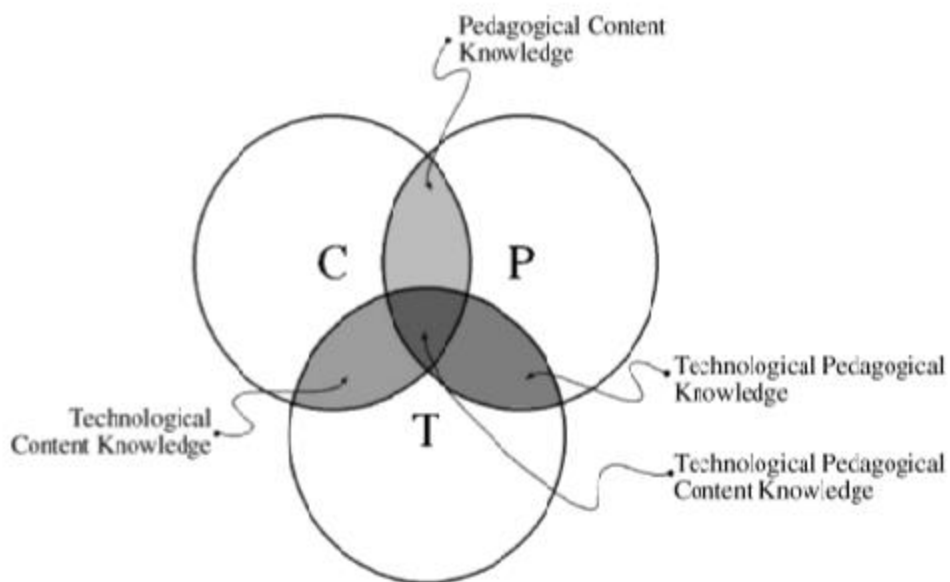
De esta manera, desde una perspectiva fenomenológica del concepto de función se tiene: que las aplicaciones prácticas son diversas. Ejemplo de ello es que se usan para describir aspectos demográficos como el crecimiento de la población, aspectos económicos como puntos de equilibrio financiero, aspectos físicos como la descripción del movimiento, entre otros. De igual forma, en la vida diaria se pueden identificar situaciones en las que unas variables están en dependencia de otras, es decir, hay una relación en que una variable genera condiciones a la otra. Así por ejemplo, el dinero pagado en la carrera de un taxi depende del recorrido. La cantidad de ingredientes necesarios para una receta depende de las ventas realizadas, el sueldo de un empleado depende de las horas de trabajo, entre otras.

## 2.4 Perspectiva Tecnológica

### Uso de las TIC en la Educación

La incorporación de las TIC en las prácticas educativas, no como el deseo o gusto particular de un docente que quiere innovar, sino como una política educativa a nivel nacional, necesita de una gran infraestructura que incluya dotación de equipos, buena conectividad y sobre todo, la capacitación continua de los docentes para lograr un verdadero impacto en las prácticas educativas. De esta manera, sobre los hombros del estado recae el establecer una política educativa en aras de lograr esta meta. Más preciso como lo plantean Martin & Marchesi (2006) para lograr tal fin se requiere de la intervención directa del estado.

Desde esta mirada, Mishra & Coehler (2006) autores del modelo TPACK realiza un gran aporte a todo proceso de impacto de las TIC en la educación, de forma más específica a la incorporación de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este modelo que según sus autores tiene aplicabilidad desde una perspectiva teórica, pedagógica o metodológica, invita a tres voces que lo estructuran: el conocimiento tecnológico, el conocimiento pedagógico y el conocimiento disciplinar. Lo más representativo de este modelo, es la entrada que tiene cada una de estas voces y en torno a ellas es que se da la reflexión para la puesta en escenas de las TIC en el contexto educativo. La siguiente representación icónica permite visualizar el alcance de la propuesta, a través de la intercepción de los tres círculos que representa cada dimensión.



*Figura 7. Modelo TPACK*

**Nota.** Fuente: Artículo Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge (Mishra & Koehler, 2006)

En forma general, los resultados de las consultas bibliográficas sugieren tres caminos en el proceso de incorporación de las TIC: el primero como contenido curricular, el segundo para fortalecer procesos de enseñanza y aprendizaje y el tercero como *mediación instrumental* de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Rojano, 2003; Coll, 2008)

Pero es de interés en esta investigación, aquellos trabajos donde las TIC adquieren el estatus de instrumento, por ende transforma las prácticas educativas (Moreno & Rojano, 1999; Lupiañez & Moreno, 2001; Moreno, 2002; Moreno & Waldegg, 2002; Martín & Marchin, 2006; Coll, 2008; Pedró, 2015). Frente a ello Pedró (2015) plantea que a partir de los resultados del congreso: “Mejorar la educación: ¿qué puede aportar la tecnología?” un lineamiento a seguir en esta ruta de incorporación, es realizar una profunda reflexión desde lo pedagógico y disciplinar, lo que conlleva a definir unos propósitos claros de enseñanza, para que de esta manera se de paso al aporte que

hace el contenido tecnológico en este campo. En palabras de otro autor, "... consiste en considerar las TIC como instrumentos mediadores de los procesos intra e inter-psicológicos implicados en la enseñanza y en el aprendizaje. En este caso, lo que se persigue mediante su incorporación a la educación escolar es aprovechar la potencialidad de estas tecnologías para *impulsar nuevas formas de aprender y enseñar.*" (Coll, 2008, p. 125)

Por otro lado, se cuenta con el modelo SAMR (Sustitución, Aumento, Modificación y Redefinición) quien completa y enriquece la reflexión que hace el docente antes de poner en marcha una actividad que incorpore las TIC, aunque su gran aporte sea para evaluar las prácticas educativas en las que se integran las TIC, este no es un análisis que se da al final de la puesta en escena, por el contrario, su riqueza se presenta cuando ese estudio se realiza de forma *a priori* con respecto a la implementación de la actividad. García Utrera, Figueroa y Esquivel (2014) plantean que esta teoría ofrece una taxonomía que permite tamizar las experiencias desarrolladas por los docentes en sus prácticas educativas con TIC, ya que cada uno de sus niveles caracteriza el uso de las herramientas tecnológicas en las clases. El modelo consta de dos capas cada uno con dos niveles. La primera, es la inferior y corresponde a la *capa de mejoramiento* con los dos niveles de sustitución y aumento, y la segunda, la superior es la *capa de transformación* con los niveles de modificación y reestructuración. Estos niveles que presenta este modelo son jerárquicos y pese a que el ideal es llegar a realizar actividades que estén en la capa superior, la de transformación, el nivel más bajo puede de acuerdo con el propósito de enseñanza ser de gran relevancia y permitir un aprendizaje significativo, es decir, una situación sencilla que se ubique en el primer nivel de sustitución puede lograr un gran impacto en el aprendiz.



Por tanto la secuencia didáctica fruto de este trabajo atravesó primero por las tres grandes perspectivas del modelo TPACK y el discurso desde lo tecnológico lo hizo más potente el modelo SAMR, cuando permite ubicar la propuesta de la secuencia didáctica en la capa de la transformación, ya que el uso del software Geogebra proporcionó un cambio en la disposición de la clase, que gracias a sus funciones propició un ambiente dinámico y de exploración de las gráficas de funciones con comportamientos lineales, que sin el aporte de este software hubiera sido improbable alcanzar.

De esta manera, es menester iniciar con las TIC en las prácticas educativas, ya que en pleno siglo XXI no se puede estar de espaldas a las grandes exigencias de la actual sociedad de la información, donde los estudiantes deben desarrollar pensamiento crítico, realizar un manejo responsable de la información y sobre todo, se deben concientizar que vivimos en comunidad, por eso la relevancia de optar por el trabajo colaborativo.

### **Las TIC en la Educación Matemática**

En el campo de la educación Matemática, son muchos los resultados con respecto a la incorporación de las TIC en las prácticas educativas, pero como se expresó en el apartado anterior, es de interés los trabajos en los que las TIC se consideran *instrumento* de mediación para los procesos de enseñanza y aprendizaje, en especial, aquellos que se ocupan de la construcción de conocimiento matemático.

Para empezar, se presenta una taxonomía que consta de tres momentos que no pueden desligarse y que caracteriza las intervenciones en el aula de matemáticas con herramientas tecnológicas. El primer momento denominado prótesis, alude al uso de algunas funciones de la herramienta para la solución de una situación. El segundo, ampliación, se refiere a hacer lo de antes de una mejor manera, por ello, en esta etapa se utiliza la metáfora de la lupa. El tercer momento el de la reorganización, es considerado un proceso más complejo y la metáfora utilizada es la del microscopio, ya que se llega a otro nivel de la realidad que antes no era posible, hay cambios estructurales en la acción y en la posibilidad de acceder al conocimiento nuevo. Análogamente a este proceso se da el paso de herramienta a instrumento matemático. De esta manera, la instrumentación de la herramienta es un proceso de enriquecimiento que busca mejorar capacidades cognitivas. (Lupiañez & Moreno, 2001; Moreno, 2002; Moreno & Waldegg, 2002; Moreno & Twiggy, 2012)

Por consiguiente, una herramienta adquiere el estatus de instrumento de acuerdo a la forma como es integrada en las prácticas educativas. En consecuencia, es importante reconocer que un instrumento es de naturaleza socio cultural, ello fundamentado en Vygotsky quien afirma que la acción mediadora del instrumento está ligada al entorno social donde se despliega. De ahí, que ese conocimiento construido por el estudiante, depende considerablemente de la herramienta, es decir, el apoyo de la herramienta no es auxiliar, sino que es parte activa en la construcción del conocimiento que se produce. (Moreno & Rojano, 1998; Lupiañez & Moreno, 2001; Moreno, 2002; Moreno & Waldegg 2002; Moreno, 2013). Por tanto, a la luz de la mediación instrumental en una situación problema "... la solución será una pieza de conocimiento que no puede separarse

de la herramienta, más precisamente, de la ruta cognitiva inducida por su presencia” (Moreno & Twigg, 2012, p.27).

Finalmente, es importante considerar que las herramientas computacionales presentan un gran atributo: la ejecutabilidad, el cual permite la manipulación directa sobre los objetos ahí representados. Este beneficio se obtiene por los múltiples sistemas de representación y esquemas interactivos que manejan estos instrumentos. Por consiguiente, el estudiante tiene la posibilidad de procesar la información de cierta manera, construir nuevos significados y vivir una experiencia innovadora. El logro de este resultado está en manos del docente quien debe diseñar e implementar la tarea. (Gómez, 1997; Moreno & Rojano, 1998; Lupiañez & Moreno, 2001; Moreno & Waldegg, 2002).

### **Contexto**

La estructura curricular para el área de Matemáticas dada por el MEN consta de tres componentes: conocimientos básicos, procesos generales y contexto. Aunque a la fecha la atención se la han llevado los dos primeros elementos, el contexto ha cobrado protagonismo, por lo cual emergen diferentes consideraciones en torno a su lugar en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este orden de ideas, el MEN en el año 1999 publica los lineamientos para las Nuevas Tecnologías y el currículo de Matemáticas, en este documento realiza una reflexión muy completa sobre el impacto de la tecnología en la educación matemática y cómo se consolidan en un nuevo contexto propicio para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. “En efecto, existen ya

programas dotados de unas características de interactividad y versatilidad, que propician un contexto y una ayuda para el aprendizaje de determinados aspectos de las matemáticas.” (MEN, 1999, p.35). Cesar Coll (2008) refuerza esta idea cuando plantea que las TIC tienen una serie de características específicas que obtienen un gran impacto cuando se logran crear contextos de uso que aprovechan al máximo dichas potencialidades.

Por otro lado, el MEN (1999) plantea que las calculadoras y los computadores son herramientas que producen cambios sustanciales en la experiencia matemática de los estudiantes, gracias a la manipulación dinámica: posibilita la experimentación, proporciona un ambiente que favorece actividades de investigación y exploración, propicia el autocontrol del trabajo realizado, permite corroborar un resultado todas las veces que sea necesario, realizar chequeos rápidos y oportunos, plantear conjeturas y ponerlas a prueba, modificar ideas gracias a la retroalimentación confiable y rápida y en especial abre el camino hacia el desarrollo del pensamiento matemático avanzado que implica: explorar, descubrir, conjeturar buscar ejemplos, hacer deducciones y poner a prueba argumentos.

En particular para el tema de esta investigación, el documento citado en el párrafo anterior establece una llave importante entre la variación como temática relevante en la educación matemática y el aporte significativo de las herramientas tecnológicas. En principio, una contribución significativa es resaltar que la herramienta permite el tránsito de una comprensión intuitiva visual a un nivel mayor de abstracción y generalización, por otro lado, afirman que “Un aspecto muy importante del pensamiento matemático es la abstracción de lo que no varía. Pero,

por su puesto, reconocer la invarianza implica estudiarla en un proceso de variación. **Los medios dinámicos facilitan llevar a cabo las variaciones.**” (MEN, 1999, p. 30)

Otro aspecto importante es la transformación que se presenta en los roles del docente y el estudiante. Por un lado el proyecto EMAT de México presentado por Rojano (2003) es un ejemplo de las acciones realizada por los estudiantes durante una experiencia que incorpora tecnología en las clases de matemáticas, algunas de ellas son: explorar, formular y validar hipótesis y aprender a partir de los errores. Por otro lado, Pedró (2015) caracteriza al docente como un activador del aprendizaje quien *orquesta los recursos didácticos*. Además, es quien se encarga del proceso de retroalimentación al interior de las aulas. Este tratamiento en primer lugar es direccionado a partir del éxito o el fracaso que haya obtenido el estudiante y en segundo lugar, es favorecido porque las tareas propuestas contienen largos periodos de tiempo con trabajo autónomo, habilitando de esta manera, al profesor para que pueda ofrecer *feedback* individualizado.

### **El Entorno Geogebra**

El entorno Geogebra es un programa diseñado por Markus Hohenwarter en el año 2002 con el objetivo de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este programa se caracteriza por ser un entorno sencillo y potente que facilita la realización de construcciones geométricas y analíticas y permite la interacción inmediata entre el estudiante y dichas construcciones.

Geogebra es fácil de incorporar a las clases porque es gratuito, está disponible en español y además tiene muchos tutoriales y foros que permiten reconocer como es su funcionamiento. El programa combina las posibilidades que ofrece un software de geometría dinámica (SGD) con las que otorga un software algebraico. Además facilita el manejo de varios sistemas de representación a través de tres ventanas que son la gráfica, la simbólica y la tabular, permitiendo el manejo de las tres de forma simultánea. Lo anterior hace que Geogebra se convierta en una buena opción para incorporar las TIC como instrumento que facilita la construcción del conocimiento en el aula de clase.

En la vista gráfica, se pueden trazar puntos, segmentos, polígonos, circunferencias y gráficas de funciones. En esta ventana también es posible captar fácilmente las coordenadas de los puntos trazados en la cuadrícula. En la vista algebraica, se puede visualizar las ecuaciones y expresiones simbólicas de las funciones y finalmente en la vista tabular, a través de una hoja de cálculo, se puede ver las coordenadas vinculadas a los puntos sobre las gráficas.

En este punto es importante mencionar que la herramienta arrastre o “dragging” se constituye en un elemento fundamental que permite el paso de lo estático a lo dinámico, un paso que trasciende no solo la enseñanza de la geometría sino la enseñanza del cálculo: “Encontramos en el uso de Geogebra que el arrastre en el trabajo con funciones, es una herramienta útil para los estudiantes a la hora de resolver problemas” (Silva & De la Torre, 2011, p. 555)

Geogebra también permite la creación de archivos manipulables conocidos como Applets, las cuales son pequeñas o grandes construcciones que sirven de estímulo para responder a ciertas preguntas y de esta manera promover diferentes modos de razonamiento en los estudiantes.

Particularmente en la presente investigación, se privilegia el uso de la vista gráfica y la herramienta arrastre. El software, es utilizado para favorecer procesos de razonamiento ya que le permite al estudiante validar o invalidar sus propias suposiciones o conjeturas de tal manera que sea el mismo quien va reconociendo sus errores y generando conocimiento. También se usa para facilitar el estudio del cambio y la variación a través de procesos de visualización e interacción inmediata con gráficas cartesianas cuyo comportamiento es lineal las cuales han sido construidas previamente.

### 3 Aplicación del modelo MTP

Teniendo en cuenta la fundamentación teórica recopilada en el anterior capítulo se diseña la presente secuencia didáctica: “Viajando por el mundo de las gráficas cartesianas” que consta de dos partes.

La primera parte es una rejilla con la siguiente distribución:

En la parte superior de la rejilla se ubica una fila, en la cual se define el concepto de la competencia que se favorece con el desarrollo de la actividad. Seguidamente la parte inferior se divide en seis columnas; en la primera se nombra el pensamiento a desarrollar, en la segunda la competencia, en la tercera los tres aspectos asociados a la competencia matemática, los cuales son cognitivo, afectivo y tendencia de acción. En la cuarta columna se registran los procesos inherentes a cada uno de los aspectos mencionados anteriormente, en la quinta se redactan los indicadores de cada uno de los procesos asociados a la competencia y por último, en la sexta columna se distribuyen las tareas que aterrizan la propuesta de trabajo para lograr la consecución de cada proceso. A continuación se presenta la tabla descrita:

Tabla 5. *Elementos Estructuradores de la Competencia Matemática Razonar y Argumentar*

<p><b>CONCEPTO DE COMPETENCIA RAZONAR Y ARGUMENTAR</b></p> <p><b>Uso del conocimiento matemático en diferentes contextos, donde el estudiante explora, comprueba y aplica ideas, todo lo anterior mediado por procesos comunicativos y de representación que le permiten elegir y justificar las estrategias y procedimientos utilizados. Además se evidencia una actitud positiva del estudiante frente a los procesos de aprendizaje en los cuales está involucrado (MEN, 1998)</b></p>
---



PENSAMIENTO	COMPETENCIA	ASPECTOS ASOCIADOS A LA COMPETENCIA	PROCESOS	INDICADORES ASOCIADOS A LA COMPETENCIA	TAREAS
VARIACIONAL	RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	COGNITIVO	Identificar	Identifica y enuncia situaciones en las que se presenten una relación de cambio o dependencia entre magnitudes.	Tarea 1
			Explorar y Verificar	Identifica lo que cambia y lo que permanece constante en las coordenadas cartesianas de un punto que se mueve sobre el eje X.	Tarea 2
				verifica si es correcto o no las coordenadas cartesianas asignadas a un punto dado y justifica su respuesta.	Tarea 3
			Formular conjeturas	Determina una tabla de valores a partir de una gráfica y utiliza argumentos para exponer ideas.  Predice comportamientos a partir de una gráfica, teniendo en cuenta las tendencias de cambio.	Tarea 4
			Desarrollar y evaluar argumentos	Expone y evalúa la veracidad de diversas afirmaciones sobre el comportamiento de la relación funcional entre dos magnitudes representado a través de una gráfica cartesiana.	Tarea 5
			Generalizar y sistematizar argumentos	Generalizar la correlación entre las variables, usando diferentes registros de representación para interpretar fenómenos de variación.	Tarea 6
		AFECTIVO	Disposición	Participa activamente en el desarrollo de las tareas propuestas.	Tarea 1
Asume con respeto las observaciones que se realizan	Tarea 2				
Manifiesta esfuerzo y dedicación en la ejecución de las tareas asignadas.	Tarea 3 Tarea 4 Tarea 5 Tarea 6				

		<b>TENDENCIA DE ACCIÓN</b>	Persistencia	Demuestra interés y responsabilidad con los compromisos adquiridos.	Tarea 1 Tarea 2 Tarea 3 Tarea 4 Tarea 5 Tarea 6
				Se ajusta a la dinámica de trabajo, empeñándose en la solución de las tareas.	

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de un ejemplo del libro orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas (García et al., 2015)

La segunda parte, es el cuadernillo de tareas (Anexo A) que se entregó a los estudiantes, el cual está dividido en tres partes: “Parte 1: Inspeccionando el terreno de las gráficas cartesianas” conformada por tres tareas, “Parte 2: ¿Qué cambia?¿Qué permanece constante?” comprendida por dos tareas y “Parte 3: Las gráficas cartesianas imágenes de una situación de variación” que contiene una tarea. En cada una de las tareas, se formularon las expectativas de aprendizaje a corto plazo que según el modelo MTP, se definen como los objetivos de cada tarea, además en el interior del cuadernillo se encuentran los espacios para que los estudiantes registren las respuestas y justificaciones a cada una de las actividades de aprendizaje.

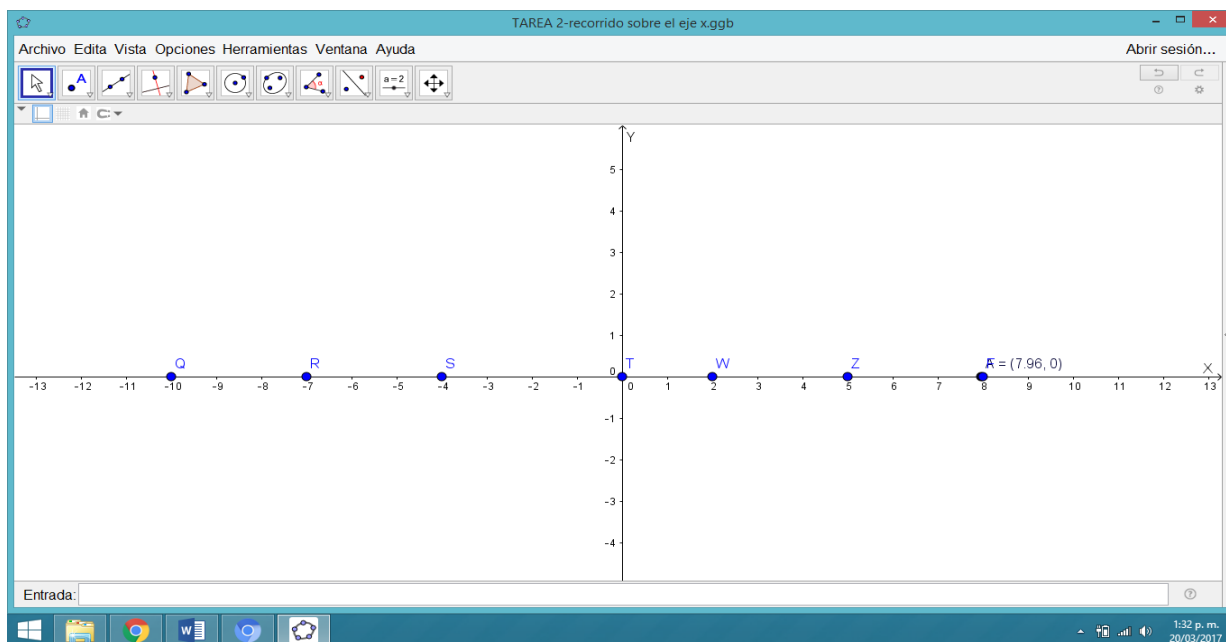
Parte 1. En la primera tarea se presenta un video creado por las investigadoras, a través de una herramienta web llamada Powtoon. El objetivo de este recurso es acercar a los estudiantes a fenómenos de variación de una forma atractiva, ellos deben observar el video: “situaciones de variación en la vida diaria” para identificar los ejemplos representados en él y de esta manera proponer un ejemplo creado por ellos.



Figura 8. Pantallazo Situaciones de la Vida Diaria - Dependencia entre Dos Variables  
**Nota.** Fuente: video en Powtoon creado por las docentes – investigadoras 2017.

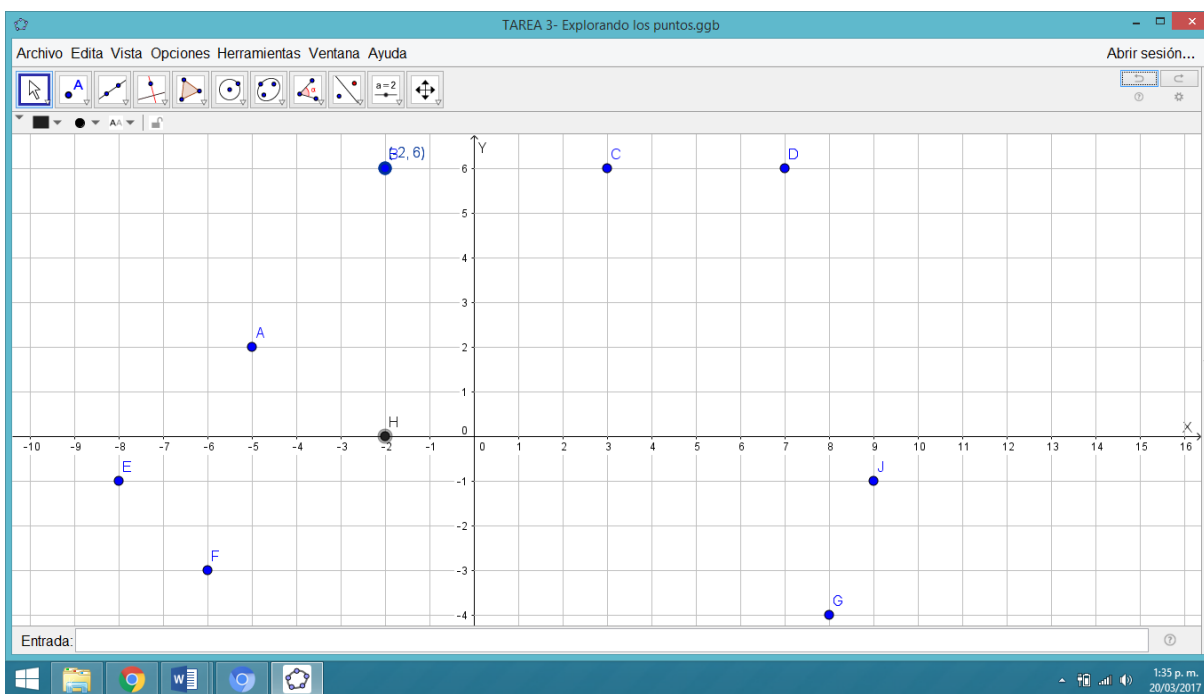
La tarea 2 consta de una tabla en la que se pide registrar las coordenadas de siete puntos que se encuentran sobre el eje “x” (exploración a través del software Geogebra, usando la función de arrastre) y a partir de este procedimiento dar respuesta a tres preguntas abiertas. (Figura 8)

La tarea 3 tiene dos partes, en la primera se usó lápiz y papel para asignar las coordenadas a ocho puntos distribuidos en el plano cartesiano y la segunda parte consiste en verificar las coordenadas usando el software Geogebra. (Figura 9)



*Figura 9. Pantallazo Recorrido Sobre el Eje X*

**Nota.** Fuente: Applet del software Geogebra para desarrollar la tarea 2.



*Figura 10. Pantallazo Explorando los Puntos en el Plano Cartesiano*

**Nota.** Fuente: Applet del software Geogebra para desarrollar la tarea 3.

Parte 2. En la tarea 4, a partir de una gráfica construida con el software Geogebra, que representa la cantidad de litros de agua contenidos en un tanque de almacenamiento durante diez minutos, los estudiantes deben: en la primera pregunta identificar los puntos donde cambia el recorrido de la gráfica, en la segunda registrar en cuatro tablas la cantidad de agua del tanque teniendo en cuenta el tiempo dado, en la tercera describir el fenómeno representado utilizando el lenguaje natural. Finalmente, de la pregunta 4 a la 10 los estudiantes deben resolver siete preguntas de análisis.

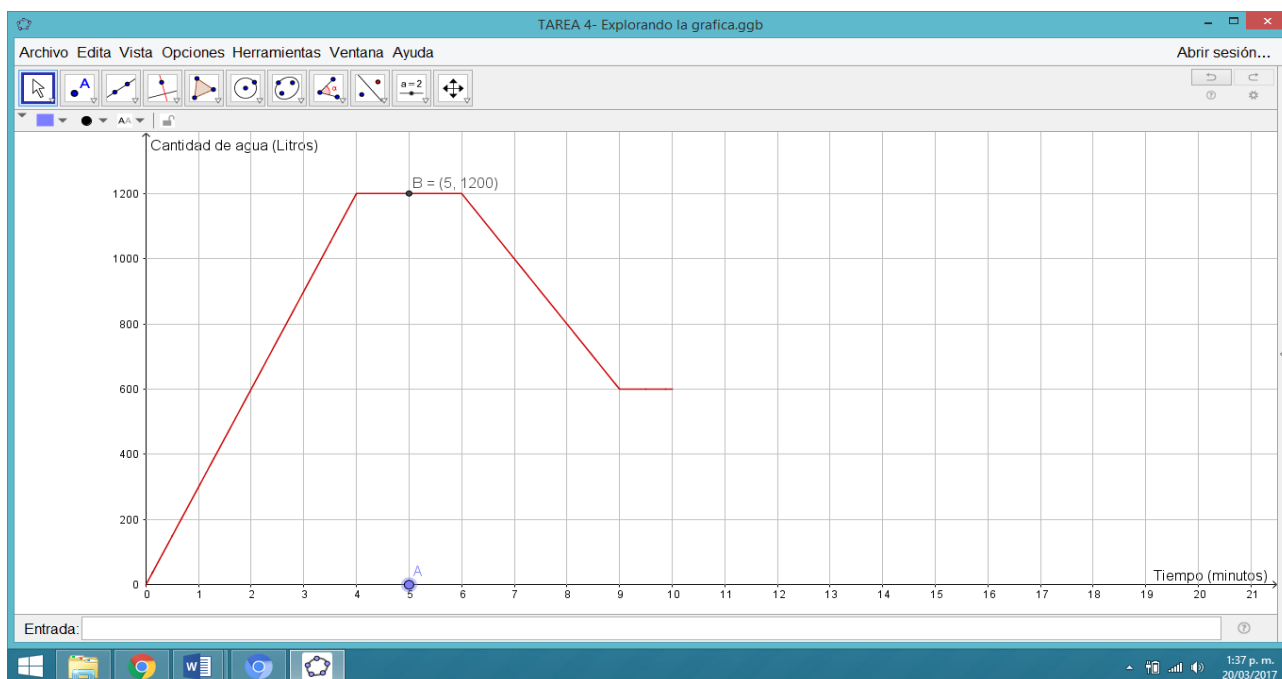


Figura 11. Explorando la Gráfica de una Función con Comportamientos Lineales.

**Nota.** Fuente: Applet del software Geogebra para desarrollar la tarea 4.

En la tarea 5, a partir de tres gráficas que representan cómo un tanque es llenado de forma independiente por tres llaves hasta alcanzar su máxima capacidad, los estudiantes deben dar respuesta a seis preguntas. En la pregunta inicial se les pide que consignen en una tabla la cantidad de agua contenida en el tanque minuto a minuto, para cada una de las llaves. Del punto dos al seis,

se crearon cinco preguntas, las cuales corresponden al modelo presente en las pruebas saber. Este tipo de preguntas se caracterizan por tener tres enunciados (I, II, III) de los cuales el estudiante debe decidir cuál o cuáles son verdaderos para finalmente entre cuatro opciones (A, B, C, D) escoger la correcta.

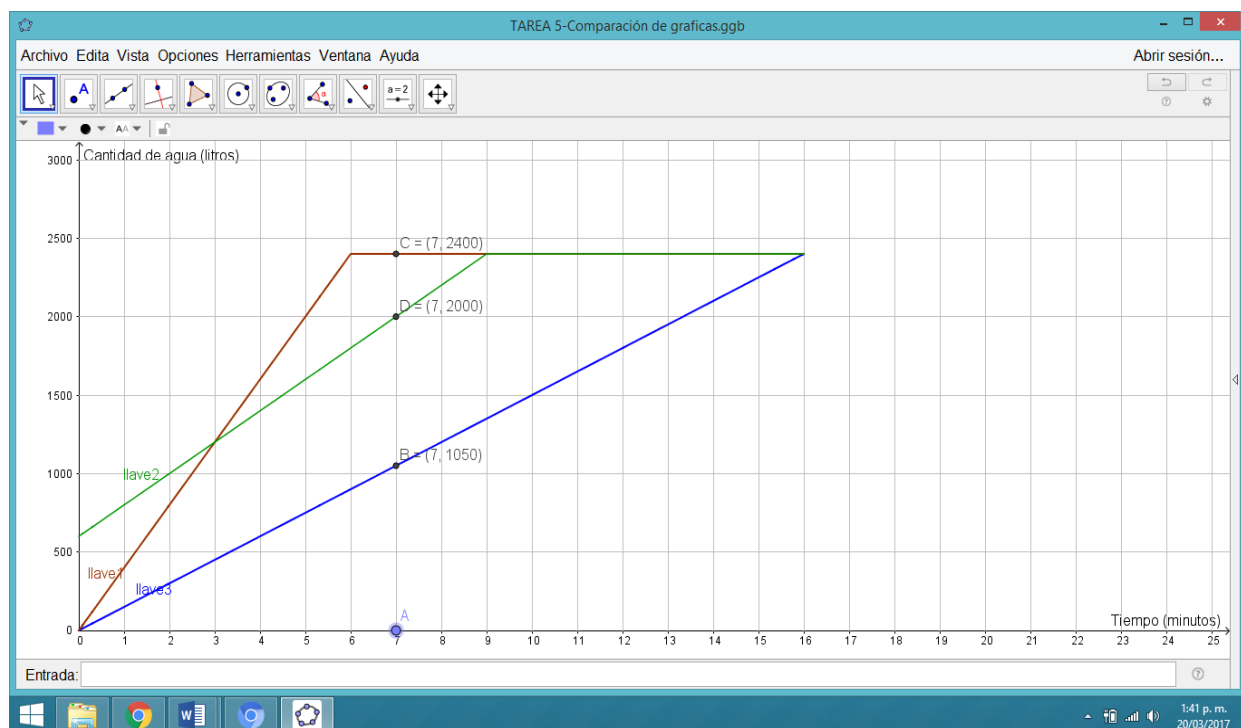


Figura 12. Comparación Gráfica de Funciones con Comportamiento Lineal

**Nota.** Fuente: Applet del software Geogebra para desarrollar la tarea 5.

Parte 3. En la tarea 6, los estudiantes deben analizar y solucionar seis preguntas, a partir de un enunciado que relaciona la variación entre el dinero que se debe pagar por el crédito de una lavadora y el tiempo transcurrido en meses teniendo en cuenta algunas rebajas o descuentos. Primero, ellos deben leer detenidamente la situación, segundo, identificar las variables, y luego responder 4 preguntas acerca de dicha situación. Finalmente se pide a los estudiantes realizar un gráfico cartesiano que represente el fenómeno de variación.

## 4 Marco Metodológico

### 4.1 Enfoque

La Investigación que corresponde a este trabajo adopta el enfoque cualitativo. Este enfoque pretende construir significados acerca de la realidad, motivando la indagación, la profundización y la descripción, a partir de la práctica en el aula y las relaciones que se dan entre el saber, el estudiante y el docente.

Hernández *et al* (2010) afirman que el enfoque cualitativo:

- a. Se basa en un proceso inductivo que consiste en la exploración y el descubrimiento para converger en una perspectiva teórica.
- b. La recolección de datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes, es decir, sus emociones, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos.
- c. El proceso de indagación es abierto y flexible.
- d. El investigador se introduce en las experiencias individuales de los participantes y construye conocimiento.

Es así como la experiencia vivida queda plenamente enmarcada en cada uno de los enunciados descritos en el párrafo anterior.

### 4.2 Tipo de Investigación

El presente trabajo se enmarca en el estudio descriptivo, que según Danhke (1989) citado por Hernández *et al* (2010), se caracteriza por especificar las propiedades, las características y los

perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. La utilidad de este tipo de investigación, radica en la precisión con la que se muestran diversas dimensiones de una situación. Para tal efecto, es necesario definir tanto los componentes como las personas o comunidad con las cuales se recolectará la información. Concomitante con ello, se define el contexto de la institución donde se va a llevar a cabo la investigación, los sujetos participantes y la puesta en escena de la secuencia didáctica (desarrollados posteriormente).

### 4.3 Diseño de Investigación

El diseño de investigación permite visualizar de forma práctica la manera de responder a la pregunta, así como facilitar el cumplimiento de los objetivos trazados. El diseño de la presente investigación es no experimental, que se distingue por no condicionar la situación sino por observarla tal y como se da en el aula de clase de manera natural, para luego poder ser analizada.

Para la implementación de la secuencia didáctica se realizaron cinco sesiones de dos horas cada una, en las que se distribuyeron las seis tareas de la siguiente manera:

Tabla 6. *Cronograma de las Sesiones de la Secuencia Didáctica*

<b>SESIÓN</b>	<b>FECHA</b>	<b>TAREAS</b>
<b>1</b>	Martes 15 de noviembre de 2016	Tarea 1, 2 y 3
<b>2</b>	Miércoles 16 de noviembre de 2016	Tarea 4 del punto 1 al 3
<b>3</b>	Lunes 21 de noviembre de 2016	Tarea 4 del punto 4 al 10
<b>4</b>	Martes 22 de noviembre de 2016	Tarea 5
<b>5</b>	Miércoles 23 de noviembre de 2016	Tarea 6 y Prueba Final



#### **4.4 Método de Estudio**

Esta investigación se basa en un estudio de caso. Stake (2007), afirma que este método consiste en el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes. Según el autor, la esencia del estudio de caso es la descripción, exploración o comprensión de un objeto, un entorno o una situación única, la cual se realiza de manera profunda y detallada. Por tal motivo los instrumentos para la recolección de datos utilizados en esta investigación buscan reproducir de manera específica, cada una de las situaciones que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia didáctica.

#### **4.5 Instrumentos de Recolección de Datos**

Las técnicas de recolección y análisis de datos que se utilizaron en el presente trabajo corresponden a las que sugiere la literatura para el enfoque cualitativo, ellas son:

##### **Secuencia didáctica (cuadernillo)**

Es el instrumento esencial que se utilizó en esta investigación para recolectar, describir, sistematizar y comprender la información producto de la intervención realizada en el aula de clase. Se fundamenta en las componentes descritas por Tobón et al (2010) y el modelo MTP de García *et al* (2015).

### **Grabaciones de audio**

Para la presente investigación se realizaron audios en las tareas 4 y 5 con el objetivo de registrar los argumentos que justifican las respuestas que dieron los estudiantes. No se realizaron grabaciones para las tareas 1 hasta la 3, puesto que ellas pertenecen al nivel de reproducción y son de carácter introductorio tanto a la noción de gráficas, como al manejo del instrumento. De igual manera la tarea 6 que corresponde al nivel de reflexión no fue registrada en audios, ya que busca mayor autonomía por parte del estudiante en la solución de un problema no rutinario. En el Anexo B se encuentra la transcripción de los diálogos que se dieron entre estudiantes y docente-investigadora en torno a las diferentes actividades de aprendizaje. En total fueron veinte audios, en cada uno se especifica el grupo de estudiantes y la tarea con el número de pregunta correspondiente.

### **Diario de campo**

De acuerdo con Hernández et al (2010), un diario de campo es una especie de diario personal dónde se incluye: descripciones del ambiente o contexto, cronología de sucesos, listado de objetos y anotaciones de sentimientos o emociones del propio observador. Paralelo a esto, el investigador realiza interpretaciones de los sucesos, plantea conjeturas y conclusiones preliminares que a su juicio vayan arrojando las observaciones. Este instrumento permitió realizar una descripción abierta por parte de las investigadoras durante los cinco días de la puesta en escena de la secuencia didáctica. Las docentes-investigadoras además de implementar la secuencia didáctica

se encargaron de registrar durante la ejecución, detalles relevantes como fecha, hora, intervención de los estudiantes, consignas y explicaciones de parte de la docente - investigadora.

### **Entrevista abierta y semiestructurada a los estudiantes**

Para Hernández (2010), la entrevista se define como una reunión para intercambiar información entre el entrevistador y el entrevistado. Se clasifica en tres grandes grupos, pero la que se ajusta a los requerimientos de esta investigación es la entrevista semiestructurada. Este tipo de entrevista se basa en una guía de preguntas, pero adicional a ello, el entrevistador tiene la libertad de introducir nuevas preguntas para precisar conceptos u obtener mayor información sobre el tema deseado.

Esta entrevista permitió al investigador orientar el diálogo de tal manera que en principio siguió el guión que estaba previamente elaborado (Anexo C) y de acuerdo con las respuestas recibidas, en ocasiones contra preguntó para obtener más información del entrevistado. Además, se abrió el espacio para que hubiera claridad en las preguntas guías que estructuraban la entrevista.

### **Prueba Diagnóstica**

La prueba diagnóstica realizada para esta investigación consistió en incluir dos preguntas en la prueba institucional del tercer periodo de la I.E. General Francisco de Paula Santander, llevada a cabo el 8 de septiembre de 2016. En el anexo D se encuentran las dos preguntas presentadas a los estudiantes las cuales corresponden al modelo presente en las pruebas saber. Este

tipo de preguntas se caracterizan por tener tres enunciados (I, II, III) de los cuales el estudiante debe decidir cuál o cuáles son verdaderos para finalmente entre cuatro opciones (A, B, C, D) escoger la correcta.

### **Prueba Final**

La prueba final está formada por cuatro preguntas: dos de ellas fueron las mismas que se utilizaron en la prueba diagnóstica y las otras dos se diseñaron exclusivamente para esta prueba conservando la estructura, es decir, corresponden al modelo presente en las pruebas saber descrito en el apartado anterior. Esta prueba se realizó en la última sesión (Anexo E).

#### **4.6 Contexto de la Institución**

La secuencia didáctica se implementó en la Institución Educativa General Francisco de Paula Santander, la cual está ubicada en la comuna 11 de la ciudad Santiago de Cali en la zona urbana. La conforman cinco sedes, entre ellas José Vicente Concha, en la cual se llevó a cabo la investigación. En el PEI de la institución se han caracterizado los grupos familiares de los estudiantes, los cuales viven en barrios con estratos socio-económicos 1, 2 y 3. Además, en su misión se propone formar integralmente a los estudiantes, mejorar el nivel académico a través del desarrollo de competencias y realizar actividades en las que se trabajan los valores institucionales como: la tolerancia, el respeto, la solidaridad, la confianza y la honestidad.

Aunque la institución cuenta con una sala de informática, este espacio es de uso exclusivo del área de tecnología e informática, razón por la cual para la implementación de la secuencia didáctica, fue necesario el acondicionamiento de un salón de clase con siete computadores portátiles, de los cuales dos eran personales y los cinco restantes fueron prestados por los docentes de la institución. La I.E. participó en el año 2015 en el programa Tit@ que dotó con tabletas y video beam a nueve salones de la sede, adicional a ello se entregó a cada docente un computador portátil, estos equipos fueron los que los docentes facilitaron para el desarrollo de la investigación.

#### **4.7 Sujetos Participantes**

Los estudiantes que participaron en la implementación de la secuencia didáctica pertenecían al grado 8-4. Este grupo se seleccionó entre cuatro cursos del mismo nivel (8-1, 8-2, 8-3 y 8-4) debido a que contaba con la mayor intensidad horaria respecto a los otros (cinco horas de algebra y dos horas de geometría), lo cual se consideró como un aspecto favorable para mantener la continuidad en la investigación.

El grado 8-4 estaba conformado por 24 estudiantes, clasificados del siguiente modo 10 mujeres y 14 hombres. El rango de edades oscila entre los 13 y 15 años.

## 5 Análisis de Resultados

Con el ánimo de tener una visión retrospectiva y panorámica de la investigación se realiza la siguiente matriz entre los objetivos específicos y los instrumentos utilizados para la recolección de datos:

Tabla 7. *Triangulación de la Información*

Objetivos Específicos	Instrumentos de Recolección de Datos
1	Prueba Diagnóstica
2	Secuencia didáctica, Grabaciones de Audio, Diario de Campo
3	Prueba Diagnóstica, Secuencia didáctica, Grabaciones de Audio, Diario de Campo, Entrevista a Estudiantes, Prueba Final

### 5.1 Identificación de Necesidades

Con esta visión global, se aborda el primer objetivo de la investigación: identificar las necesidades educativas en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes. Como se muestra en la tabla anterior el desarrollo de este objetivo se apoya en la prueba diagnóstica. Para la construcción de las dos preguntas que conforman dicha prueba, se realizó una búsqueda bibliográfica sobre las temáticas fundamentales de esta investigación, la cual arrojó los siguientes resultados:

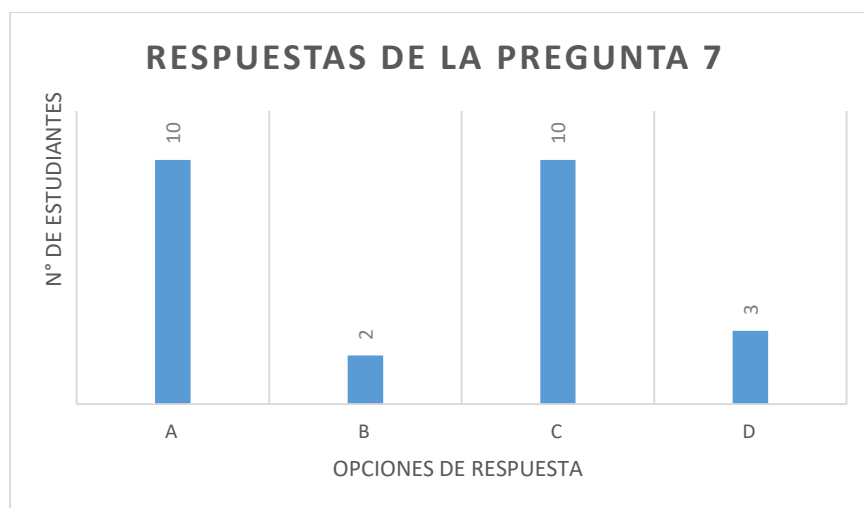
Para el desarrollo del pensamiento variacional las dos nociones fundamentales son el cambio y la variación (MEN, 1998, 2006; Caballero & Cantoral, 2013).

Desde la historia, la función como objeto matemático se puede considerar desde dos enfoques: el estático o el dinámico (Díaz Gómez, 2013).

Las gráficas cartesianas contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional, tienen un amplio uso social y permiten la construcción de significados (MEN, 1998, 2006; García García, 2005; Dolores, 2007, 2008, 2009; Dolores & Cuevas, 2007; Núñez, Banet y Cordón, 2009).

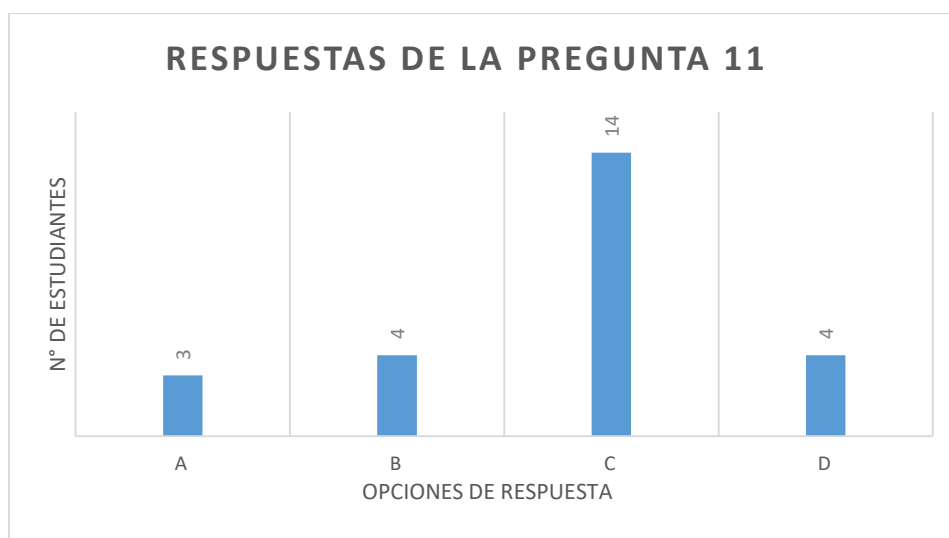
De esta manera, las dos preguntas que se utilizaron en la prueba diagnóstica contienen una gráfica cartesiana que representa una situación de variación (enfoque dinámico), la cual debía ser analizada por los estudiantes para luego seleccionar la opción correcta entre cuatro posibilidades. Además las afirmaciones presentadas en cada pregunta dirigían al estudiante a la obtención de información de forma local y global. Cabe anotar, que los estudiantes que participaron en la investigación habían trabajado en el periodo anterior los movimientos rígidos en el plano cartesiano, es decir, los estudiantes tenían los presaberes necesarios para abordar la temática de estudio.

La prueba fue presentada por los 25 estudiantes del grado 8-4 y arrojó los siguientes resultados:



*Figura 13. Respuesta de la Pregunta 7. Prueba Diagnóstica*

En la pregunta 7 la respuesta correcta es la C, es decir, que sólo el 40% de los estudiantes respondieron correctamente.



*Figura 14. Respuesta de la pregunta 11. Prueba Diagnóstica*

En la pregunta 11 la respuesta correcta es la D, es decir, que sólo el 16% de los estudiantes respondieron correctamente.



De la búsqueda bibliográfica se tiene que: Núñez, Barden y Cordon (2009) atribuyen la dificultad en el uso e interpretación de gráficas cartesianas a factores lingüísticos y a la poca importancia que la enseñanza habitual le concede. García García (2005) recalca que las dificultades al interpretar las representaciones gráficas es por el poco uso que se hace de ellas en las aulas. Dolores (2008) afirma que el sistema educativo poco ha hecho por formar esas habilidades básicas que permitan al estudiante comprender y hacer uso de las gráficas socialmente compartidas.

Los bajos resultados obtenidos en la prueba diagnóstica coinciden con los estudios antes mencionados y evidencian la necesidad de diseñar una propuesta de trabajo para el desarrollo del pensamiento variacional a través de las gráficas cartesianas, pero no desde un enfoque tradicional, es decir, aquel que se limita a hacer corresponder el bosquejo de una función con la expresión algebraica. A cambio de ello, retomar le génesis dinámica del concepto de función y escoger un contexto donde por medio de una correlación de dos magnitudes (Tiempo Vs Cantidad de agua en un tanque) se estudie como ocurre el cambio y la variación entre dichas magnitudes.

## **5.2 Diseño e Implementación de la Secuencia Didáctica**

Para dar respuesta al segundo objetivo: diseñar e implementar una secuencia didáctica que estructure la variación y el cambio, a la luz del uso de las gráficas cartesianas, como elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional. El modelo MTP propuesto por García et al. (2015) proporcionó la ruta para articular los elementos que conforman la secuencia didáctica fruto de este trabajo. Este camino inicia con las orientaciones para realizar una búsqueda

bibliográfica pertinente. La literatura encontrada sirvió de fundamento para que las docentes-investigadoras diseñaran cada una de las tareas que estructuran la secuencia didáctica (Anexo A). Complementario con ello, se envió la carta de consentimiento (Anexo F) a los padres o acudientes de los estudiantes participantes del proyecto, para así dar paso al proceso de implementación.

### **5.3 Evaluación de la Implementación de la Secuencia Didáctica**

Con respecto al tercer objetivo: evaluar la implementación de una secuencia didáctica basada en el reconocimiento de las características de las gráficas cartesianas que movilizan el desarrollo del pensamiento variacional. Se toma de referencia cuatro categorías de análisis para la presente investigación: las TIC en la secuencia didáctica, las gráficas cartesianas, la competencia razonar y argumentar y el aprendizaje de los estudiantes.

#### **Las TIC en la Secuencia Didáctica.**

La incorporación del software educativo Geogebra en el diseño de las tareas inicia con la familiarización de los estudiantes con la función de arrastre (tarea 2). Esta decisión se toma con la intención que el estudiante adquiriera el dominio de la herramienta y logre un mejor desempeño en las tareas 4 y 5, que presentan un nivel mayor de complejidad. Esta postura se apoya en el trabajo de Moreno (2013), que para el proceso de capacitación de los docentes, inició con el conocimiento técnico de la herramienta tecnológica, para luego dar paso al conocimiento matemático y de esta manera alcanzar la *fluidez digital y conceptual* que se requiere. La anterior directriz fue un acierto en el diseño secuencial de las tareas desde lo tecnológico, lo cual se refleja en el desempeño que

tuvieron los estudiantes en la tarea 5 y lo que expresaron en la entrevista. A continuación se presenta un ejemplo que evidencias cada aspecto.

La fluidez digital adquirida por el estudiante le permite resolver correctamente la pregunta 6 de la tarea 5 (Audio N° 13). El estudiante extrae la información pertinente de la representación gráfica que suministra el recurso tecnológico, ya que de forma explícita expresa que "... en la gráfica se puede ver...". De esta manera, la información obtenida le proporciona los argumentos necesarios para analizar las opciones, descartar y escoger la correcta, es decir, el estudiante logra una sinergia con la función de ejecutabilidad de la herramienta que le permite llegar a la respuesta correcta.

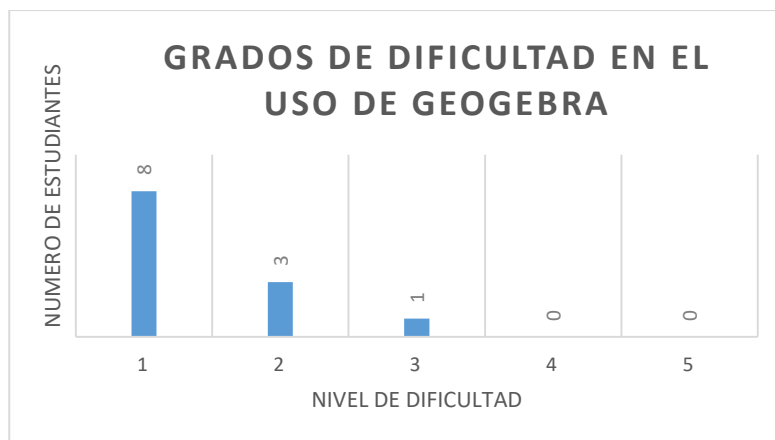
**Profesora:** "Pregunta No. 6"

**Estudiante 1:** "Bueno, en la pregunta No. 6, la respuesta correcta es la A, uno solamente, ya que en la gráfica se puede ver que la llave 3 demora 16 minutos en llenar, o sea que emplea más tiempo para llenar que las otras dos llaves, que es la llave 1 que demora 6 minutos y la llave 2 que se demora 9 minutos.

La dos es falsa porque la cantidad que vierte entre el minuto 2 y 3 es la misma a la que vierte en el minuto 7 y 8.

Y la afirmación tres es falsa porque entre el minuto 8 y 9, la llave 3 sólo vierte 150 litros de agua"

En cuanto a los resultados de la entrevista el 92% de los estudiantes manifiestan que fue fácil el manejo del software, este valor se obtiene con las respuestas dadas a la pregunta E (Anexo C), que indaga sobre el grado de dificultad que tuvieron los estudiantes para acceder y manipular las tareas dinámicas en el software Geogebra. La mayoría de ellos otorgaron un nivel bajo en la dificultad (1 y 2). Ello se evidencia en el siguiente gráfico:



*Figura 15. Grado de Dificultad en el Uso de Geogebra*

Lo anterior se complementa con un fragmento de la entrevista donde el estudiante argumenta por qué da una valoración mínima a la dificultad del uso del software:

*Profesora:* “¿Cómo calificas el grado de dificultad para acceder y manipular las tareas dinámicas en el software Geogebra, teniendo en cuenta que 1 es fácil y 5 es difícil?”

*Estudiante:* “Mi calificación del software Geogebra, eh fue de 1 porque..., me resultó fácil manipularlo, y porque tenía la gráfica ahí, y era nada más mover el punto y se ubicaba más fácil.”

Otras de las bondades al incorporar el recurso tecnológico en el diseño de las actividades es que facilita el trabajo autónomo de los estudiantes. Ello permite que la docente-investigadora realice el proceso de feedback individualizado y regule las discusiones que se presentan al interior de los grupos (Pedró, 2015). En el audio 9 (Anexo B) los integrantes del grupo dos, llaman a la docente-investigadora para que medie en la discusión en torno a la respuesta de la pregunta 9 de la tarea 4. Al acercarse la docente al grupo dos, uno de los estudiantes toma la palabra y dice: “... les irá a gustar mi respuesta... allí están diciendo si se mantiene el comportamiento o sea hasta el minuto 10, sería de 3 en 3 pues se mantiene 10 por 3”. Esta solución de la pregunta refleja el

dominio que tiene el estudiante de la estructura matemática multiplicativa, por tanto, la labor de la docente-investigadora es orientar la discusión de forma que el saber de ese estudiante permita a sus compañeros comprender la situación y dar una respuesta concertada. Cabe resaltar que la docente-investigadora puede centrar su atención en el grupo dos, porque los demás grupos se encuentran analizando y desarrollando las tareas propuestas en la secuencia. A continuación se presenta un fragmento del diálogo anteriormente descrito:

**Estudiante 1:** “cómo les irá a quedar a ellos la respuesta y si les irá a gustar mi respuesta, vamos a responder la pregunta 9.

Si se mantiene el comportamiento registrado durante los cuatro primeros minutos, cuál será la cantidad de agua en el tanque al cabo de 10 minutos?

Ellos dicen que no saben y yo pues... allí están diciendo si se mantiene el comportamiento o sea hasta el minuto 10, sería de 3 en 3 pues se mantiene 10 por 3”

**Estudiante 2:** “ok. 10 por 3..... qué?”

**Profesora:** “cuál es la respuesta?”

**Estudiante 1:** “lo que da esa operación y yo no sé si le gustará”

**Estudiante 2:** “pero es que está en el minuto 10”

**Profesora:** “cuál será la cantidad de agua en el tanque al cabo de 10 minutos. Cuál es?”

**Estudiante 2:** “600? Ahí dice”

**Estudiante 1:** “no, no puede ser 600, hermana porque dice si... siii”

**Profesora:** “cuál es? Dame la respuesta?”

**Estudiante 1:** “haber muchachos...”

**Otros estudiantes:** “yo no sé”

**Estudiante 1:** “profesora 10 por 3 es igual a 30... trescientos”

**Estudiante 2:** “yo digo que no, porque se supone que...”

**Profesora:** “es 10 por cuánto?”

**Estudiante 1:** “pues si cada minuto aumenta 300”

**Profesora:** “300 tienes que tener cuidado con eso”

**Estudiante 1:** (hace cálculos)

**Profesora:** “3 por 1 igual 3 y cuantos ceros hay? El trescientos cuantos ceros tiene?”

**Estudiante 1:** “dos”

**Profesora:** “y el diez?”

**Estudiante 1:** “uno”

**Profesora:** “entonces y 3 por 1”

**Estudiante 1:** “3000?”

**Profesora:** “Entonces cuál es la respuesta?”

**Estudiante 1:** “3000”

**Profesora:** “3000, listo, tu porque sabes que sabes, que da eso?”

**Estudiante 2:** “en la nota”

**Estudiante 1:** “no lo había notado yo lo estaba diciendo porque si se mantiene el comportamiento ósea ese comportamiento, esa rutina de 300 en 300”. “Ellos se están guiando por la tabla”

**Profesora:** “Entonces como explicamos eso, paso a paso para que ellos lo entiendan. Ahí, utiliza la gráfica”

Por otro lado, en la entrevista también se puede evidenciar ese proceso de retroalimentación realizado por la docente-investigadora, en ella, los estudiantes manifestaron que una de las acciones que realizó la docente-investigadora fue la intervención oportuna al interior de los grupos. Esto se muestra con la respuesta dada por los estudiantes a la última pregunta de dicha entrevista: ¿Describe las acciones en las que participo tu profesora durante la investigación en el salón de clase?

**Estudiante A:** “Cuando no entendíamos venía y nos explicaba porque la llamábamos”.

**Estudiante B:** “Por ejemplo, cuando teníamos alguna duda nosotros consultábamos a la profesora y ella nos quitaba esa duda. Cuando no entendíamos algo lo explicaba. Cuando uno daba una idea, otro daba otra, nosotros la llamábamos para tener la opción más acertada”

### **Gráficas Cartesianas**

En la segunda sesión se abordaron sólo las tres primeras preguntas de la tarea 4. Esto se debe a que los estudiantes tenían que realizar operaciones de conversión entre tres registros de representación que son: gráfico, tabular y lenguaje natural. Como lo afirma Duval (2004), el paso de un tipo de representación a otro no ocurre de manera natural e inmediata, sino que requiere de un proceso de enseñanza. Esto se reflejó en la solución de cada una de esas preguntas.

En la primera pregunta, los estudiantes debían identificar en la gráfica representada en el software Geogebra, los puntos donde cambia el recorrido de la gráfica. Consultando el diario de campo se evidencia que en esta parte hubo mayor intervención de la docente-investigadora quien realizó la gráfica en el tablero para que toda la clase en conjunto, pudiera identificar los puntos donde cambia de comportamiento la gráfica y por consiguiente dar respuesta a la primera pregunta.

A continuación se muestra un extracto del diario de campo:

### Sesión 2.

**Fecha:** Miércoles 16 de noviembre de 2016

**Hora de inicio:** 1:30 p.m. **Hora final:** 3:30 p.m.

La sesión inicia entregando el material de la clase a cada uno de los grupos ya establecidos desde la sesión anterior. El día de hoy ha sido necesario abordar de manera conjunta la resolución de la pregunta 1 perteneciente a la tarea 4. A los estudiantes les causa gran dificultad identificar y expresar en palabras los puntos donde cambia el recorrido de la gráfica. Por tal motivo, la docente investigadora replica la gráfica en el tablero y hace pasar a los estudiantes para que señalen los puntos en los cuales cambia el comportamiento de la gráfica.

Finalmente los estudiantes lograron realizar el análisis global de la gráfica e identificaron los puntos en los cuales cambia el recorrido, tal como se muestra a continuación:

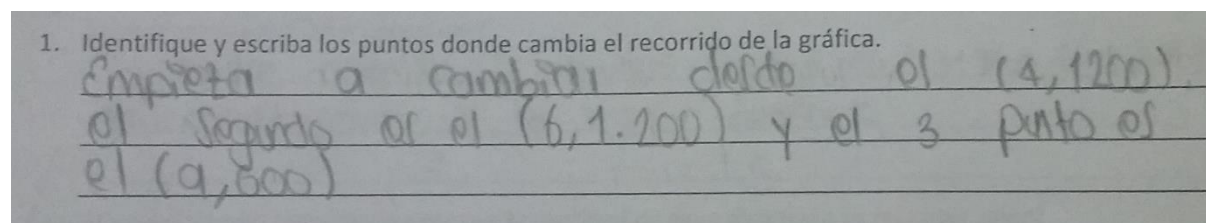


Figura 16. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 4

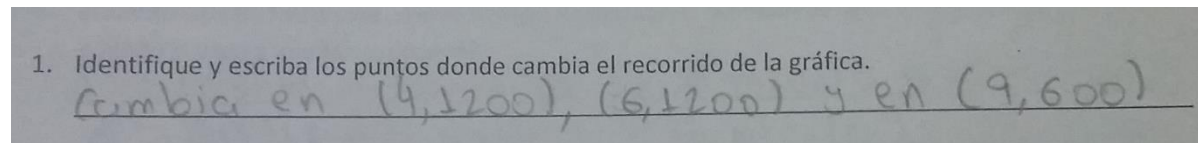


Figura 17. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 6

Por otro lado, en el momento de la puesta en escena de la pregunta 1, se hace evidente una reflexión en acción (Schön, 1992). En el diseño ya se habían contemplado las dificultades que implica la conversión entre registros, lo que condujo a planear la tarea tal y como se propuso. Sin embargo, las dificultades que se presentaron en el momento indujeron a la docente-investigadora a tomar decisiones en la marcha que provocaron la reorganización de la actividad, es decir, que aunque no estaba planeado dibujar la gráfica en el tablero y solicitar la participación de los estudiantes para que sobre ella marcaran los puntos requeridos, este cambio permitió desarrollar de manera satisfactoria la tarea.

En la segunda pregunta los estudiantes debieron registrar en tablas los valores correspondientes a la ordenada teniendo en cuenta los diferentes tramos de la gráfica. En el registro del grupo 4, en la columna donde debían anotar la ordenada del punto escriben la pareja ordenada. Lo anterior evidencia que a los estudiantes se les dificulta la congruencia entre el registro gráfico y tabular (Duval, 2004).

2. Registre en las siguientes tablas los valores de cada tramo de la gráfica.

Tiempo	Cantidad de agua
0	0,0
1	1,300
2	2,600
3	3,900
4	4,1200

Tiempo	Cantidad de agua
4	4,1200
5	5,1200
6	6,1200

Tiempo	Cantidad de agua
6	6,1200
7	7,1000
8	8,800
9	9,600

Tiempo	Cantidad de agua
9	9,600
10	10,600

Figura 18. Respuesta a la Pregunta 2 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 4



En la tercera pregunta, la dificultad se hace más evidente ya que la conversión se da entre un registro monofuncional (gráficas cartesianas) y otro de tipo plurifuncional (lenguaje natural) (Duval, 2004). En este punto es necesario que se realice una mirada retrospectiva con respecto a las conclusiones elaboradas en los dos puntos anteriores, las cuales daban cuenta de los diferentes comportamientos que presentaba la gráfica. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de corregir, reelaborar, complementar sus producciones, para de esta manera recopilar todos los argumentos que finalmente les permitieron describir de forma verbal el fenómeno representado en la gráfica. La decisión de dedicarle toda la sesión de trabajo al desarrollo de estas preguntas permitió obtener resultados satisfactorios como las que se muestran a continuación:

3. Teniendo en cuenta los valores consignados en las tablas, describa de forma verbal el fenómeno "Cantidad de agua en un tanque de almacenamiento durante un tiempo determinado".

(En la primera tabla) desde el minuto 1 poseo 300 L. de agua al minuto 2 poseo otros 300 litros así sucesivamente hasta el M 4, desde el minuto 4,5,6 se estabiliza con 1200 litros, luego del minuto 6 al 7 disminuye 200 y del minuto 7 al 9 va variando de 200 en 200 y llega a 600 litros y se vuelve estable hasta el minuto 10

Figura 19. Respuesta a la Pregunta 3 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 1

3. Teniendo en cuenta los valores consignados en las tablas, describa de forma verbal el fenómeno "Cantidad de agua en un tanque de almacenamiento durante un tiempo determinado".

Se aumenta el tiempo y la cantidad durante 4 minutos luego mantuvo constante durante 2 minutos, disminuyó durante 4 minutos y se mantuvo constante durante 1 minuto en el tanque de almacenamiento.

Figura 20. Respuesta a la Pregunta 3 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 6

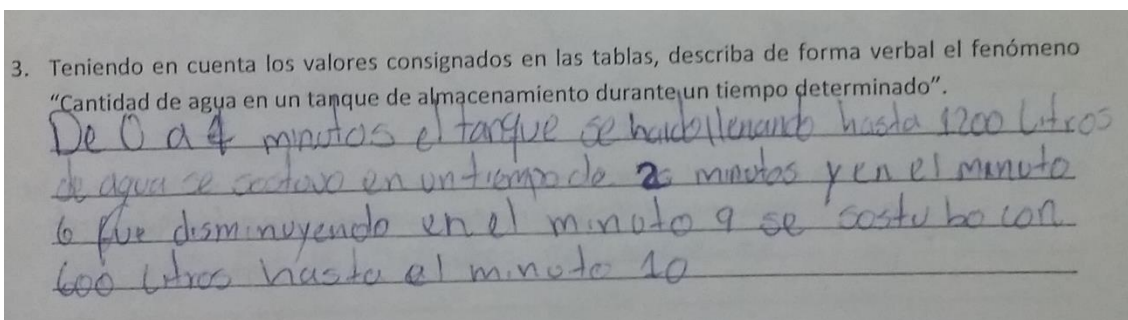


Figura 21. Respuesta a la Pregunta 3 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 7

### Competencia Razonar y Argumentar

A continuación se presentan evidencias de como los estudiantes lograron alcanzar las expectativas a corto plazo, es decir, los objetivos de cada tarea que dan cuenta de los subprocesos que se relacionaron con la competencia razonar y argumentar. Es importante retomar el resultado de la investigación de Solar, Azcarate y Deulofeu (2012) quienes afirman que para caracterizar la competencia debe asociarse con un tema matemático. En particular para la presente investigación se van a utilizar los siguientes subprocesos: identificar, verificar, explorar, hacer conjeturas, desarrollar, evaluar, generalizar y sistematizar argumentos (MEN, 2014), interceptados con los saberes en torno a las gráficas cartesianas con comportamientos lineales.

**Identificar:** el estudiante identifica y enuncia situaciones en las que se presente una relación de cambio o dependencia entre magnitudes.

## SESIÓN I: INSPECCIONANDO EL TERRENO DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS

### TAREA 1

A partir de la observación del video "Situaciones de variación en la vida diaria", enuncie una situación en la que se presente una relación de cambio o dependencia entre magnitudes, describa cómo se manifiesta la correlación.

La cantidad de calorías quemadas al correr  
depende de los metros o kilómetros recorridos.

Figura 22. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 1. Grupo 1

## SESIÓN I: INSPECCIONANDO EL TERRENO DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS

### TAREA 1

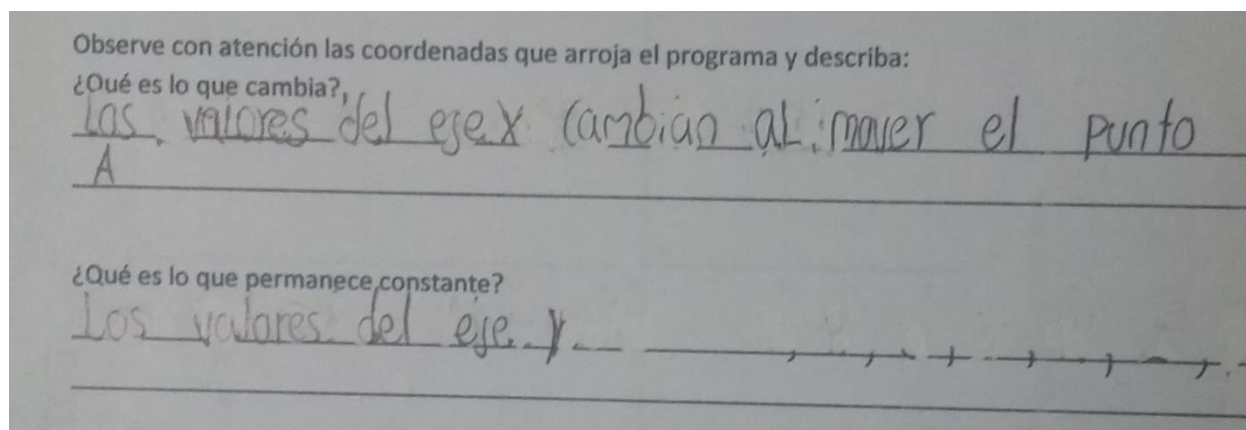
A partir de la observación del video "Situaciones de variación en la vida diaria", enuncie una situación en la que se presente una relación de cambio o dependencia entre magnitudes, describa cómo se manifiesta la correlación.

De acuerdo al número de estudiantes se asigna  
el número de puestos a cada salón.

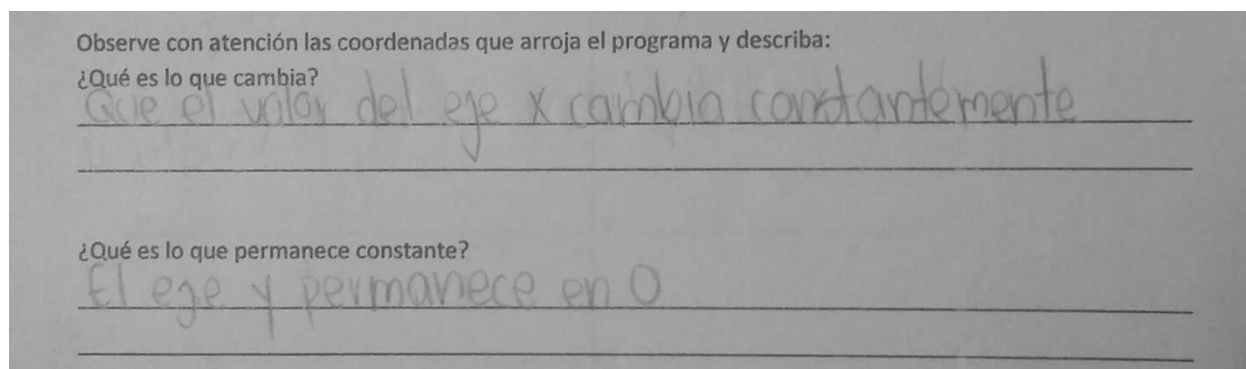
Figura 23. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 1. Grupo 6

En esta primera tarea se quiere dar prioridad a uno de las tres dimensiones de un objeto matemático, la fenomenología, es decir, reconocer aquellos contextos, situaciones o problemas que le dan sentido al concepto (Rico, 2012). Después de ver el video los estudiantes plantean ejemplos de situaciones cotidianas en las que son evidentes las dos magnitudes y la correlación que hay entre ellas. Esta primera tarea es una ambientación para todo el proceso que se desarrollará y se encuentra en el primer nivel de complejidad, el de reproducción (García et al., 2015).

**Explorar:** el estudiante identifica lo que cambia y lo que permanece constante en las coordenadas cartesianas de un punto que se mueve sobre el eje X.



*Figura 24. Respuesta a la Pregunta 1 y 2 Perteneciente a la Tarea 2. Grupo 1*



*Figura 25. Respuesta a la Pregunta 1 y 2 Perteneciente a la Tarea 2. Grupo 2*

Con estas preguntas de la tarea 2, a través del estudio de lo que cambia y permanece constante mediante el software Geogebra Después de la exploración del programa y registrar las coordenadas de los puntos en una tabla, los estudiantes utilizan para su justificación los términos que estructuran las coordenadas de un punto, valores en el eje “x” (horizontal) y los valores del eje

“y” (vertical). El desarrollo de esta tarea busca dar ese tratamiento algorítmico a las gráficas cartesianas, ya que son una representación monofuncional (Duval, 2004).

**Verificar:** el estudiante verifica si es correcto o no las coordenadas cartesianas asignadas a un punto dado y justifica su respuesta.

### TAREA 3

Utilizando los recursos de lápiz y papel asigne a cada punto dado las coordenadas que le corresponden.

Luego consulte el archivo denominado TAREA 3- Explorando los puntos.ggb. En dicho archivo encontrará nuevamente la interface del programa Geogebra en el cual podrá visualizar los mismos puntos W, Z, F, T, S, R y Q ubicados en el plano cartesiano que se entregó impreso. Verifique las coordenadas de los puntos asignados en la tarea anterior y responda:

Cantidad de aciertos 8

Cantidad de desaciertos 0

Cuáles creen que fueron los motivos, causas o razones que te llevaron a tener los desaciertos. Explica.

Por que fuimos encuentra que el eje x siempre  
va de primero

*Figura 26. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 3. Grupo 2*

**TAREA 3**

Utilizando los recursos de lápiz y papel asigne a cada punto dado las coordenadas que le corresponden.

Luego consulte el archivo denominado TAREA 3- Explorando los puntos.ggb. En dicho archivo encontrará nuevamente la interface del programa Geogebra en el cual podrá visualizar los mismos puntos W, Z, F, T, S, R y Q ubicados en el plano cartesiano que se entregó impreso. Verifique las coordenadas de los puntos asignados en la tarea anterior y responda:

Cantidad de aciertos 8  
 Cantidad de desaciertos 0

Cuáles creen que fueron los motivos, causas o razones que te llevaron a tener los desaciertos. Explica.

porque empezamos por el eje X y termina  
por el eje Y.

Figura 27. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 3. Grupo 3

**TAREA 3**

Utilizando los recursos de lápiz y papel asigne a cada punto dado las coordenadas que le corresponden.

Luego consulte el archivo denominado TAREA 3- Explorando los puntos.ggb. En dicho archivo encontrará nuevamente la interface del programa Geogebra en el cual podrá visualizar los mismos puntos W, Z, F, T, S, R y Q ubicados en el plano cartesiano que se entregó impreso. Verifique las coordenadas de los puntos asignados en la tarea anterior y responda:

Cantidad de aciertos 8  
 Cantidad de desaciertos 0

Cuáles creen que fueron los motivos, causas o razones que te llevaron a tener los desaciertos. Explica.

porque tuvimos <sup>los</sup> dificultad en encontrar la ubicación de puntos entre  
los ejes X y Y, es decir que para esto tomabamos de referencia  
el eje X antes que el Y

Figura 28. Respuesta a la Pregunta 1 Perteneciente a la Tarea 3. Grupo 5

Para el proceso de verificación, los estudiantes utilizan el recurso tecnológico. Aunque esta pregunta estaba proyectada para que los estudiantes analizaran cuales fueron las razones por las que obtuvieron desaciertos, los estudiantes terminan argumentando la razón de sus aciertos. Por

tanto, el trabajo realizado en la tarea dos, dieron los fundamentos para desarrollar correctamente este punto y confirman lo planteado por Duval del tratamiento algorítmico que debe darse a este tipo de representación.

**Formular conjeturas:** el estudiante predice comportamientos a partir de una gráfica, teniendo en cuenta las tendencias de cambio.

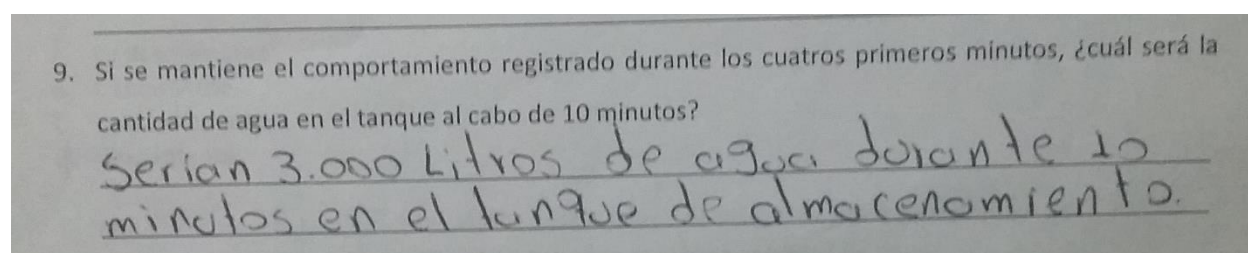


Figura 29. Respuesta a la Pregunta 9 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 6

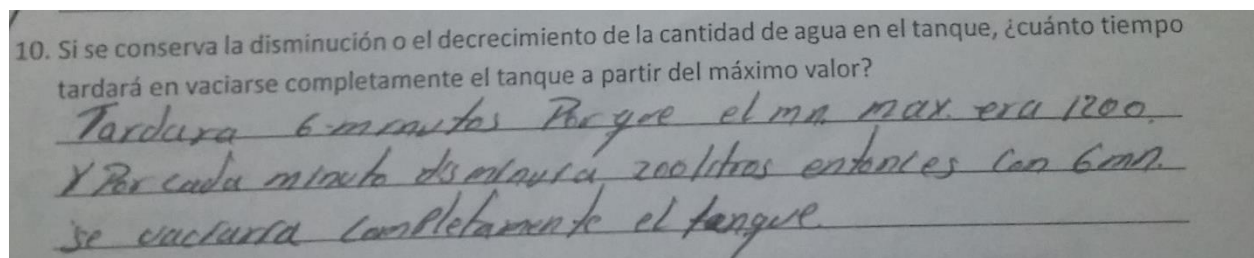


Figura 30. Respuesta a la Pregunta 10 Perteneciente a la Tarea 4. Grupo 2

Para analizar este proceso se tuvo en cuenta las preguntas 9 y 10 de la tarea 4 (Anexo A) que están relacionadas con la extrapolación en la grafica (Duval, 2004), es decir, que a partir de una tendencia los estudiantes son capaces de predecir un comportamiento. En la pregunta 9, partiendo del fenómeno llenado de un tanque, que implica un crecimiento constante de 300 en 300, el estudiante debe hallar la cantidad de agua en el tanque transcurrido diez minutos. Para la

pregunta 10, el fenómeno a tener en cuenta es el vaciado, por tanto, se presenta un decrecimiento constante de 200 en 200, pero en este caso se debe analizar el comportamiento de la variable tiempo ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse completamente el tanque a partir del máximo valor?

**Desarrollar y evaluar argumentos:** el estudiante utiliza argumentos para exponer ideas. A continuación se presenta un fragmento de las grabaciones de audio realizadas, donde el estudiante ha extraído toda la información pertinente de la gráfica dinámica que le suministra el software Geogebra, para argumentar como después de la exploración y el análisis de cada afirmación, llega a la conclusión que la pregunta 4 de la tarea 5 no tiene respuesta. En este punto, es importante aclarar que pese a las revisiones realizadas el error que presenta esta pregunta no fue detectado.

**Audio N° 16**

**Grupo N° 3**

**Tarea 5, Pto 4**

**Profesora:** “Pregunta No. 4”

**Estudiante 1:** “En la pregunta 4 ninguna de las afirmaciones es correcta porque en el minuto 2 el tanque no registra la mayor cantidad en el agua con el llenado.

En la segunda a partir del minuto 6, la cantidad de agua de llenado no es fija entre el 5 y 8 minuto la llave no hecha 600 litros al tanque.”

**Profesora:** “si no, Cuanto?”

**Estudiante 1:** “sino hecha 450.”

**Generalizar y sistematizar argumentos:** el estudiante generaliza la correlación entre las variables, usando diferentes registros de representación para interpretar fenómenos de variación.





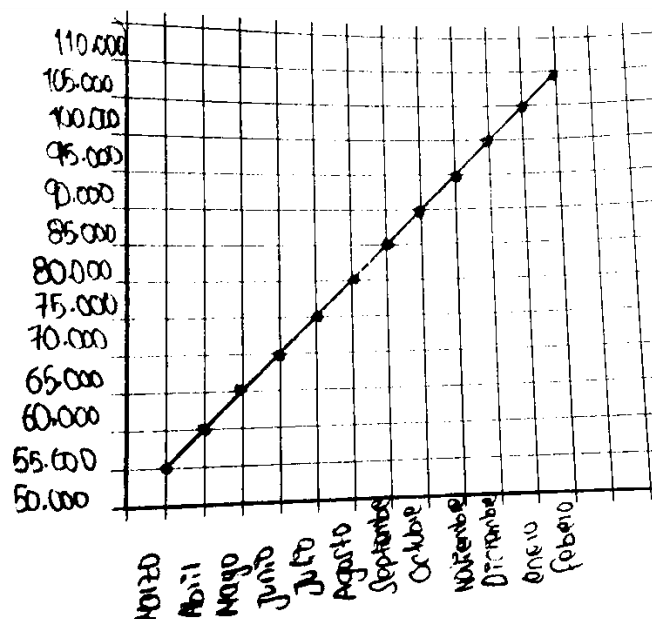


Figura 32. Respuesta a la Pregunta 9 Perteneciente a la Tarea 6. Grupo 4

Para esta gráfica se representan la tendencia creciente de la cuota mensual, la cual no tiene ningún descuento.

### Desempeño de los estudiantes

El proceso de evaluación que inició con la prueba diagnóstica, pasa por la evaluación formativa, la cual se evidencia con los apuntes de los estudiantes en el cuadernillo de la secuencia didáctica, en los audios realizados, en las notas del diario de campo y por último en la entrevista. Esta información se ha sintetizado en una matriz que refleja de forma global los desempeños de los estudiantes.

La matriz está conformada por tres momentos (M) que corresponden a los niveles de complejidad que estructura las tareas: reproducción, conexión y reflexión (García et al., 2015), los cuales se interceptan con las categorías de análisis fruto del marco teórico de esta investigación: objeto matemático, sistemas de representación, competencia razonar y argumentar y por último el uso de las TIC.

**C1. Objeto Matemático:** con esta categoría se quiere explorar los saberes matemáticos que emergen entorno al estudio de la variación a través de la representación gráfica de funciones con comportamientos lineales. Teniendo en cuenta que las competencias no se pueden caracterizar sino están asociadas a un tema matemático (Solar, Azcarate & Deulofeu, 2012).

**C2. Sistemas de Representación:** el análisis siguiendo esta categoría, hace referencia al tratamiento y la articulación de los diferentes sistemas de representación del concepto matemático función. Las cuales corresponden a las dos operaciones definidas por Duval (2004).

**C3. Competencia Razonar y Argumentar:** se relaciona con las acciones llevadas a cabo por los estudiantes que dan cuenta de la percepción de regularidades, las predicciones, la formulación de hipótesis y conjeturas y la capacidad de dar explicaciones coherentes respecto a afirmaciones realizadas (MEN, 1998, 2006)

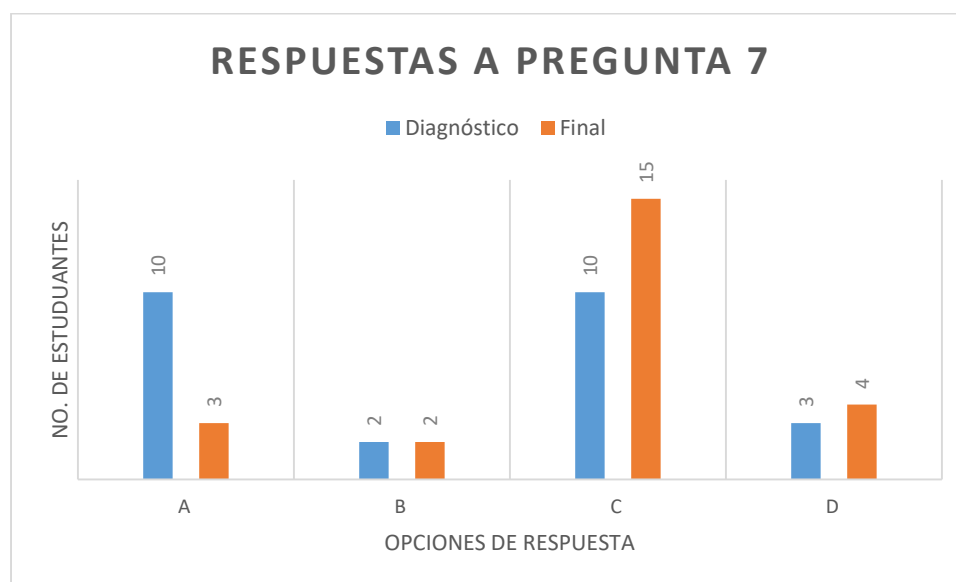
**C4. El uso de las TIC:** hace referencia a la interacción entre los estudiantes y el software Geogebra a través de las tareas propuestas, es decir, se refiere a los procedimientos utilizados por

el estudiante a la hora de realizar las actividades de aprendizaje. Desde esta perspectiva las TIC se consideran *instrumento* de mediación para la construcción de conocimiento matemático (Lupiañez & Moreno, 2001; Moreno, 2002; Moreno & Waldegg, 2002; Moreno & Twiggy, 2012).

Categoría Momentos	Objeto Matemático	Sistema de representación	Competencia Razonar y Argumentar	Las TIC
<p>M<sub>1</sub> Reproducción Tarea 1 (T<sub>1</sub>) Tarea 2 (T<sub>2</sub>) Tarea 3 (T<sub>3</sub>)</p>	<p>El 100% de los estudiantes enuncian un ejemplo de situaciones en la vida cotidiana en la que se presenta una relación de cambio o dependencia entre magnitudes.(T<sub>1</sub>)</p> <p>El 43% de los estudiantes Identifican lo que cambia y lo que permanece constante en las coordenadas cartesianas de un punto que se mueve sobre el eje X.(T<sub>2</sub>)</p> <p>El 86% de los estudiantes reconocen las coordenadas de puntos ubicados en el plano cartesiano.(T<sub>3</sub>)</p>	<p>El 86% de los estudiantes efectúan operaciones de tratamiento en los registros de representación.(T<sub>3</sub>)</p>	<p>El 100% de los estudiantes verifican y justifican si son correctas las coordenadas asignadas a los puntos dados en el plano Cartesiano.(T<sub>3</sub>)</p>	<p>El 100% de los estudiantes obtiene las coordenadas de un punto sobre el eje x utilizando la herramienta arrastre.(T<sub>2</sub>)</p> <p>El 100% de los estudiantes Constata con el instrumento las coordenadas de puntos ubicados en el plano cartesiano.(T<sub>3</sub>)</p>
<p>M<sub>2</sub> Conexión Tarea 4 (T<sub>4</sub>) Tarea 5 (T<sub>5</sub>)</p>	<p>El 100% de los estudiantes identifican las variables representadas en las gráficas. (T<sub>4</sub> pregunta 3)</p> <p>El 71% de los estudiantes identifican los comportamientos de proporcionalidad directa en las gráficas. (T<sub>4</sub> pregunta 8 y 9)</p> <p>El 100% de los estudiantes identifican el comportamiento constante en las gráficas. (T<sub>4</sub> pregunta 5)</p> <p>El 71% de los estudiantes reconocen comportamientos de crecimiento, decrecimiento en las gráficas cartesianas. (T<sub>4</sub> pregunta 6 y 7)</p>	<p>El 100% de los estudiantes ejecutan operaciones de coordinación entre registros de representación. (T<sub>4</sub> pregunta 3)</p>	<p>El 86% de los estudiantes predicen comportamientos a partir de una grafica teniendo en cuenta las tendencias de cambio. (T<sub>4</sub> pregunta 9 y 10)</p> <p>El 100% de los estudiantes utilizan argumentos para exponer ideas y hacer comparaciones. (T<sub>5</sub> pregunta 2 al 6)</p> <p>El 100% de los estudiantes evalúan la veracidad de diversas afirmaciones relacionadas con una situación que se representa a través de tres gráficas cartesianas. (T<sub>5</sub> pregunta 2 al 6)</p>	<p>El 100% de los estudiantes Utiliza el desplazamiento a través de la gráfica para obtener los valores correspondientes a las coordenadas usando la herramienta arrastre. (T<sub>4</sub> pregunta 2 y T<sub>5</sub> pregunta 1)</p>

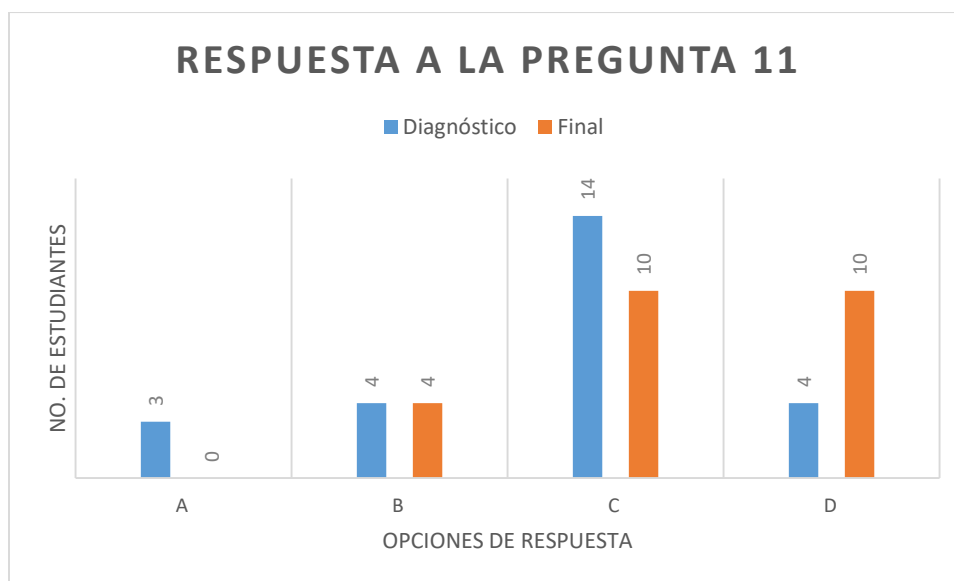
	El 86% de los estudiantes realizan tratamientos de extrapolación en las gráficas cartesianas. (T <sub>4</sub> pregunta 9 y 10)			
M <sub>3</sub> Reflexión Tarea 6 (T <sub>6</sub> )	El 43% de los estudiantes identifica las variables representadas en un enunciado verbal. (T <sub>6</sub> pregunta 2)  El 57% de los estudiantes reconocen comportamientos de crecimiento, decrecimiento en la representación gráfica de un enunciado verbal. (T <sub>6</sub> pregunta 8)	El 71% de los estudiantes ejecutan operaciones de coordinación entre registros de representación. (T <sub>6</sub> pregunta 7)	El 57% de los estudiantes infieren y predicen información de la relación funcional presentada. (T <sub>6</sub> pregunta 9)	NO APLICA

Con el objetivo de reconocer el impacto del trabajo realizado en pruebas estandarizadas como la prueba saber, se diseñó la prueba final (Anexo E), que fue presentada por 24 estudiantes (una estudiante no asistió a la última sesión) del grado 8-4 y arrojó los siguientes resultados:



*Figura 33. Comparación Entre Prueba Diagnóstica y Final. Pregunta 7.*

En la pregunta 7 la respuesta correcta es la C, es decir, que del 40% de los estudiantes que respondieron correctamente en la prueba diagnóstica se obtiene un incremento en la prueba final, donde el 60% de los estudiantes respondieron de forma acertada.



*Figura 34. Comparación Entre Prueba Diagnóstica y Final. Pregunta 11.*

En la pregunta 11 la respuesta correcta es la D, es decir, que del 16% de los estudiantes que respondieron correctamente en la prueba diagnóstica se pasa a un 42% de los estudiantes que respondieron correctamente en la prueba final.

Este pequeño incremento pudo obedecer a que la implementación de la secuencia didáctica permitió:

- a. Centrarse en el aprendizaje del estudiante (D'Amore, 2005).
- b. Realizar el análisis de las gráficas cartesianas no como fin sino como medio para desarrollar pensamiento matemático en cual se tuvieron en cuenta los interrogantes para el análisis de las gráficas propuesto por Dolores (2007, 2008, 2009), los cuales comprenden: ¿Qué



cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo cambia?, ¿Qué tan rápido cambia?, ¿Cómo se comporta global y puntualmente la gráfica?

- c. Privilegiar las interacciones, discusiones y trabajo colectivo en el aula de clase para el desarrollo de la competencia matemática razonar y argumentar.(García et al., 2015)
- d. Usar las Tic, las cuales según García López (2011), contribuyen al mejoramiento de determinadas actitudes tales como el gusto y la participación.

Sin embargo, Estos resultados confirman que el desarrollo de una competencia es un proceso a largo plazo y no se logra con una actividad de una semana, un periodo o un año. Por el contrario, es un proceso que se da a lo largo de la vida escolar tal como lo plantea el modelo MTP (García et al., 2015) fundamentado en las teorías de la enculturación matemática (Bishop, 2005) y la metáfora de la participación (Sfard, 2008).

## 6 Conclusiones

En este último capítulo se presenta las conclusiones frutos del trabajo realizado en la investigación: secuencia didáctica basada en el estudio de las gráficas cartesianas que favorece el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo de la I.E. General Francisco de Paula Santander y la I.E. Normal Superior Santiago de Cali. Como se expresó inicialmente las necesidades en las que convergen ambas instituciones promueven la realización mancomunada de esta investigación, no obstante, el trabajo de campo y el análisis se realizó solo en una de las instituciones. De esta manera a la luz de los objetivos que se propusieron, se presentan las siguientes consideraciones:

El modelo MTP es el constructo teórico que permitió organizar de manera consiente e intencionada la propuesta didáctica que movilizó el desarrollo de la competencia matemática razonar y argumentar. De los elementos que estructuran el modelo es importante resaltar: primero, la planeación de las tareas, ya que ellas son la esencia de la propuesta didáctica. Segundo, la identificación de los subprocesos matemáticos inherentes a la competencia razonar y argumentar, que para efectos de esta investigación fueron: identificar, verificar, explorar, hacer conjeturas, desarrollar, evaluar, generalizar y sistematizar argumentos, debido a que ellos son el esqueleto que configuran cada parte de la secuencia didáctica. Tercero, tener presente los niveles de complejidad puesto que por su naturaleza creciente permiten que los estudiantes se tomen confianza y se involucren cada vez más con la actividad de aprendizaje, lo que lleva a que emerja el conocimiento a la vez que se desarrolla la competencia.

El desarrollo de una competencia matemática no es algo que se realice en lo abstracto, es decir para lograr ese saber hacer en contexto, se requiere de unos tópicos o contenidos matemáticos, los cuales se concretan a través de tareas que permiten al estudiante aproximarse de manera simultánea al objeto matemático y al mismo tiempo desarrollar la competencia. Por tanto, el estudiante aprende a construir y compartir significados con otros, es decir, logra un nivel de apropiación de las matemáticas que le permite comunicarse con ellas. En este orden de ideas, la gráfica cartesiana es un tópico propicio para el desarrollo de la competencia matemática razonar y argumentar, ya que permitió el diseño de preguntas interesantes que dirigieron al estudiante a identificar cambios, explorar el comportamiento de las gráficas, plantear conjeturas, verificar, predecir y justificar la correlación entre las magnitudes, todo lo anterior favoreciendo el desarrollo del pensamiento variacional.

La búsqueda bibliográfica en torno al desarrollo del pensamiento variacional y del objeto matemático función, dieron paso a un elemento fundamental de esta propuesta: las TIC. De esta manera, a través del software Geogebra se contextualizó una situación de correlación funcional entre dos magnitudes que permitió al estudiante estudiar el cambio y la variación. El fenómeno ahí representado fue explorado gracias a las funciones dinámicas e interactivas de la herramienta, lo que favoreció algunas actuaciones como trabajo autónomo, en equipo y procesos de argumentación.

En términos generales esta propuesta responde al uso social de las matemáticas. Por un lado, porque el fenómeno utilizado aunque es una creación imaginaria, puede ser recreado por los estudiantes, es decir, ellos reconocen la situación e identifican las magnitudes implicadas y su

correlación. Cabe resaltar que el registro de representación gráfico posibilita el estudio del cambio y la variación. Por otro lado, el manejo dado a las gráficas cartesianas aporta al desarrollo de una cultura básica de interpretación y uso de ellas. Ya que las actividades de aprendizaje realizadas por los estudiantes, tales como: extraer información, comparar valores, analizar resultados son habilidades que le van a permitir el estudio de otras gráficas tanto de la vida cotidiana como de otras ciencias.

El transformarse en un enseñante reflexivo, va más allá de momentos eventuales de auto-evaluación de la práctica. Es realmente apropiarse de aquellos esquemas que van a determinar el quehacer diario del maestro, quien debe tomar decisiones sabias respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan al interior del aula. Por lo tanto, el maestro reflexivo realiza unas determinaciones en aras de orientar a los estudiantes para que obtengan los objetivos propuestos, lo anterior le permite adquirir un estatus de autoridad en los procesos educativos. Además, los procesos de reflexión en la acción y sobre la acción deben trascender la práctica y permitir la toma de conciencia de los conocimientos que se produce en el campo, es decir, considerar las didácticas, métodos y estrategias que emergen frente a una determinada situación. De esta manera, el maestro reflexivo logra un estado profesional ideal, que le permite sistematizar sus experiencias a partir del trabajo realizado, donde identifica que le funciona (aciertos) y reconoce las dificultades que afloran en el proceso (desaciertos). Para finalmente, hacer de su práctica educativa un proceso en mejora continua.

## 7 Bibliografía

- Apóstol, T. (1984). *Calculus Vol I*. Barcelona: Reverté, S. A.
- Banet, E. , Cordon, R. , y Núñez,F. (2009). Capacidades del alumnado de educación secundaria obligatoria para la elaboración e interpretación de gráficas. *Enseñanza de las Ciencias*, 447-462.
- Baptista, P., Fernández, C. , y Hernandez R. (2010). *Metodología de la investigación*. Mexico: Mc Graw Hill.
- Batanero, C. , Font, V. , y Godino, J. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Bishop, A. J. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Caballero, M. , y Cantoral, R. (2013). *Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 26. 1197-1205.
- Coll, C. (2008). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. *Boletín de la institución libre de enseñanza*, 17 - 40.
- D'Amore, B. (2005). *Bases Filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona, España: Reverté S.A.
- Díaz Gómez, J. (2013). El concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, 13-25.
- Díaz, V., y Pérez, I. (2016). Uso de Gráficas en una Situación de Modelación del Movimiento en Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en Chile. *Paradigma Vol XXXVII*, 161-180.
- Díaz, F. (2002). Constructivismo y Evaluación Psicoeducativa. En Díaz, F. , y Hernandez, G. *Estrategias Docentes para un aprendizaje Significativo: Una interpretación Constructivista*. (pp. 396-414). Mexico, D. F.: McGraw Hill.
- Dolores, C. , y Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Relime*, 69-96.
- Dolores, C. (2007). Uso de las gráficas y su repercusión en el aprendizaje de la matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 20* 479-484.
- Dolores, C. (2008). Las gráficas, sus usos y retos en la enseñanza y en la investigación en matemática educativa . *Dialnet*, 51-58.

- Dolores, C. (2009). De las descripciones verbales a la representación gráfica. El caso de la variación en la enseñanza de la matemática. *Unión. Revista iberoamericana de educación Matemática*, 41-57.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- García et al., B. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje*. Florencia, Colombia: Universidad de la Amazonía.
- García et al., B. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas*. Florencia, Colombia: Universidad de Amazonía.
- García García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presente en los libros de texto de Ciencias Experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula. (Tesis Doctoral)*. Universidad de Granada. Granada, España.
- García Lopez, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula. (Tesis doctoral)*. Universidad de Almería. Almería, España.
- García, L. , Figueroa S. , y Esquivel, I. (2014). *Modelo de Sustitución, Aumento, Modificación y Redefinición (SAMR): Fundamentos y Aplicaciones. Esquivel, I. En Los Modelos Tecnológicos Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI. (pp. 205-220)*. México D. F., México: Universidad Veracruz.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 23-45.
- Jaimes, N. (2012). *La Noción de Función un Acercamiento a su comprensión (tesis de Maestría)*. Universidad Nacional de Colombia. Santa fe de Bogotá, Colombia.
- Lupiañez, J. , y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En L. R. Pedro Gómez, *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. (pp. 291-300)*. Granada: Universidad de Granada.
- Martín, E. M. (2006). *La integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los Sistemas Educativos*. Buenos Aires, Argentina: Copyright UNESCO.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D.C.
- MEN. (1999). *Nuevas Tecnologías y currículo de Matemáticas*. Santafé de Bogotá, D.C.: Punto Exe Editores.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas*. Bogota D.C.

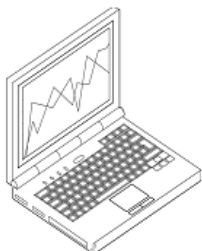
- MEN. (2014). *Guías prueba saber 3°, 5° y 9° lineamientos para la aplicación muestral y censal 2014*. Bogota, D.C.
- MEN. (2015a). *Día e I.E. General Francisco de Paula Santander*.
- MEN. (2015 b). *Día e I.E. Normal Superior Santiago de Cali*.
- Mishra, P. , y Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for TeacherKnowledge. *Teachers College Record*, 1017-1054.
- Moreno, L. , y Rojano, T. (1998). Las Nuevas Tecnologías en el aula de matemática y ciencias. *Avance y Perspectiva*.
- Moreno, L. , y Twiggy, I. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, 21-29.
- Moreno, L. , y Waldegg, G. (2002). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. En MEN, *Memorias del Seminario Nacional: Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 40-66). Santa fe de Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación.
- Moreno, L. (2002). Instrumentos Matemáticos Computacionales. En MEN, *Memorias del Seminario Nacional: Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Santa Fe de Bogotá, Colombia : Ministerio de Educación Nacional.
- Moreno, L. (2013). ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 307-315.
- OCDE. (2007). *PISA 2006 Marco de la evaluación conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*.
- Pedró, F. (2015). *XXIX Semana de la Educación, Tecnología para la mejora de la educación: experiencias de éxito y expectativas de futuro*. Madrid, España: Fundación Santillana.
- Perrenoud, P. (2001). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Graó. Barcelona, España.
- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico, *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España : Horsori.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM. Avances de investigación en educación Matemática*, 39-63.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias... *Revista Iberoamericana de Educación*, 135-165.
- Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos*. Paidós Ibérica, S.A. España.

- Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las Matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Silva, A., De la Torre, E., 2011. La Herramienta Arrastre en Funciones usando Geogebra. *Dialnet*, 555-564.
- Solar, H. (2009). *Competencias de Modelización y Argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencias aplicado a un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona. Bellaterra, España.
- Solar, H. , Azcarate, C. ,y Deulofeu, J. (2012). Competencia de Argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 133-154.
- Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Tamayo, O. E. (2006). Representaciones Semióticas y Evolución Conceptual en la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. *Educación y Pedagogía*, 37-49.
- Tobón et al, S. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias*. Mexico: Pearson Educación.
- Vasco, C. (2003). *El pensamiento Variacional y la Modelación Matemática*.



## Anexos

Anexo A. Cuadernillo de Secuencia didáctica



## VIAJANDO POR EL MUNDO DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS

# 8

**FECHA:** \_\_\_\_\_

**NOMBRES:** \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

### SESIÓN I: INSPECCIONANDO EL TERRENO DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS

#### TAREA 1

*Expectativas de aprendizaje a corto plazo*

- ✓ Identificar y enunciar situaciones en las que se presenten una relación de cambio o dependencia entre magnitudes.

A partir de la observación del video [Situaciones de variación en la vida diaria.mp4](#) identifique las [diferentes situaciones en las que se presenta una relación de variación, subraye las variables involucradas y describa la correlación entre ellas. Con base en los ejemplos](#) identificados enuncie una situación en la que se presente una relación de cambio o dependencia entre variables, subraye las variables implicadas y describa cómo se presenta la correlación entre ellas.

---



---

## TAREA 2

### *Expectativas de aprendizaje a corto plazo*

✓ Explorar y verificar el lenguaje presente en un sistema de coordenadas.

Consulte el archivo llamado [TAREA 2-recorrido sobre el eje x.ggb](#). En dicho archivo encontrará la interface del programa Geogebra en el cual podrá visualizar el plano cartesiano y un punto A sobre el eje horizontal.

Mueva el punto A sobre el eje horizontal hasta hacerlo coincidir con los puntos que se encuentran sobre el eje x. Registre los valores en la siguiente tabla:

Punto	Coordenada
W	
Z	
F	
T	
S	
R	
Q	

Observe con atención las coordenadas que arroja el programa y describa:

¿Qué es lo que cambia?

---



---

¿Qué es lo que permanece constante?

---



---

Teniendo en cuenta lo observado complete lo siguiente:

Un punto que se encuentra sobre el eje x siempre tiene como coordenadas

---



---

### TAREA 3

#### *Expectativas de aprendizaje a corto plazo*

- ✓ Explorar y verificar el lenguaje presente en un sistema de coordenadas.

Utilizando los recursos de lápiz y papel asigne a cada punto dado las coordenadas que le corresponden.

Luego consulte el archivo denominado [TAREA 3- Explorando los puntos.ggb](#). En dicho archivo encontrará nuevamente la interface del programa Geogebra en el cual podrá visualizar los mismos puntos W, Z, F, T, S, R y Q ubicados en el plano cartesiano que se entregó impreso. Verifique las coordenadas de los puntos asignados en la tarea anterior y responda:

Cantidad de aciertos \_\_\_\_\_

Cantidad de desaciertos \_\_\_\_\_

Cuáles creen que fueron los motivos, causas o razones que te llevaron a tener los desaciertos. Explica.

---



---

## SESIÓN II: ¿QUÉ CAMBIA? ¿QUÉ PERMANECE CONSTANTE?

### TAREA 4

#### *Expectativas de aprendizaje a corto plazo*

- ✓ Formular conjeturas a partir del estudio de un fenómeno de variación representado en una gráfica cartesiana y el análisis del comportamiento de las variables implicadas en dicho fenómeno. Además inferir y predecir información que no está presente en el gráfico.

Consulte el archivo llamado [TAREA 4- Explorando la grafica.ggb](#). En este archivo encontrará una gráfica que representa la cantidad de litros de agua que contiene un tanque de almacenamiento durante diez minutos. A través del uso del software Geogebra, deslizar el punto A sobre el eje x y observar la implicación sobre el punto B. Considerar lo siguiente:

1. Identifique y escriba los puntos donde cambia el recorrido de la gráfica.

---



---

2. Registre en las siguientes tablas los valores de cada tramo de la gráfica.

Tiempo	Cantidad de agua
0	
1	
2	
3	
4	

Tiempo	Cantidad de agua
4	
5	
6	

Tiempo	Cantidad de agua
6	
7	
8	
9	

Tiempo	Cantidad de agua
9	
10	

3. Teniendo en cuenta los valores consignados en las tablas, describa de forma verbal el fenómeno “Cantidad de agua en un tanque de almacenamiento durante un tiempo determinado”.

---



---

A continuación, responda las siguientes preguntas de análisis y explica cómo llega a cada conclusión.

4. ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque durante los tres primeros minutos?

---



---

5. ¿Cuánto tiempo permaneció constante la cantidad de litros de agua en el tanque por primera vez? ¿y qué cantidad de agua tenía?

---



---

6. ¿Cuánto tiempo transcurre, desde el momento en que la cantidad de agua empieza a disminuir, hasta cuando vuelve a quedar constante?

---

---

7. ¿Cuánto tiempo transcurrió para que la cantidad de agua alcanzará su máximo valor?

---

---

8. ¿Es correcto afirmar que la cantidad de agua que aumenta en el tanque entre el minuto 1 y 2 es diferente a lo que aumenta entre el minuto 3 y 4?

---

---

9. Si se mantiene el comportamiento registrado durante los cuatros primeros minutos, ¿cuál será la cantidad de agua en el tanque al cabo de 10 minutos?

---

---

10. Si se conserva la disminución o el decrecimiento de la cantidad de agua en el tanque, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse completamente el tanque a partir del máximo valor?

---

---

## TAREA 5

### *Expectativas de aprendizaje a corto plazo*

- ✓ Desarrollar y evaluar argumentos que le permitan exponer ideas sobre las tendencias que se presentan en la gráfica de una situación de variación, así como el comportamiento de la relación funcional presentada.

Consulte el archivo llamado [TAREA 5-Comparación de graficas.ggb](#). En dicho archivo encontrará tres gráficas que representan como un tanque es llenado de forma independiente por tres llaves hasta alcanzar su máxima capacidad. El gráfico rojo representa la cantidad de agua (litros) que vierte la llave 1, el gráfico verde representa el llenado de la llave 2 y finalmente la gráfica azul representa el llenado de la llave 3 en un determinado tiempo (minutos). A través del uso del software Geogebra, deslizar el punto A sobre el eje x y observar la implicación sobre el punto B, C y D que se encuentran respectivamente sobre cada gráfica.

1. Consigne en la siguiente tabla la cantidad de agua que se encuentra en el tanque, minuto a minuto usando la llave 1. Realice el mismo procedimiento para la llave 2 y 3.

Tiempo (minutos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Llave 1 (Cantidad de agua)																
Llave 2 (Cantidad de agua)																
Llave 3 (Cantidad de agua)																

Cada una de las siguientes preguntas será socializada por los grupos de trabajo, exponiendo sus ideas y dando las explicaciones que justifican su elección.

2. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de las gráficas es o son verdadera(s)?

- I. En el minuto 6 la cantidad de agua almacenada en el tanque por la llave 3 es más de 1.000 litros.
- II. El tanque alcanza su mayor capacidad con la llave 2 en el minuto 9.
- III. Al iniciar el llenado con cada llave el tanque se encontraba vacío.

- A. I y III solamente
- B. I solamente
- C. I y II solamente
- D. II solamente

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de las gráficas es o son verdadera(s)?

- I. En el minuto 3 las llaves 1 y 2 han llegado a la misma cantidad de agua.
- II. La cantidad máxima de agua en el tanque es 2.500 litros de agua.
- III. En el minuto 4 la cantidad de agua almacenada en el tanque por la llave 2 es menos de 1.500 litros.

- A. I y II solamente
- B. III solamente
- C. I y III solamente
- D. II solamente

4. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de las gráficas es o son verdadera(s)?

- I. En el minuto 2 el tanque registra la mayor cantidad de agua con el llenado de la llave 1.
  - II. A partir del minuto 6 la cantidad de agua que tiene el tanque llenado con la llave 2 es fija.
  - III. Entre el quinto y el octavo minuto la llave 3 echó 600 litros al tanque.
- A. I y II solamente  
B. II solamente  
C. I y III solamente  
D. III solamente
5. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de las gráficas es o son verdadera(s)?
- I. La cantidad de agua que vierte la llave 3 entre el minuto 1 y 2 es mayor a la cantidad de agua que vierte entre el minuto 13 y 14.
  - II. La llave 1 es la que emplea menos tiempo para llenar a su máxima capacidad el tanque.
  - III. Entre el minuto 5 y 6 la llave 1 vierte 400 litros.
- A. I solamente.  
B. II solamente.  
C. II y III solamente.  
D. I y III solamente.
6. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de las gráficas es o son verdadera(s)?
- I. La llave 3 es la que emplea más tiempo para llenar a su máxima capacidad el tanque.
  - II. La cantidad de agua que vierte la llave 2 entre el minuto 2 y 3 es menor a la cantidad de agua que vierte entre el minuto 7 y 8.
  - III. Entre el minuto 8 y 9 la llave 3 vierte 200 litros.
- A. I solamente.  
B. I y II solamente.  
C. II solamente.  
D. I y III solamente.

### **SESIÓN III: LA GRÁFICAS CARTESIANAS IMAGEN DE UNA SITUACIÓN DE VARIACIÓN**

## TAREA 6

### *Expectativas de aprendizaje a corto plazo*

- ✓ Generalizar la correlación entre las variables, usando diferentes registros de representación para interpretar fenómenos de variación.

Una gran cadena de almacenes La “24” en la sección de electrodomésticos pondrá en el mercado la nueva línea de lavadoras **N&M**. Por tal motivo debe terminar de vender las lavadoras **N&M** que tiene en el inventario, es así como publican la siguiente oferta:

Pague durante un año y disfrute ahora.  
Sin dar cuota inicial se le entrega el artículo y a partir del siguiente mes empieza el pago.

A doña Carmen después de realizado el estudio financiero, se le aprueba el siguiente plan mensual para pagar la lavadora en un año: inicia en el mes de marzo con una cuota de 50.000 pesos y posteriormente cada mes se incrementará en 5.000 pesos la cuota hasta finalizar el pago. Durante el mes de mayo el almacén La “24” para mejorar la venta de electrodomésticos, lanza la siguiente oferta: las personas que tengan crédito y compren un electrodoméstico de la línea: **regalo pa’ mamá** se le premiará sosteniendo el valor de la cuota durante los dos meses siguientes. Doña Carmen para recibir este beneficio compra un exprimidor eléctrico. Tiempo después, premian a sus clientes fieles rifando en el mes de noviembre 24 descuentos a las cuotas de los créditos de los electrodomésticos para realizarlos en el mes de diciembre. Doña Carmen se gana un descuento de 15.000 pesos para aplicarlo a la cuota de diciembre. Finalmente termina de cancelar el costo total de la lavadora.

1. Lee detenidamente la situación.
2. Identifica las variables involucradas en la situación presentada.

---



---

¿Cuál es el valor de la cuota en los meses de Abril, Julio, Septiembre?

---



---

¿Cuál es el valor de la última cuota?

---



---

¿Doña Carmen cuánto pagó en total por la lavadora?



---

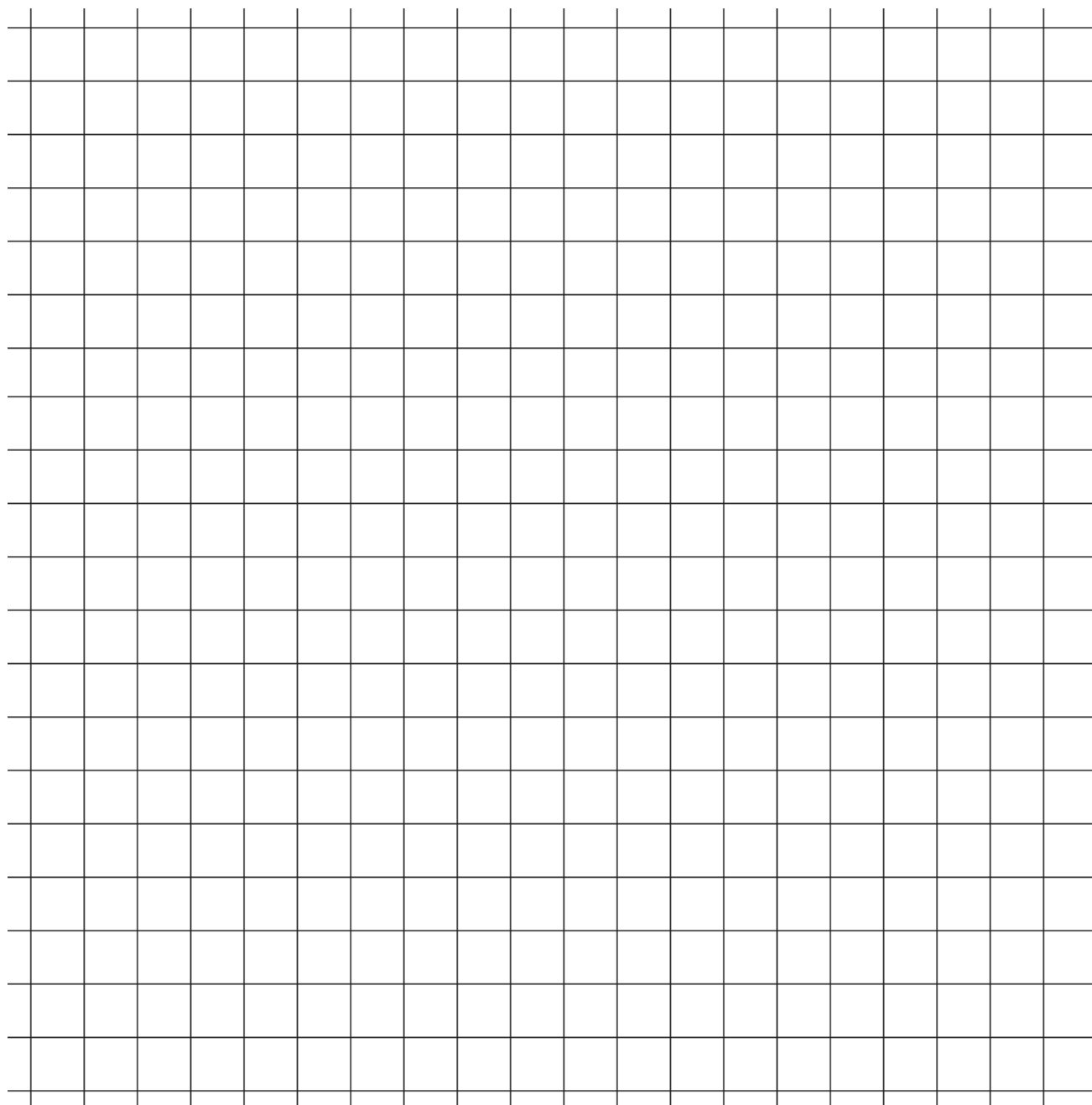
---

¿En qué mes pagó la cuota más alta?

---

---

3. Representa la situación en un gráfico cartesiano (usar cuadrícula).

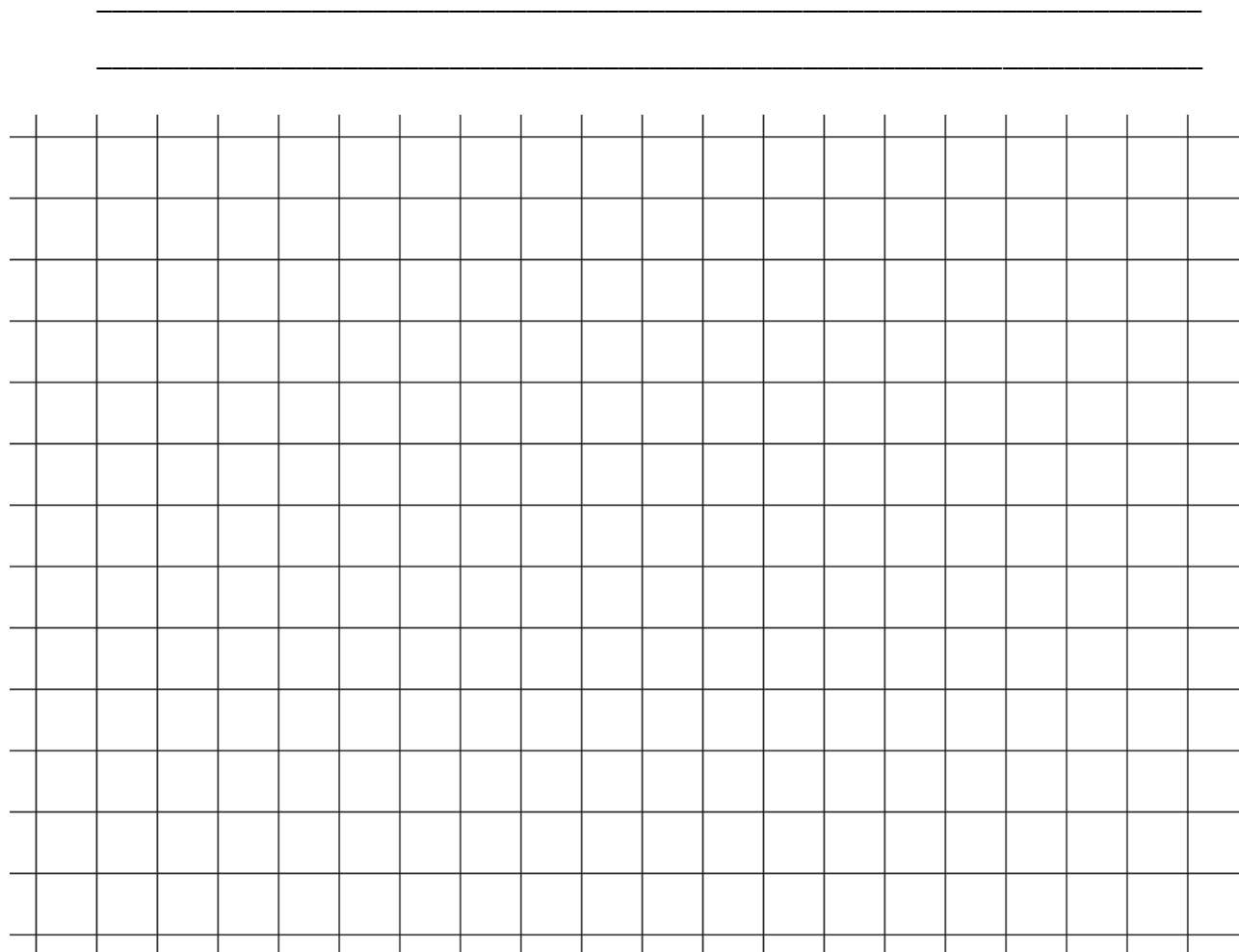


4. Explica el comportamiento de cada tramo de la gráfica.

---

---

5. Si el plan de Doña Carmen no hubiera obtenido ningún beneficio durante el año, ¿cuál hubiera sido el valor de la última cuota? Representa en un gráfico cartesiano como hubiera sido el comportamiento del plan de crédito de la lavadora.



*Anexo B. Transcripción de Audios*

**SESIÓN II: ¿QUÉ CAMBIA? ¿QUÉ PERMANECE CONSTANTE?**

**TAREA 4**

**PUNTO N° 3**

**Audio N° 1**

**Grupo: N° 1**

**Profesora:** Vamos a trabajar la pregunta tres cuál es el fenómeno que está ahí representado.

**Estudiante 1:** Desde el minuto cero al minuto uno pasan 300 litros de agua, al minuto dos pasan otros 300 litros así sucesivamente hasta el minuto cuatro. Desde el minuto cuatro, cinco y seis se estabiliza con 1.200 litros. Luego del minuto seis al siete disminuye 200 y del minuto siete al nueve va bajando de 200 en 200 y llega a 600 litros y se vuelve estable hasta el minuto diez

**Profesora:** Tú puedes resumir eso con cuatro palabras (silencio), pueden resumir todo eso que han dicho en cuatro renglones en cuatro palabras, o sea qué es lo que está pasando en el tanque.

**Estudiante 2:** Que asciende la cantidad de agua, se estabiliza, disminuye y se vuelve a estabilizar.

**Audio N° 2**

**Grupo: N° 2**

**Profesora:** Vamos a ver el fenómeno que está representado en la gráfica

**Estudiante 1:** ¿cómo así qué el fenómeno profe?

**Profesora:** El fenómeno es la situación que está pasando.

**Estudiante 1:** Ahh

**Profesora:** ¿cuál es el fenómeno? ¿Qué es lo que está pasando ahí?

**Estudiante 1:** La cantidad de litros de agua cambia en el minuto y hasta el minuto seis, en el minuto cuatro y hasta el minuto seis permanece estable, en el minuto siete disminuye y a partir del minuto nueve deja de disminuir y se mantiene estable.

**Profesora:** Usted pueden resumir eso en cuatro palabras.

**Estudiante 1:** Ehh haber (silencio).

**Profesora:** Observen la gráfica, será que podemos resumir eso en cuatro palabras, miren el comportamiento de las líneas, de cada tramo (silencio), en el primero sube.

**Estudiante 2:** Sube, se estabiliza, baja y se estabiliza.

**Profesora:** Muy bien, gracias.

**Audio N° 3**

**Grupo: N° 4**

**Profesora:** Vamos entonces en la pregunta tres a hablar sobre el fenómeno de variación cantidad de agua – minutos.

**Estudiante 1:** Punto tres

**Estudiante 2:** Que en la primera tabla comienza en el minuto cero y termina en el minuto cuatro 1.200 litros y en la segunda tabla comienza en 1.200 litros y termina en el minuto seis y 1.200 litros. En la tercera tabla comienza en el minuto... comienza en 1.200 litros y termina en el minuto nueve en 600 litros. En la cuarta tabla comienza en 600 litros y termina en el minuto diez 600 litros

**Profesora:** Listo, ustedes me fueron mezclando constantemente tiempo y cantidad de agua. Vamos a marcar las tablas sólo con el tiempo, dónde están los cortes, en la primera tabla.

**Estudiante:** Cero.

**Profesora:** Inicia en cero y ¿termina?

**Estudiante 2:** En cuatro minutos.

**Profesora:** En cuatro minutos. Luego la segunda tabla.

**Estudiante 2:** Comienza en cuatro minutos y termina en seis.

**Profesora:** En seis, listo. Y luego.

**Estudiante 2:** Comienza en seis y termina en nueve.

**Profesora:** Y luego.

**Estudiante 2:** Comienza en nueve y termina en diez.

**Profesora:** Listo. Esos cuatro momentos yo necesito que me lo expliquen, qué es lo que está pasando en esos cuatro momentos.

**Estudiante 2:** Están aumentando los minutos.

**Profesora:** Si.

**Estudiante 1:** No.

**Profesora:** Si claro, siempre van aumentando porque pasa un minuto, luego el siguiente, el siguiente. Los minutos aumentan. Yo necesito que hagamos el análisis de la cantidad de agua.

**Estudiante 1:** En cada minuto puede aumentar, disminuir y regularse.

**Profesora:** Entonces, pero específicamente hay unos momentos, entonces dónde aumenta, dónde se regula.

**Estudiante 1:** Aumenta de cero a 1.200, se regula del minuto tres al minuto seis, disminuye del minuto seis al nueve, se regula del minuto nueve al diez.

**Profesora:** Cuando tú dices se regula, a qué te refieres.

**Estudiante 1:** Que tiene la misma cantidad de litros de agua en cada minuto.

#### Audio N° 4

##### Grupo: N° 7

**Profesora:** Listo, entonces vamos a trabajar el punto tres donde está el fenómeno de variación, entonces ustedes me van a explicar qué es lo que está pasando con ese fenómeno de variación.

**Estudiante:** Lo que nosotros escribimos fue: de cero a cuatro minutos el tanque se ha ido llenando hasta 1.200 litros de agua, se sostuvo en un tiempo de dos minutos y en el minuto 6 fue disminuyendo hasta el minuto 9, se sostuvo con 600 litros hasta el minuto 10.

**Profesora:** Muchas gracias

#### Audio N° 5

##### Grupo N° 5

**Profesora:** Entonces vamos a trabajar la pregunta 3, donde está el fenómeno de variación, entonces vamos a explicar ese fenómeno de variación.

**Estudiante 1:** Parte desde el minuto 0 sin aumentar la cantidad de agua, en el minuto 4 la cantidad aumenta a 1.200 litros, luego en el minuto 6 después de estar estable empieza a disminuir hasta el minuto 9.

**Profesora:** Johan atento porque yo hago preguntas... continúe usted

**Estudiante 1:** ya

**Profesora:** ¿listo?

**Estudiante 1:** si

**Profesora:** ¿Tú inicias diciendo que cuando tú lees en el minuto 0 sin aumentar, por qué? ¿Cómo así, sin aumentar?, no entiendo esa parte.

**Estudiante 2:** uno comienza...no sin aumentar, uno comienza cero coma cero.

**Profesora:** ¿Entonces qué es lo que está pasando allí? ¿Qué es eso de 0.0?

**Estudiante 3:** Que en el minuto 0 todavía no, ósea, la cantidad de litros no ha aumentado todavía para consumirse.

**Profesora:** Qué más? Qué pasa en ese 0,0? Más de que no aumente, qué es lo que está pasando específicamente en ese tanque.

**Estudiante 1:** se mantiene estable, la cantidad de agua, de litros se mantiene estable.

**Profesora:** qué significa 0,0?

**Estudiante 1:** qué está vacío

**Profesora:** minuto 0, cantidad de agua....

**Estudiante 1:** cero

**Profesora:** ósea que está?...

**Estudiante 1:** vacío

**Profesora:** exactamente, listo.

Necesito que identifiquemos bien esos momentos, nosotros. Se acuerdan que identificamos unos puntos de corte de la gráfica. Cuáles eran esos puntos de corte de la gráfica?

Obsérvenla que ya los habíamos visto. Cuál era el primero? Cuál es ese?

**Estudiante 3:** ehh... 4,1200

**Profesora:** ahí había un primer cuad... cambio, en cuál otro?

**Estudiante 3:** ehhh... 6, 1200

**Profesora:** 6, 1200

**Estudiante 3:** y el 9,600

**Estudiante 1:** ...600 (Completando)

**Profesora:** listo, entonces tres cambios me parten el fenómeno en 4 etapas, yo necesito que analicemos esas 4 etapas.

Cuál es la primera etapa?

**Estudiante 3:** 4,1200

**Profesora:** Iniciaría donde la primera etapa? Dónde iniciaría?

**Estudiante 3:** En 0,0

**Profesora:** en 0,0 ósea en minuto 0 hasta qué minuto?

**Estudiante 3:** Hasta minuto 4

**Estudiante 1:** Hasta minuto 4

**Profesora:** minuto 4, entonces qué está pasando ahí? Del minuto 0 al minuto 4?

**Estudiante 1:** Hay un aumento de agua

**Profesora:** hay un aumento de agua en el tanque, listo?, qué sigue ahora?

**Estudiante 1 y 2:** Se mantiene estable hasta el minuto 6.

**Profesora:** y luego?

**Estudiante 3:** baja, baja...

**Estudiante 1:** disminuye hasta el minuto 9.

**Profesora:** y finalmente?

**Estudiante 1:** se mantiene estable

**Profesora:** Cuándo ustedes utilizan la palabra estable, a qué se refieren?

**Estudiante 3:** que no hay cambios

**Estudiante 1:** que no hay cambios

**Profesora:** Que no hay cambios ósea, qué es lo que está pasando en el tanque?

**Estudiante 1:** que se mantiene la misma cantidad de litros de agua.

**Profesora:** Gracias

**Audio N° 6**

**Grupo N° 6**

**Profesora:** Vamos a trabajar la pregunta 3, dónde está el fenómeno de variación, entonces vamos a explicar ese fenómeno de variación.

**Estudiante 1:** Aumenta el tiempo y la cantidad durante 4 minutos, luego se mantuvo constante durante 2 minutos, disminuyó durante 4 minutos y se mantuvo constante durante 1 minuto, en el tanque de almacenamiento.

**Profesora:** Gracias

**Audio N° 7**

**Grupo N° 6**

**Tarea 4, Pto. 9**

**Profesora:** Cuando se refiere a comportamiento, es lo que ustedes ahora identificaron de fenómeno, ósea qué era lo que estaba pasando en esos cuatro primeros minutos?

**Estudiante 1:** Estaba aumentando

**Profesora:** Estaba aumentando, luego qué pasaba?

**Estudiante 1:** Que cambiaba

**Estudiante 2:** Se mantenía constante

**Profesora:** Ahora no van a tener todos esos cambios, sino que va a tener cómo dice ahí?

**Estudiante 2:** .... (No se entiende)

**Profesora:** se va a mantener ese comportamiento, Entonces, si se va a mantener ese comportamiento que es lo que va a pasar?

**Estudiante 1 y 2:** Va a seguir aumentando

**Profesora:** Entonces que va a pasar ahora en el minuto 5, qué estaba pasando en la gráfica en el minuto 15?

**Estudiante 2:** (No se entiende)

**Profesora:** ¿qué valor tenía?

**Estudiante 2:** 1200

**Profesora:** pero si ya no va haber ese cambio sino que va a mantenerse como venía, entonces qué va a pasar ahora en el minuto 5?

**Estudiante 1:** va a seguir aumentando

**Profesora:** Pero específicamente a qué valor?

**Estudiante 3:** sería... serían...

**Estudiante 2:** 1400?

**Estudiante 3:** no

**Estudiante 1:** no, porque si son, si son...

**Profesora:** En el minuto 4....

**Estudiante 3:** si mil cuatrocientos

**Profesora:** En el minuto 4 en qué valor está?

**Estudiante 1:** 1200

**Estudiante 2:** 1200

**Profesora:** En el minuto 3, el anterior?

**Estudiante 1:** mil

**Estudiante 3:** mil novecientos..... Novecientos

**Estudiante 1:** es mil, el anterior es mil

**Estudiante 3:** no

**Estudiante 1:** pues es el anterior

**Profesora:** Ustedes hicieron una tabla

**Estudiante 3:** (mirando la tabla) 900

**Profesora:** 900 y en el anterior?

**Estudiante 3:** 600

**Profesora:** ósea que del minuto 2 estaba en 600, pero ya en el minuto 3 está?

**Estudiante 3:** 900?

**Profesora:** en el minuto 4?

**Estudiante 3:** 1200

**Profesora:** ahorita va a mantenerse ese comportamiento, entonces que va a pasar en el minuto 5

**Estudiante 1:** hmmm

**Estudiante 1:** va a seguir en 1200

**Estudiante 3:** no

**Profesora:** ah?

**Estudiante 1:** va a seguir en 1200

**Estudiante 3:** no porque.....

**Profesora:** ya no es el que está aquí en la gráfica sino que vamos a suponer que va a seguir con esa primera etapa. Qué era lo estaba pasando en la primera etapa?

**Estudiante 3:** aumenta

**Profesora:** aumenta. Aumenta... si en 4 hay 1200. Obviamente en 5 tiene que haber un valor cómo?

**Estudiante3:** 1300

**Profesora:** cómo es ese valor con respecto a 1200

**Estudiante 3:**..... (No se entiende)

**Profesora:** pero cómo es? Si yo lo comparo es igual?

**Estudiante 3:** no

**Profesora:** cómo va a ser?

**Estudiante 3:** aumentó, es diferente

**Profesora:** si aumenta es qué?

**Estudiante 1:** diferente

**Profesora:** pues es diferente, cuando algo aumenta es qué?

Y cuando disminuye?

**Estudiante 1:** mayor

**Profesora:** cuando aumenta es?



**Estudiante 1:** mayor

**Profesora:** y cuándo disminuye?

**Estudiantes 1 y 3:** menor

**Profesora:** entonces en el minuto 5 cuál va hacer el valor?

**Estudiante 2:** mayor

**Profesora:** específicamente entonces tenemos que buscar cuál? Ya sabemos que va hacer mayor, es decir puede ser 1200, 1250, 1300, pero específicamente en el minuto 5 cuál va hacer el valor? Eso es lo que tienen que analizar. Qué es lo que está pasando minuto a minuto en esos primeros cuatro para yo ya saber en el minuto 5 cuál va hacer ese valor mayor, entonces en el minuto 0 qué pasa?

**Estudiante 1:** nada

**Estudiante 3:** no hay nada

**Profesora:** ósea, que el tanque está? Ah?

**Estudiante 1 y 3:** vacío

**Profesora:** qué pasa en el minuto 1?

**Estudiante 1:** va aumentando

**Profesora:** pero necesitamos saber el...?

**Estudiante 3:** valor

**Profesora:** cuánto?

**Estudiante 1:** 300

**Profesora:** ahhh

**Estudiante 3:** 300

**Profesora:** ya sabemos que vamos en aumento, necesitamos saber la cantidad.

**Estudiante 3:** 300

**Profesora:** 300, qué pasa en el minuto 2?

**Estudiantes 1 y 3:** 600

**Profesora:** minuto 3?

**Estudiante 3:** 900

**Profesora:** minuto 4?

**Estudiante 1 y 3:** 1200

**Profesora:** minuto 5

**Estudiante 3:** mayor el valor?

**Profesora:** pero cuánto?

**Estudiante 2:** 1500?

**Estudiante 1:** no porque, tiene que tener allí....

**Profesora:** porque 1500?

Cuál sería la justificación Miguel?

**Estudiante 2:** porque va aumentando 300, siempre aumenta de 3.....3,6,9,12... ehhh  
15

1500

**Profesora:** entonces en el minuto 6?

**Estudiante 2:** ehhh... mil....mil... mil ochocientos?

**Profesora:** ah Miguel minuto 6?

**Estudiante 2:** 1800

**Profesora:** minuto 7?

**Estudiante 3:** 2100

**Profesora:** minuto 8?

**Estudiante 2:** 2400

**Profesora:** y hasta dónde hay que llegar?

**Estudiante 1 y 2:** hasta el 10

**Profesora:** entonces cuál será el valor en el minuto 10

**Estudiante 1:** eh eh eh 2700

**Estudiante 2:** 2700

**Estudiante 1:** 3.000

**Profesora:** 3.000 qué?

**Estudiante 1:** es la cantidad de agua

**Profesora:** y el agua está medida en qué?

**Estudiante 2:** En litros

**Profesora:** ósea que son 3.000?

**Estudiante 1 y 3:** litros de agua.

**Audio N° 8**

**Grupo N° 1**

**Tarea 4, Pto 10**

**Profesora:** cuando uno se enfrenta a una pregunta, uno tiene que desbaratarla e identificar las palabras que no entiende. De esa frase que palabras no entiende? Y mire que por lo menos yo le le.... La primera palabra clave yo la identifico, yo no se las pregunté a ustedes, pero yo la identifiqué y mire que ustedes tienen la respuesta. ¿Cuál es el máximo valor?

¿Porqué 1200 es el máximo valor?

En el tanque no va entrar más agua, cuánta es la máxima cantidad de agua que va entrar a ese tanque?

**Estudiante 1:** 1200

**Estudiante 2:** 1200

**Profesora:** 1200 litros, cuál es la pregunta? Cuánto tiempo transcurrió para que la cantidad de agua alcanzara el máximo, el tiempo esa en qué?

**Estudiante 1:** uno diría.... (No se entiende)

**Profesora:** En minutos

**Estudiante 1:** por eso, yo diría que pasaron 4 minutos

**Profesora:** y entonces?

**Estudiante 1:** ya?

**Profesora:** y cómo hallas esos 4 minutos..... mirando la gráfica?

**Estudiante 1:** ah?

**Profesora:** observando la gráfica y viendo que en el minuto 4 estaba.... Es eso es amor no es buscar cosas raras, ósea si ustedes observando la gráfica deducen ese valor... púes...

**Audio N° 9**

**Grupo N° 2**

**Tarea 4, Pto 9**

**Estudiante 1:** cómo les irá a quedar a ellos la respuesta y si les irá a gustar mi respuesta, vamos a responder la pregunta 9

Si se mantiene el comportamiento registrado durante los cuatro primeros minutos, cuál será la cantidad de agua en el tanque al cabo de 10 minutos?

Ellos dicen que no saben y yo pues... allí están diciendo si se mantiene el comportamiento óseo hasta el minuto 10, sería de 3 en 3 pues se mantiene 10 por 3

**Estudiante 2:** ok. 10 por 3..... qué?

**Profesora:** cuál es la respuesta?

**Estudiante 1:** lo que da esa operación y yo no sé si le gustará

**Estudiante 2:** pero es que está en el minuto 10

**Profesora:** cuál será la cantidad de agua en el tanque al cabo de 10 minutos. Cuál es?

**Estudiante 2:** 600? Ahí dice

**Estudiante 1:** no, no puede ser 600, hermana porque dice si... siii

**Profesora:** cuál es? Dame la respuesta?

**Estudiante 1:** haber muchachos...

**Otros estudiantes:** yo no se

**Estudiante 1:** profesora 10 por 3 es igual a 30... trescientos

**Estudiante 2:** yo digo que no, porque se supone que....

**Profesora:** es 10 por cuánto?

**Estudiante 1:** púes si cada minuto aumenta 300

**Profesora:** 300 tienes que tener cuidado con eso

**Estudiante 1:** (hace cálculos)

**Profesora:** 3 por 1 igual 3 y cuantos ceros hay? El trecientos cuantos ceros tiene?

**Estudiante 1:** dos

**Profesora:** y el diez?

**Estudiante 1:** uno

**Profesora:** entonces y 3 por 1

**Estudiante 1:** 3000?

**Profesora:** Entonces cuál es la respuesta?

**Estudiante 1:** 3000

**Profesora:** 3000, listo, tu porque sabes que sabes, que da eso?

**Estudiante 2:** en la nota

**Estudiante 1:** no lo había notado yo lo estaba diciendo porque si se mantiene el comportamiento ósea ese comportamiento, esa rutina de 300 en 300

Ellos se están guiando por la tabla

**Profesora:** Entonces como explicamos eso paso a paso para que ellos lo entiendan. Ahí, utiliza la gráfica

**Estudiante 1:** (silba) muchachos...

**Profesora:** Eso, utiliza la gráfica, eso. Qué pasó en el minuto 0?

**Estudiante 1:** nada

**Profesora:** ¿nada porque el tanque cómo está?

**Estudiante 1:** vacío

**Profesora:** vas en el minuto 1

**Estudiante 3:** aumenta a 300

**Profesora:** en el minuto 2?

**Estudiante 3:** 600

**Profesora:** en el minuto 3?

**Estudiante 3:** 900

**Profesora:** en el minuto 4?

**Estudiante 1:** 1200

**Profesora:** se va a mantener ese comportamiento, qué pasa en el minuto 5?

**Estudiante 3:** 1500

**Profesora:** en el minuto 6?

**Estudiante 3:** 1800

**Profesora:** en el minuto 7?

**Estudiante 1:** 2100... creo

**Estudiante 3:** 2200

**Estudiante 2:** cuánto en el minuto 8?

**Profesora:** 8 todavía no vamos, minuto 6?

**Estudiante 3:** 1400

**Profesora:** minuto 6?

**Estudiante 1 y 2..... (No se entiende)**

**Profesora:** miren ahí, minuto 4, devolvámonos ahí que está el minuto 4, entonces ya tenemos algo seguro, minuto 4... 1200

Minuto 5?

**Estudiante 1:** 1500

**Profesora:** minuto 6?

**Estudiante 2:** 1800

**Profesora:** minuto 7?

**Estudiante 3:** nooo....ve... 2100

**Estudiante 1:** 2100

**Estudiante 2:** aquí?...aaaaaaa

**Estudiante 3:** 2100

**Profesora:** qué están haciendo tus compañeros Alexandra?, en el minuto 1 Alexandra?

**Estudiante 2:** 300

**Profesora:** en el minuto 2?

**Estudiante 2:** 600

**Profesora:** en el minuto 3?

**Estudiante 2:** 900

**Profesora:** minuto 4... ah?

**Estudiante 2:** 1200

**Profesora:** ahí esta!!... minuto 5?

**Otros Profesor llega:** muchachos una propaganda.

**Grupo N° 2****Tarea 4, Pto 9**

**Estudiante 1:** va aumentando 300

**Profesora:** listo, entonces en el minuto 4 es visible ya el análisis empieza de allí para allá porque ya no se ve.... Minuto 5?

**Profesora:** ah?

**Estudiante 1:** 1500

**Profesora:** minuto 6, todos, todos!

**Estudiantes:** 1800

**Profesora:** minuto 7?

**Estudiante 2:** ciennn.... 2100

**Profesora:**  $8 + 300$ ?

**Estudiante 2:** 11

**Estudiante 1:** qué?

**Estudiante 2:**  $8 + 3$  igual 11... mil 100

**Profesora:** cálculo mental muchachos...

**Estudiante 2:** 2400 en el minuto 8

**Profesora:** en el minuto 8.. 2400... minuto 9?

**Estudiante 3:** 2700

**Profesora:** en el minuto 10?

**Estudiante 3:** 3000

**Profesora:** listo?

**Audio N° 11****Grupo N° 2****Tarea 4, Pto 10**

**Estudiante 1:** de cero cuanto tardó eso para llegar al máximo, no?... entonces cuanto tardaría en vaciarse, otros 4 minutos

**Profesora:** seguro?.....

Observen como se está vaciando

**Estudiante 1:** pues aquí, ósea, es.... (No se entiende)... que lo estaba haciendo pero para este lado

**Estudiante 2:** pero es el máximo, no sé poor... el máximo es 1200

**Profesora:** ajá el máximo es 1200, ahí si hay una claridad, cierto? El tope máximo del tanque, ahí no le cupo más o no le entro más, llegó a 1200 litros. En qué parte es donde ella se empieza a vaciar, porque aquí es muy claro...

**Estudiante 1:** en el minuto 5

**Profesora:** si se conserva la disminución o el decrecimiento dónde pasa eso?

**Estudiante 1:** a partir del minuto 7

**Profesora:** ahí es donde vamos hacer el análisis, ósea, tú no te puedes devolver al llenado, porque el llenado no afecta el decrecimiento, entonces a partir de eso, qué empieza a pasar ahí?

**Estudiante 2:** de 1200?

**Profesora:** está en 1200

**Estudiante 1:** noooo seriaaa....

**Estudiante 3:** minuto 7

**Profesora:** cuál es el minuto siguiente?

**Estudiante 3:** minuto 7

**Profesora:** dónde empieza a vaciarse?

**Estudiante 3:** en el minuto 7

**Estudiante 1: (No se entiende)**

**Estudiante 3:** o en el minuto 6

**Profesora:** noooo. En el minuto 6

**Estudiante 2:** aaaahhhh

**Estudiante 1:** si viera, entonces aquí sería 6

**Estudiante 2:** yo no sé, usted dijo que 7

**Estudiante 1:** dejémoslo así ahora miramos, miremos mas esta

**Profesora:** entonces qué pasa en el minuto 6 cuánto hay?

**Estudiante:** 1200

**Profesora:** y observen, coloquen el cursor en 6 y un poquito

**Estudiante 2:** 6?

**Profesora:** seis y un poquito

**Estudiante 2:** ósea, empieza a bajar, desde, no desde el minuto 6, sino desde el...

**Profesora:** en el minuto 6 hay 1200

6 y un poquito ya qué pasa cuánto hay?

**Estudiante 3:** seis, 6, 14

**Profesora:** cuánto hay?

**Estudiante 2:** seis...

**Profesora:** ah ah?... millll...

**Estudiante 1:** miiilll

**Estudiante 2:** ahhh mil..... 1176

**Profesora:** ósea que ya no hay 1200 sino menos, ósea que a partir del minuto 6 es que empieza a disminuir

**Estudiante 2:** hmhhh...

**Profesora:** ahora en el minuto 7. Ya cuánto hay?

**Estudiante 3:** 1000

**Profesora:** entonces en un minuto que pasó?

**Estudiante 3:** disminuyó

**Estudiante 2:** disminuyó

**Estudiante 3:** disminuyo 1200.....

**Estudiante 1:** Disminuyó 200 y va disminuyendo de 200 en 200

**Profesora:** ahhhh entonces?

**Audio N° 12**

**Grupo N° 2**

**Tarea 4, Pto 10**

**Estudiante 1:** se tardarían....

**Estudiante 2:** 2, 4, 6, 8, 10,12... 6 minutos

**Estudiante 3:** a yo veo 5 aquí

(silenci0)

**Profesora:** hágalo con la gráfica, mire, observe la gráfica

**Estudiante 3:** se supone que disminuye desde el 6 no? 1, 2, 3, 4,5

**Estudiante 1:** Entonces serían 5, porque yo solo estoy contando...

**Profesora:** hasta vaciarse

**Estudiante 2:** serían 6

**Estudiante 3:** por eso

**Profesora:** vaciarse qué es?

**Estudiante 1:** no, no, no, empiece lo enumero desde 6 1,2,3,4,5,6,7, porque es hasta el máximo, ósea disminuye todo

**Estudiante 2:** pero si está diciendo mire....

**Estudiante 1:** si es que....

**Estudiante 2:** cuánto tiempo?, pero si en el minuto 6 ya no hay nada hermano, ya no hay nada

**Profesora:** listo, empiece está en el tiempo 0, está en el máximo, en el máximo cuál es?

**Estudiante 1:** en el tiempo 6

**Estudiante 3:** 4

**Profesora:** no, cuál es la cantidad máxima?

**Estudiante 1:** 1200

**Profesora:** listo, en el siguiente minuto qué pasa?

**Estudiante 3:** vaaa.....

**Estudiante 1:** sigue 1200

**Profesora:** 200 va un minuto, en un minuto se vacía 200

**Estudiante 1:** por cada minuto vaciaría 200

Entonces tardaría 6 minutos para que ya no haya nada, no haya nada, claro porque  $6 + 6$  igual 12

**Profesora:** háganlo gráficamente o hagan los cálculos ahí. 1200, cuántas veces tengo que quitarle 200 a 1200 para que me quede en cero?

**Estudiante 2:** cuantas veces qué?

**Profesora:** tengo que quitar 200 a 1200

**Estudiante 1:** seis veces

**Estudiante 3:** si, si ...

### Audio N° 13

#### Grupo N° 1

#### Tarea 5, Pto 6

**Profesora:** Pregunta No. 6

**Estudiante 1:** Bueno, en la pregunta No. 6, la respuesta correcta en la A, uno solamente, ya que en la gráfica se puede ver que la llave 3 demora 16 minutos en llenar, o sea que emplea más tiempo para llenar que las otras dos llaves, que es la llave 1 que demora 6 minutos y la llave 2 que se demora 9 minutos.

La dos es falsa porque la cantidad que vierte entre el minuto 2 y 3 es la misma a la que vierte en el minuto 7 y 8.

Y la afirmación tres es falsa porque entre el minuto 8 y 9, la llave 3 sólo vierte 150 litros de agua.

### Audio N° 14

**Grupo N° 6****Tarea 5, Pto 2****Profesora:** pregunta No.2**Estudiante 1:** la opción correcta es la dos.... solamente**Estudiante:** la D... (dice desde atrás)**Estudiante 1:** el tanque alcanzó su mayor capacidad con la llave 2 en el minuto 9. Nosotros hicimos la cuenta en el minuto 2, al minuto 9 (risas... no pudo seguir explicando le dio pena)**Estudiante 2:** La pregunta.... Pues, la... nosotros decimos que era la correcta porque dice que el tanque alcanza su mayor capacidad con la llave 2 en el minuto 9, la llave 2 al minuto 9 alcanza 2400 litros de agua que es el valor máximo que alcanza el tanque de almacenamiento en todo el tiempo.**Profesora:** y qué pasa con la opción 1 y 3 porque las descartan?**Estudiante 2:** la opción 1 dice en el minuto 6 la capacidad de agua almacenada en el tanque por la llave 3 es más de 1000 litros de agua, al minuto 6 la llave 3 al minuto 6 está en 900 esta menor que 1000 litros de agua, entonces por la cual es falsa.

La tres dice al iniciar el llenado con cada llave el tanque se encontraba vacío?

Decía que no porque la llave 2 empezaba desde más, desde 800... no puede ser (silencio)

**Estudiante 1:** para acá..... (Explicando hacia dónde dirigir el cursor)**Profesora:** tienes que sostenerlo**Estudiante 2:** 600 o sea que no estaba vacío.**Audio N° 15****Grupo N° 2****Tarea 5 Pto 3****Profesora:** Pregunta No. 3**Estudiante 1:** Nosotros elegimos la C, que es 1 y 3 solamente, porque la 1 dice en el minuto 3 la llave 1 y 2 han llegado a la misma cantidad de agua. Entonces acá, dice que 1200, entonces pues.....(No se entiende)

La 3 en el minuto 4, la cantidad de agua almacenada en el tanque por la llave 2 es menos de 1500 litros y acá dice 1400

**Estudiante 2:** y descarte la otra...**Estudiante 1:** la otra? Ahhhh.... La cantidad máxima de agua en el tanque es de 2500 litros de agua y ahí dice que la cantidad máxima de agua es de 2400.**Profesora:** Importante, entonces que pasa con esta opción?**Estudiante 2:** queda descartada.**Audio N° 16****Grupo N° 3****Tarea 5, Pto 4****Profesora:** Pregunta No. 4**Estudiante 1:** En la pregunta 4 ninguna de las afirmaciones es correcta porque en el minuto 2 el tanque no registra la mayor cantidad en el agua con el llenado.

En la segunda a partir del minuto 6, la cantidad de agua de llenado no es fija entre el 5 y 8 minuto la llave no hecha 600 litros al tanque.



**Profesora:** si no, Cuanto?

**Estudiante 1:** sino hecha 450.

**Audio N° 17**

**Grupo N° 5**

**Tarea 5, Pto 5**

**Profesora:** Pregunta 5

**Estudiante 1:** cuál o cuáles de las siguiente afirmaciones.... (No se entiende)

**Profesora:** cuál es la respuesta?

**Estudiante 1:** 2 y c... (Corrige) 2 y 3 solamente

**Profesora:** entonces por qué?

**Estudiante 1:** la dos porque dice que la llave 1 es la que más emplea menos tiempo para llenar su máxima capacidad del tanque y sii..

Porque se demora 5 minutos.... (Corrige) Seis minutos en llenarla

**Profesora:** y las otras?

La llave dos se demora 9 minutos en llenarse y la 3 se demora 16 minutos.

Y la Tercera dice entre el minuto 8 y 9 la llave 3 vierte 200 litros

**Estudiante 2:** 400...

**Estudiante 1:** doooss.. aquí dice 200 litros.... Así! Estoy leyendo la que no es.... En el minuto 5 y 6 la llave vierte 400 litros yyy... .

**Estudiante 2:** si, mire que teniendo el máximo en la gráfica eso es lo que pasa para llegar a su máxima cantidad

**Profesora:** es la opción 3, la que están explicando?

**Estudiante 2:** allá, llega a todo lo que da, ella utiliza dos mil.....400 litros

**Profesora:** Cuál era el valor inicial del minuto 5

**Estudiante 2:** 2000 litros, eran 2000 litros entonces como la máxima es 2400 entonces eso ya completó

**Profesora:** no. Lean, lean ... el punto 3

**Estudiante 2:** la llave vierte....

**Estudiante 3:** Profe ya

**Estudiante 1:** si .... Porque....

**Profesora:** léanlo para que den la explicación. Que dice ahí? Cuál es la afirmación?

**Estudiante 1:** Entre el minuto 5 y 6 la llave 1 vierte 400 litros

**Profesora:** entre el minuto 5 y 6 la llave 1 vierte 400 litros, porqué eso es verdadero?

**Estudiante 1:** porque cada minuto ehheh see... el tanque se llena de a 200 litros entonces entre el minuto 5 y 6...

**Profesora:** sólo hay un minuto

**Estudiante 2:** en ese minuto es dónde la cantidad aumenta 400 litros llenándola

**Profesora:** en el minuto 5 la llave 1?... .

**Estudiante 2:** según la escala que lleva la llave 1 para poder completar, le faltarían 400 para pasar ella va aumentando de 400 en 400

**Profesora:** aaaahh... es diiii...

**Estudiante 2:** es diferente a lo que ellos estaban diciendo

**Profesora:** aaahhhh, entonces, va aumentando... esa es la llave que?

**Estudiante 2:** 1

**Profesora:** la llave 1 va aumentando de cuanto en cuánto?

**Estudiante 2:** de 400 litros

**Profesora:** de 400 en 400

Porque descartan la opción dos? O la 1?

**Estudiante 2:** es la 1

**Profesora:** ósea, ustedes dicen que las correctas son la 2 y la 3

**Estudiante 2:** Dice que la cantidad de agua que vierte la llave 3 entre el minuto 1 y 2 es mayor a la cantidad de agua que vierte entre el minuto 13 y 14, entonces nosotros creemos que eso es mentira.

Porque en los minutos iniciales 1 y 2 es menor cantidad de agua vertida, en cambio entre el 13 y 14 ya casi están llegando a lo máximo que puede almacenar

**Profesora:** cómo así?, entre el minuto 1 y 2 cuanto vierte?

**Estudiante 2:** entre el minuto 1 y 2 vierte 200 litros, 200 litros

**Profesora:** cuál llave, cuál llave estamos analizando?

**Estudiante 1:** la llave 3

**Estudiante 2:** la llave 3

**Profesora:** listo, estamos en la llave 3

**Estudiante 2:** 150

**Estudiante 1:** 150

**Profesora:** entre el minuto 1 y el 2.... Ciento..

**Estudiante 2:** pasa de verter 300 a 450

**Profesora:** aaa 450, ósea que la diferencia del cambio es cuánto?

**Estudiante 2:** en el minuto...

**Profesora:** no entre 1 y 2

**Estudiante 2:** entre 1 y 2... 150

**Profesora:** 150, ahora vamos al..

**Estudiante 2:** entre el minuto 13 hay 1950 y pasa al 14... 2100

**Profesora:** ósea, cuanto es el cambio?

**Estudiante 2:** 250.... No esperece..... 50..... 150

**Profesora:** 150, entonces porque es falsa?

**Estudiante 2:** ah ah si

**Profesora:** es verdadera?

**Estudiante 1:** es falsa

**Profesora:** porque es falsa?

**Estudiante 1:** porque la llave 3 nunca para de aumentar hasta llegar a su máximo

**Estudiante 2:** porque en el minuto 13 y 14 hay mayor vertimiento que en el 2 y 3

**Profesora:** si es mayor?

**Estudiante 2:** si aquí... es mayor

**Profesora:** seguro?

**Estudiantes hablan**

**Profesora:** entre 1 y 2 cuál es el cambio?

**Estudiante 1 :** a 150

**Profesora:** es de 150

**Estudiante 2:** es 150 y 150

**Profesora:** y en el minuto 13 y 14 cuál es el cambio?

**Estudiante 2:** 150... son iguales

**Profesora:** cómo son esos cambios?

**Estudiante 1:** iguales

**Profesora:** y ahí que les están diciendo?

**Estudiante 2:** entonces si es verdadero

**Profesora:** ahí les están diciendo que...

**Estudiante 2:** si es verdadera

**Profesora:** qué les están diciendo?

**Estudiante 2:** queeee.....

**Estudiante 1:** están diciendo que la cantidad de agua que vierte entre el minuto 2 y 3 es mayor a la cantidad de agua entre el minuto 13 y 14

**Estudiante 2;** Pro es verdadera

**Profesora:** es mayor?

**Estudiante 1:** ninguna es mayor, entonces es falsa

**Estudiante 2:** es verdadera

**Estudiante 1:** es falsa porque la cantidad de agua que vierte la llave 3 entre el minuto 1 y 2 es mayor a la cantidad que vierte en el minuto 13 y 14

**Estudiante 2:** pero es que estas....

**Estudiante 1:** no es mayor

**Profesora:** cómo es?

**Estudiante 1:** es igual, entonces es falsa

(El estudiante 2 piensa)

**Estudiante 2:** pues la verdad si, según teniendo en cuenta lo que dice, es igual, entonces es falsa. Porque es igual no mayor.

### Audio N° 18

#### Grupo N° 4

#### Tarea 5 , Pto 5

**Profesora:** Pregunta No. 5

**Estudiante 1:** cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones mirando las gráficas es o son verdaderas?

Primera, la cantidad de agua que vierte la llave 3 en el minuto 1 y 2 es mayor a la cantidad de agua que vierte en el minuto 13 y 14, es falso.

Porque en el minuto 1 y 2 hay menor cantidad de agua, litros y en el minuto 13 y 14 hay más y en el...

**Profesora:** Pero la pregunta es cuánto vierte? Ósea cuanto entra? Cuanto entra entre el 1 y 2 y cuanto entra entre el 13 y 14?

**Estudiante 1:** En el 1 y 2 entran... con la llave 3 cierto?

**Estudiante 2:** si

**Estudiante 1:** entran 1 y 2, entra 1, como se dice?, entran 1 coma 1150, cierto?, 1150 y en la dos entran 2300

**Profesora:** dos mil trecien.....

**Estudiante 1:** dos...

**Estudiante 2:** no. Es 600 litros

**Profesora:** cuanto.....

**Audio N° 19**

**Grupo N° 4**

**Tarea 5, Pto 5**

**Profesora:** pregunta No. 5

**Estudiante 1:** la respuesta es la c, porque la llave 1 es la que emplea menos tiempo para llenar la cantidad

**Profesora:** cuánto tiempo emplea la llave 1?

( silencio)

**Estudiante 2:** 9 minutos?... 9 minutos

**Estudiante 1:** 6 minutos

**Profesora:** y las otras cuánto?

**Estudiante 1:** la 2...9 y la 3...16

**Estudiante 2:** 16, ósea la que menos emplea agua es la llave 1

**Profesora:** ósea que esa es verdadera

**Profesora:** ahora la 3, dicen también que es verdadera por qué?

**Estudiante 2:** la llave 1...

**Profesora:** qué pasa allí. Léanla.

**Estudiante 1:** porque en el minuto 5 tiene 200 litros de agua y en el minuto 6... ehh lleva 204 milll.... (Corrige) 2400 litros

**Estudiante 2:** ósea aumenta 400

**Profesora:** cómo así? En el minuto 5 cuánto?

**Estudiante 1:** 2000 litros

**Estudiante 2:** 2000 y en el 6 sube 400, ósea....

**Profesora:** llega a?

**Estudiante 2:** llega a 2400 litros

**Profesora:** ósea que esa también es?

**Estudiante 2:** verdadera

**Profesora:** y dicen que la 1 es falsa

**Estudiante 1:** porque la llave 3 en el minuto 1 y 2 tiene la misma cantidad que....

**Profesora:** cuánto vierte?

**Estudiante 1:** 150 litros

**Profesora:** y entre el minuto 13 y 14

**Estudiante1:** lo mismo

**Estudiante 3:** 150 litros

**Profesora:** quiere decir que esa opción es?

**Estudiante 2:** falsa

**Profesora:** eso

**Audio N° 20**

**Grupo N° 7**

**Tarea 5, Pto 2**

**Profesora:** Pregunta No. 2.... Vean me colaboran por favor que falta un grupo!!!

**Estudiante 1:** En el minuto 6 la cantidad de agua almacenada en el tanque por la llave 3 es más de un litro? No

Porque en el minuto 6 la llave 3 apenas llega a 900 litros de agua..... (No se entiende)

Alcanzada su mayor capacidad con la llave 2 en el minuto 9? Si

Al llegar al minuto 9, la llave 2 llega a su máxima cantidad de agua,

Al iniciar... la tercera... al iniciar el llenado con, con la cada llave, ah no, con cada llave, el tanque se encontraba vacío... no?, porque la llave 2 comienza el 510 litros de agua

**Profesora:** Listo?

### Audio N° 21

**Profesora:** Prueba Evaluación pregunta No. 6

**Estudiante 1:** para mí, la respuesta correcta es la C, la llave 2

**Profesora:** Por qué razón?

**Estudiante 1:** porque, mientras las otras llaves tardan dos segundos, algunas empiezan desde 0, otras desde 2 o tal vez un segundo.

Yo escogí esta porque es la que tarda un segundo que se llene totalmente.

Haber...

Además como aquí no pregunta desde donde inicia y sino cuál es la que menos tiempo tarda en llenar, entonces yo usando la lógica y lo que vi en la gráfica, escogí la llave 2.

### Audio N° 22

**Profesora:** Prueba de Evaluación pregunta No. 6

**Estudiante 1:** Yo elegí la llave 2, ya que es la que menos tiempo se demora a cambio de que las demás llaves a pesar de que empiecen antes se demoran máximo dos segundos y tres en llenarse.

*Anexo C. Entrevista Semiestructurada a los estudiantes*

Cuestionario para la Entrevista.

Marque con una x en la escala de uno a cinco, donde uno es lo mínimo y cinco es lo máximo.

Justifica tu respuesta.

A. Desde tu punto de vista califique el aporte de tener las gráficas en el software Geogebra para dar respuesta a las preguntas del punto cinco.      1   2   3   4   5  
Justificación \_\_\_\_\_

B. Después de ver el video te resulto fácil identificar relaciones de dependencia en la vida cotidiana.      1   2   3   4   5  
Justificación \_\_\_\_\_

C. Tu esfuerzo y dedicación frente a las dificultades en el momento de realizar las tareas propuestas.      1   2   3   4   5  
Justificación \_\_\_\_\_

D. Tu actitud de escucha a las explicaciones dadas por tus compañeros.      1   2   3   4   5  
Justificación \_\_\_\_\_

E. Cómo calificas el grado de dificultad para acceder y manipular las tareas dinámicas en el software Geogebra.      1   2   3   4   5  
Justificación \_\_\_\_\_

Qué elementos o características del trabajo en grupo favorecieron el desarrollo de las actividades de aprendizaje?

R/ \_\_\_\_\_

¿Qué es lo que más te llamo la atención de haber participado en este proyecto de investigación?

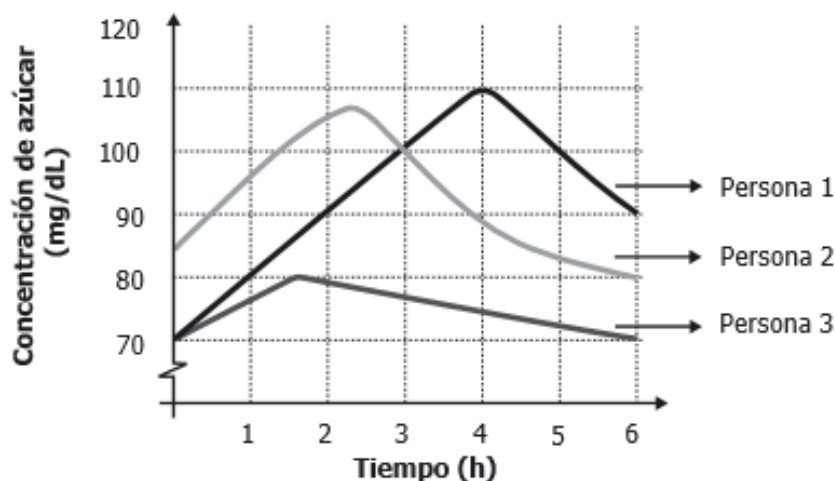
R/ \_\_\_\_\_

¿Describe las acciones en las que participó tu profesora durante la investigación en el salón de clase?

R/ \_\_\_\_\_

Anexo D. Preguntas de la Prueba Diagnóstica

7. La gráfica representa el nivel de concentración de azúcar en la sangre, medida en miligramos por decilitro (mg/dL), durante 6 horas.



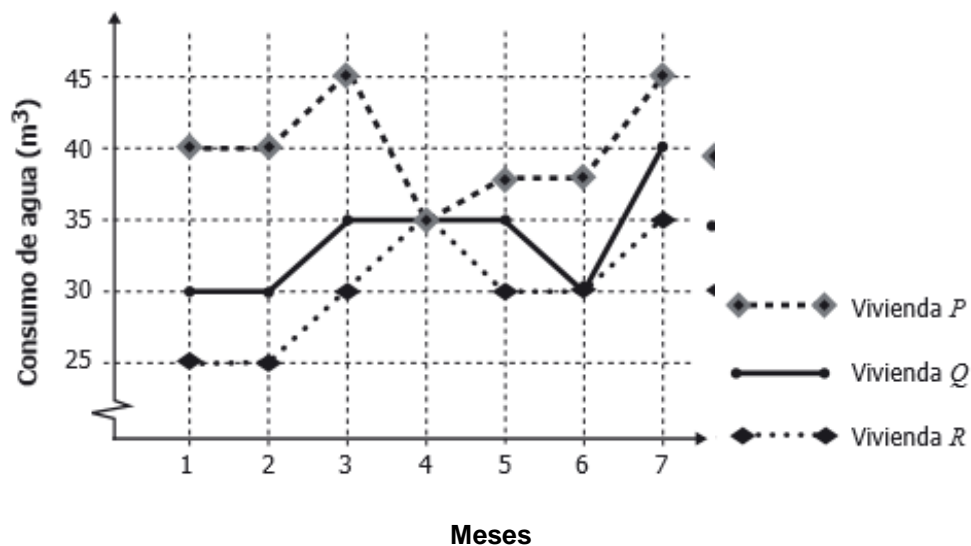
- I. La concentración de azúcar en la sangre de las tres personas disminuyó durante las dos últimas horas.
- II. La concentración de azúcar en la sangre de las tres personas aumentó durante las dos primeras horas.
- III. La concentración de azúcar en la sangre de las personas 1 y 2 fue igual a las tres horas.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones es o son verdaderas?

- A. I solamente.
- B. II solamente.
- C. I y III solamente.
- D. II y III solamente.

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de la pregunta N° 23 del cuadernillo de la prueba saber Matemáticas 9° del año 2013.

11. La gráfica muestra el consumo de agua en metros cúbicos ( $m^3$ ) de tres viviendas en 7 meses



¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la gráfica es o son verdadera(s)?

- I En el mes 6 la vivienda P tuvo un consumo de más de  $40 m^3$  de agua.
- II La vivienda Q alcanza el mayor consumo en el mes 7.
- III En el mes 4 las tres viviendas consumieron el mismo número de  $m^3$  de agua.

- A. I solamente.
- B. I y III solamente.
- C. III solamente.
- D. II y III solamente.

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de la pregunta N° 4 del cuadernillo de la prueba saber Matemática 9° del año 2013.

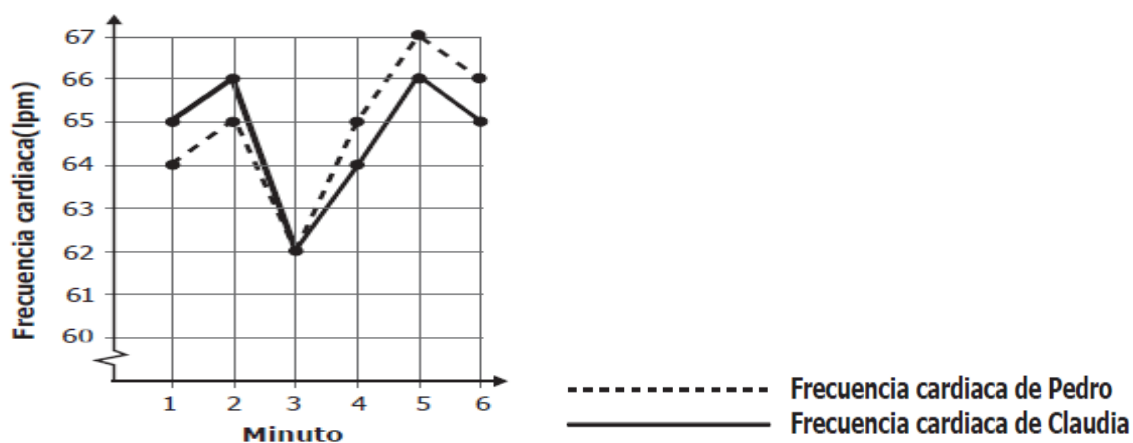


*Anexo E. Preguntas de la Prueba Final*

Esta prueba consta de cuatro preguntas. Entre ellas la segunda pregunta corresponde con la pregunta N° 7 de la prueba diagnóstica y la tercera con la pregunta N° 11. Las dos restantes se presentan a continuación:

**Pregunta N° 1**

El gráfico muestra la frecuencia cardiaca, medida en latidos de corazón por minuto (lpm) de Pedro y Claudia, durante 6 minutos



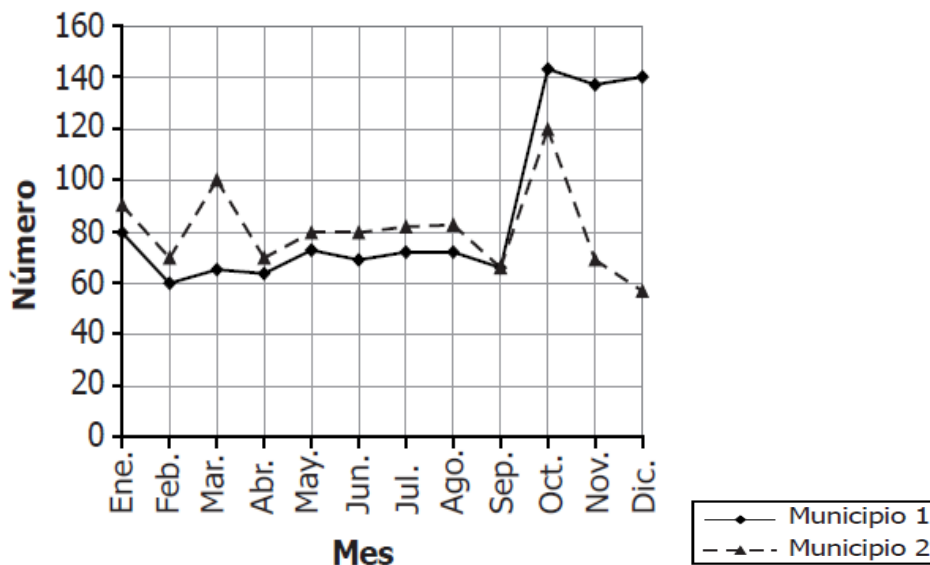
Cuál es el valor mínimo y el máximo que alcanza la frecuencia cardiaca de Claudia respectivamente:

- A. 65 Y 65 lpm
- B. 65 Y 66 lpm
- C. 62 Y 65 lpm
- D. 62 Y 66 lpm

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de la pregunta N° 2 del cuadernillo de la prueba saber Matemáticas 9° del año 2014.

### Pregunta N° 4

La siguiente gráfica muestra el número de vehículos nuevos, vendidos en dos municipios durante el 2013.



¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la gráfica es o son verdadera(s)?

- I. En el Municipio 1 en el mes de noviembre se vendieron entre 140 y 160 vehículos.
  - II. En el mes de marzo en el Municipio 2 vendieron el mayor número de vehículos.
  - III. En el mes de septiembre los dos Municipios vendieron el mismo número de vehículos.
- A. I solamente.
  - B. II y III solamente.
  - C. III solamente.
  - D. I y II solamente.

**Nota.** Fuente: Elaboración propia a partir de la pregunta N° 2 del cuadernillo de la prueba saber Matemáticas 9° del año 2009 a.

*Anexo F. Carta de Consentimiento*



**CONSENTIMIENTO INFORMADO**

(Personas menores de edad)

Santiago de Cali, 3 de noviembre de 2016

Nombres y apellidos completos de los estudiantes-maestros que llevan a cabo el estudio:

Nombres y apellidos	Número de cédula	Teléfono
1. Gisela Murillo Jurado	31573304	3154299902
2. Johanna Ortiz Bravo	31573129	3185004207

En calidad de estudiantes de la Maestría en Educación de la Universidad ICESI y en el marco del desarrollo de nuestro Trabajo de Grado, que tiene como objetivo principal: **“Diseñar una secuencia didáctica para el estudio de fenómenos de variación a través de las gráficas cartesianas”**.

Solicitamos su consentimiento, para realizar con los estudiantes del grado 8-4 de la Institución Educativa General Francisco de Paula Santander, sede José Vicente Concha el mencionado estudio.

Es importante, antes de confirmar su participación informarle que:

- Este es un proceso que no le reporta ningún riesgo directo o indirecto a los menores participantes.
- Se espera que las actividades en las que participe, no le generen ningún tipo de molestia. Sin embargo, el niño/la niña tiene el derecho a manifestar sus inquietudes o abstenerse de responder en el momento en que lo considere adecuado.

- Las respuestas y todos los registros de participación se mantendrán anónimos durante el procesamiento, análisis y presentación de resultados. Solamente serán usados dentro de este proyecto.
- Ni usted ni el niño/la niña recibirán ningún tipo de incentivo económico o de otro tipo por participar en este estudio.
- El niño o niña deberá consentir verbalmente su participación y podrá negarse en cualquier momento del estudio, sin que ello implique perjuicio alguno.
- Durante la realización de las actividades, se usarán herramientas tecnológicas para registrar información: grabaciones de video, audio o fotografías; que servirán para garantizar la fidelidad de los datos, pero no serán divulgadas por ningún medio sin un consentimiento específico para su divulgación.
- Usted puede solicitar ampliación de información sobre el estudio en el momento en que lo desee.

Si comprendió los alcances de los términos que ha leído, por favor coloque una cruz en el cuadro que se encuentra al lado de la frase HE COMPRENDIDO.

HE COMPRENDIDO LOS ALCANCES DEL CONSENTIMIENTO  
INFORMADO

Yo, \_\_\_\_\_ en carácter de  
padres/tutores/responsables autorizo que el estudiante  
\_\_\_\_\_ participe en las actividades  
propuestas durante las clases de Matemáticas que se desarrollarán durante el mes de noviembre  
del año en curso.

Firma del padre:	Firma de la madre:
Número de cédula:	Número de cédula: