UNIVERSIDAD ICESI
CENTRO DE RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Trabajo de grado

CAMBIOS PRODUCIDOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS FAMILIAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO A TRAVÉS DE SITUACIONES DIDÁCTICAS UTILIZANDO GEOGEBRA

EMILSE INSUASTY OSSA

SANTIAGO DE CALI
2014

CAMBIOS PRODUCIDOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS FAMILIAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO A TRAVÉS DE SITUACIONES DIDÁCTICAS UTILIZANDO GEOGEBRA

EMILSE INSUASTY OSSA

Trabajo de grado presentado como requisito para la obtención del grado de Magister en Educación

Director:
ARMANDO ZAMBRANO LEAL

UNIVERSIDAD ICESI
CENTRO DE RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2014

Dedicatoria

A mis padres, quienes han sido desde siempre fuente de mi inspiración, referente de valores y fuerza espiritual.

A mi sobrino, quien llena mi vida de alegría y entusiasmo.

A mi hermano, compañero admirable en el transcurrir de la vida.

A Dios por las bendiciones recibidas y las valiosas oportunidades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis profesores y compañeros de la Maestría en Educación, por fortalecer mi formación y porque con ellos tuve la oportunidad de vivenciar el trabajo académico de manera significativa.

De manera especial agradezco al Doctor Armando Zambrano Leal, Director de este trabajo de grado, por su apoyo y por guiarme en la producción investigativa de manera exigente pero alentándome siempre al trabajo con esfuerzo.

Agradezco a los estudiantes del grado noveno del colegio Bennett por su participación y contribución al desarrollo de la investigación. También a las directivas que me acogieron y me brindaron la oportunidad de hacer la intervención experimental en el aula de clase, así mismo a la profesora María del Pilar por el apoyo brindado en la implementación del diseño didáctico.

A las personas que me acompañaron en este proceso de formación apoyándome en todo momento con palabras de aliento y cariño.

Gracias.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN....1
INTRODUCCIÓN....3
1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN....5
1.1.Presentación y formulación del problema de investigación....5
1.2 Justificación....9
1.3 Antecedentes....16
1.4 Objetivos de la Investigación....21
1.4.1 Objetivo General....21
1.4.2 Objetivos Específicos....21
2. MARCO TEÓRICO....22
2.1 Orígenes de la Teoría de Situaciones Didácticas....22
2.2 La Modelización de las Situaciones Didácticas....23
2.3 Clasificación de las Situaciones Didácticas....25
2.3.1 Situación de Acción....25
2.3.2 Situación de Formulación....27
2.3.3 Situación de Prueba o de Validación Social....28
2.3.4 La Institucionalización....30
2.4 Movilización de Saberes....31
3. MARCO METODOLÓGICO....35
3.1 Contexto y participantes....35
3.2 Fuentes de información previa a la implementación del Diseño Didáctico....38
3.3 Diseño de la Investigación....41
3.3.1 Prueba Diagnóstica....41
3.3.2 Diseño Didáctico Prueba Piloto....42
3.4 Implementación del Diseño Didáctico....44
4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS....48
4.1 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 1. Variación del parámetro "a" y sus efectos en las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a\mathbf{x}^2$....52

4.2 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 2. Familia de funciones cuadráticas: $f(x)=ax^2+c$ ... 61
4.3 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 3: Familias de funciones cuadráticas según puntos de corte en el eje x. ... 73
4.4 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 4: Desplazamiento de la gráfica de $f(x) = a\mathbf{x^2}$. Funciones de la forma $f(x) = a (x-h)^2 + k$. ... 79
5. CONCLUSIONES ... 87
BIBLIOGRAFÍA ... 93
ANEXOS ... 97
Anexo A. Horarios actividades en la fase experimental. ... 97
Anexo B. Programación y fundamentación del área de matemáticas del Colegio Bennett. ... 98
Anexo C. Situación problema. ¿Cómo reducir el impacto de tu huella ecológica? grado noveno. Área de matemáticas del Colegio Bennett. ... 101
Anexo D. Diseño aplicado en la prueba piloto ... 104
Anexo E. Diseño de las situaciones didácticas ... 108
Anexo F. Evaluación: familias y parámetros de funciones cuadráticas. ... 114

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Esquema situación de acción. (Brousseau, 2000a, p.12)) …………………….…. 26

Figura 2. Esquema situación de comunicación (Brousseau, 2000a, p. 13) ………………. 27

Figura 3. Esquema de situación de prueba o de validación social. (Brousseau, 2000a, p. 14) ……………………………………………………………29

Figura 4. Organización de estudiantes en la sala de apoyo. aplicación del diseño didáctico. 24 de febrero de 2014…………………………………………………. 46

Figura 5. Hojas de respuestas de dos estudiantes. Situación didáctica 1: la variación del parámetro “a”…..……………………………………………………………………. 46

Figura 6. Respuestas de la pregunta a – situación 1. Estudiantes 2 y 7 ..…………………53

Figura 7. Respuestas de la pregunta b – situación 1. estudiantes 9 y 11 ………………….54

Figura 8. Respuestas a la pregunta c – situación 1. estudiantes 7 y 10 ………………….. 55

Figura 9. Registros de la respuesta al literal i. sección *CONCLUYE*. situación 1. estudiantes filas 2, 5, 7 y 8 ………………………………………………………… 57

Figura 10. Respuestas al literal ii (a). sección *CONCLUYE*. Situación 1. Estudiantes 1 y 7 ……………………………………………………………………..59

Figura 11. Respuestas al literal ii (b). sección *CONCLUYE*. Situación 1. Estudiantes 1, 7 y 10 ………………………………………………………………...60

Figura 12. Respuestas al literal (a). Situación 2. Estudiantes 13, 1 y 3 ……………………63

Figura 13. Respuestas al literal (b). Situación 2. Estudiantes 3, 6 y 16 ……………………64

Figura 14. Respuestas al literal (c). Situación 2. Estudiantes 5, 6 y 16…………………… 65

Figura 15. Fase de prueba. Aplicación de la Situación 2. 24 de febrero de 2014 ……….. 67

Figura 16. Registros de la respuesta al literal a. sección *concluye*. Situación 2. Estudiantes filas 2, 5, 6, 7 ………………………………………………………….. 68

Figura 17. Registros respuestas no esperadas al literal a. sección *concluye*. Situación 2. Estudiantes filas 1 y 3 ……………………………………………………………… 70

Figura 18. Respuestas al literal b. sección *concluye*. Situación 2. 71 Estudiantes 6, 10 y 16 ……………………………………………………………71

Figura 19. Respuesta al numeral 6 de la evaluación. Estudiantes 6, 10 y 13…………….. 72

Figura 20. Respuesta al literal b de la Situación 3. Estudiantes 1 y 2………………………74

Figura 21. Respuesta al literal b de la Situación 3. Estudiante 14 ……………………………75
Figura 22. Respuesta al literal c de la Situación 3. Estudiantes 15, 16 y 2………………...77
Figura 23. Respuesta a la introducción de la Situación 4. Estudiantes 13 y 15…………...80
Figura 24. Respuesta a los literales a y b - Situación 4. estudiantes 5 y 13......................81
Figura 25. Respuesta a los literales e y f - Situación 4. estudiantes 2 y 11 ……………….83
Figura 26. Respuesta al literal a. Sección *CONCLUYE* - Situación 4.
Estudiantes 2 y 11 ………………………………………………………………… 84

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Distribución de estudiantes por grupos del grado noveno 37
Tabla 2. Categoría de análisis. 1. Objeto de aprendizaje 49
Tabla 3. Categoría de análisis. 2. Interacción social y con el medio 50
Tabla 4. Categoría de análisis. 3. Comportamiento: actitudes favorables hacia el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas 51

RESUMEN

Este trabajo presenta el análisis de los cambios que se producen en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado noveno, implementando situaciones didácticas de enseñanza con el software Geogebra y su aplicación para la movilización de saberes en torno a este concepto. La investigación se sustenta a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas fundada por el investigador y didacta francés Guy Brousseau (1986), es de tipo cualitativo descriptivo y se inscribe en la modalidad cuasi-experimental. La implementación de las situaciones didácticas logró promover una actuación dinámica y de autonomía en los estudiantes para la apropiación del aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas. La interacción con el software Geogebra fue determinante para que el saber se manifestara mediante construcciones nuevas en ese medio y se lograran mejores desempeños por parte de los estudiantes.

Palabras claves: Teoría de las Situaciones Didácticas, familias de funciones cuadráticas, software Geogebra, Didáctica de las matemáticas, Institucionalización.

ABSTRACT

This work presents an analysis of the changes that occur when students are learning about the family of quadratic functions, implementing didactic situations teaching with Geogebra software and its application for knowledge mobilization using this concept. The research is based from the Theory of Didactic Situations founded by French researcher and training analyst Guy Brousseau (1986), is descriptive qualitative and enroll in the quasi-experimental method. The implementation of didactic situations successfully promoted a dynamic and autonomous performance in students helping them to learn acquisition of families of quadratic functions. The interaction with the Geogebra software was the instrument to get the knowledge to build new constructions in that environment and the students to get better performances in class.

Keywords: Theory of Didactic Situations, families of quadratic functions, Geogebra software, Mathematics Education, Institutionalization.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se inscribe en el campo de investigación de la Didáctica de las Matemáticas. En este caso se ha consolidado la noción de función como uno de los objetos esenciales de estudio, teniendo en cuenta los procesos de enseñanza y de aprendizaje en el contexto escolar. En particular, se propone el estudio de la variación de los parámetros en familias de funciones cuadráticas como una fuente de desarrollo conceptual generalizado.

La investigación se concreta a través de la aplicación de un Diseño Didáctico basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), fundada a partir del año 1970 por el profesor e investigador Guy Brousseau, la cual sustenta el desarrollo de la propuesta didáctica y proporciona los elementos constitutivos con los que se realizó el análisis de los resultados obtenidos. En este sentido, se determinó que la implementación del Diseño Didáctico favoreció el proceso de aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas, así mismo la interpretación de los parámetros en la expresión algebraica que representa una familia de funciones cuadráticas.

En la Teoría de Situaciones Didácticas se define un elemento determinante denominado "***medio***" (Brousseau, 1986), para el Diseño Didáctico implementado se incorporó como tal el software educativo Geogebra, creado por Markus Hohenwarter en el 2002, que favoreció los procesos de visualización y proporcionó elementos que dinamizaron las actividades propuestas. De aquí, se reconoce la importancia que tiene el uso de las TIC (Tecnologías de Información y Comunicación) como un *medio* didáctico en el ambiente escolar que posibilita mejorar la motivación de los estudiantes frente a la actividad escolar.

El trabajo se ha organizado de tal forma que en el primer capítulo se expone el problema de investigación situado dentro del campo de la enseñanza y aprendizaje de las funciones, en particular del concepto de parámetro y de las familias de funciones cuadráticas, caracterizado como un área problemática de acuerdo con el campo de investigación de la didáctica del álgebra.

En el segundo capítulo, se exponen los fundamentos teóricos sobre los cuales se sustenta el desarrollo del trabajo. Por tanto, se definen como componentes fundamentales para el estudio La Teoría de las Situaciones Didácticas que se enmarca en la escuela francesa, con su fundador Guy Brousseau y el concepto de movilización según Perrenoud (1999).

El tercer capítulo expone la metodología contextualizada según la intervención en el aula, basada en la implementación del Diseño Didáctico y su evaluación, lo anterior con el fin de iidentificar y caracterizar los cambios que se producen en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado Noveno del Colegio Bennett en el año escolar 2013 – 2014, aplicada en el Tercer Periodo escolar, según el cronograma establecido en el colegio.

En el capítulo cuatro se analizan los resultados según la metodología de investigación cualitativa, en la modalidad Cuasi-experimental (Kerlinger, 2002). Además, se presentan las características de la población con la que se implementó el Diseño Didáctico y las fuentes de información que se tuvieron en cuenta, previo a la construcción del Diseño Didáctico.

En el último capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo, exaltando la importancia de la interacción de los estudiantes con el software Geogebra para la construcción de saberes. Además de contrastar los resultados de la implementación del diseño didáctico con los objetivos, y la hipótesis con la pregunta de investigación. Finalmente se encuentra la Bibliografía y Anexos del trabajo.

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Presentación y formulación del problema de investigación

El concepto de función es uno de los elementos de mayor trascendencia a lo largo de la educación. Esto se hace explícito tanto en el currículo escolar de la educación básica y media como en la formación superior que tienen relación con los cursos específicos de álgebra y de cálculo.

Particularmente en la educación básica, la enseñanza de las funciones muestra un panorama crítico, ya que el tratamiento de este concepto se ve reducido al tabulado de unos datos y su graficación en el plano cartesiano. Además, se estudia una sola forma de representación simbólica ($y = ax^2 + bx + c$) de la función, por lo tanto, el énfasis de la enseñanza de este concepto se encuentra limitada a la aplicación de una técnica, donde se omite el valor de la variación de los parámetros y la manipulación de herramientas tecnológicas.

Ahora bien, un aspecto más particular a considerar asociado a las características de las expresiones algebraicas que representan funciones cuadráticas, alude a aquellos problemas de generalización de las funciones relacionados con el concepto de parámetro, y de las familias de funciones y sus representaciones.

Desde el campo de la didáctica se ha establecido que para llevar a cabo un trabajo significativo con las funciones, basado en el tratamiento de los parámetros y su interrelación con otras representaciones, es necesario realizar procedimientos más complejos y establecer relaciones abstractas que subyacen al reconocimiento de cada forma de representación del objeto matemático, así como realizar transformaciones de una a otra representación. Sin embargo, lo que se observa en los contextos educativos es la limitación de la enseñanza de las familias de funciones cuadráticas sólo al proceso de tabulación de datos numéricos y la representación gráfica, de acuerdo con la expresión algebraica que la representa, siendo un procedimiento de escaso significado que no permite comprender la noción de parámetro y su efecto de variación en las familias de funciones cuadráticas.

De esta manera, en el año 2004, según intereses personales y con los referentes de la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad del Valle, se llevó a cabo el trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas y Física en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, que tuvo como título: **"Dificultades de estudiantes de educación media relativas a las familias de funciones cuadráticas a través de la interpretación de parámetros**". En este trabajo se planteó como objetivo principal de estudio la identificación y caracterización de las dificultades y factores que obstaculizan la comprensión de los parámetros y de las familias de funciones cuadráticas, por parte de los estudiantes de educación media de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, analizado mediante la confrontación de su conocimiento con la resolución de situaciones problemáticas que involucraban los conceptos mencionados.

La investigación se basó en la ejecución de una prueba escrita aplicada en dos partes a un curso de décimo y uno de undécimo de la Escuela Normal Superior Farallones, con edades entre 15 y 17 años. Este estudio permitió determinar que los estudiantes, fundamentalmente los de grado décimo, se apropiaron de aspectos importantes del contenido evaluado, en términos del reconocimiento de distintas formas de expresión simbólica de una función cuadrática de forma general y distinguir características propias de cada representación, relacionar la variación de al menos uno de los parámetros (a, b y c de la ecuación general) con otras formas de representación.

Los estudiantes de grado undécimo presentaron, en general, un mejor desempeño al resolver la prueba en comparación con los estudiantes de grado décimo. Esta afirmación se sustentó en que los estudiantes de grado décimo presentaron desempeños asociados a lo procedimental, es decir, a graficar punto a punto, encontrar valores particulares para tener idea de cómo se comporta la función cuadrática, etc. Mientras que los estudiantes de undécimo pueden visualizar propiedades de las gráficas desde la representación simbólica general en un nivel alto de abstracción. Además, no hubo estudiantes de décimo que pudiesen pasar de una representación gráfica de una función de segundo grado a una simbólica, por ejemplo.

En la investigación se estableció que los estudiantes de grado décimo, como los de undécimo, presentan dificultades asociadas con el paso de descripciones verbales (características gráficas) de una familia de funciones a su representación simbólica. Contrario a lo que ocurre con el paso de lo simbólico a lo gráfico, aún por procesos operacionales fundamentalmente. Lo que muestra la complejidad que tiene el paso del lenguaje natural especializado al lenguaje formal analítico.

Los resultados mencionados de este trabajo de pregrado, se convierten en insumos para el análisis a priori de la presente investigación y permiten profundizar acerca de una problemática determinada en el contexto escolar de la enseñanza de las matemáticas, además intervenir en el aula con elementos didácticos que favorezcan la enseñanza y aprendizaje del concepto de parámetro y de las familias de funciones cuadráticas.

Por otra parte, si bien es cierto que la investigación que había llevado a cabo hasta el año 2004 fue fundamentalmente tratada a lápiz y papel, posteriores seminarios en espacios como la Universidad del Valle, la Pontificia Universidad Javeriana de Cali y ahora en el contexto de la Maestría en Educación de la Universidad Icesi, brindaron elementos de reflexión para ampliar la concepción en cuanto a las herramientas tecnológicas que favorecen la enseñanza de las matemáticas. En consecuencia, se determina que en la actualidad se encuentran disponibles diversos medios tecnológicos para la enseñanza del álgebra, tales como hojas de cálculo, paquetes interactivos, software matemático, entre otros. Pues bien, al hacer intervenciones en el aula se percibe la capacidad motivadora que poseen dichas tecnologías, así como las posibilidades que ofrecen frente al contexto estático de la enseñanza tradicional, para brindar más posibilidades a los estudiantes sobre el acercamiento a conceptos del álgebra, de visualización, práctica y experiencias dinámicas.

En este sentido, hay que tener en cuenta que las TIC son instrumentos, y como tales, dependen del uso que les otorgue el docente. Por ello, se considera que el objetivo de usar este tipo de instrumentos es el de servir como herramientas que, junto a una adecuada mediación pedagógica y didáctica, ayudan a incrementar el nivel cognitivo del estudiante. En particular, existe un software que posee todo el potencial para lograr este fin, es el software educativo Geogebra, creado por Markus Hohenwarter en el 2002, el cual permite mediar aplicaciones que ayudan al estudiante a generar su propio conocimiento, interactuar con simulaciones y fortalecer los procesos de visualización, en particular, en el caso de la variación de parámetros y las familias de funciones cuadráticas.

Por ser libre y gratuito, Geogebra ha tenido un desarrollo muy particular. Existe actualmente un grupo de profesionales que le han agregado nuevas funciones y también se ha convertido en una comunidad de colaboradores que comparten al mundo sus materiales y conocimiento. Geogebra se consolida actualmente como una herramienta eficaz para lograr que los estudiantes desarrollen sus propias conjeturas y puedan probar sus suposiciones, por lo que llegan a descubrir conceptos matemáticos que en otros momentos sólo aprendían de manera mecánica y que resulta muy favorable para el abordaje del estudio de las familias de funciones cuadráticas y la visualización en los cambios de representación que ellas poseen.

Con base en lo anterior, y teniendo las dificultades observadas en torno al aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas surge la necesidad de realizar un diseño didáctico para movilizar los saberes relacionados, evaluando su alcance y previniendo las dificultades ya establecidas, incorporando el uso del software educativo Geogebra como un *medio* para facilitar la enseñanza de las familias de funciones cuadráticas y su relación con el componente algebraico variacional. Para lo cual se retomaron los elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Así, la pregunta de nuestra investigación fue la siguiente:

¿En qué medida la implementación de una situación didáctica que utiliza el software Geogebra, favorece cambios en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado noveno?

1.2 Justificación

En las discusiones que se llevaron a cabo durante el transcurso de la Maestría en Educación, fue posible identificar elementos de reflexión importantes que se tuvieron en cuenta para el planteamiento de la problemática en esta investigación. A su vez, este trabajo se convierte en un estudio que se aplicó en el aula, promoviendo prácticas didácticas innovadoras en relación con el aprendizaje de las matemáticas, particularmente de las familias de funciones cuadráticas. También, propició el uso del software educativo Geogebra, como medio de interacción que facilita los procesos de aprendizaje e interactuar con herramientas tecnológicas para favorecer la traducción de representaciones en diferentes sistemas de representación y caracterizar modelos matemáticos inherentes al currículo escolar actual.

Se prefirió la incorporación del software educativo Geogebra frente a otros programas informáticos, ya que éste tiene la ventaja de ser un software libre, y por tanto de descarga gratuita, tiene comandos especializados en la notación y construcción de objetos matemáticos, permite interactuar entre las ventanas algebraica, gráfica y tabular, así mismo visualizar las coordenadas de puntos y las expresiones algebraicas de las funciones que se grafican. Por todo ello, permite al docente afrontar con sus alumnos, el aprendizaje de temas que eran difíciles de visualizar con lápiz y papel y que con los recursos que posee se logran de inmediato, lo que genera entusiasmo y motiva a descubrir nuevos resultados y aplicaciones a los estudiantes. Además, su entorno de trabajo es de fácil manejo por parte del profesor y de los estudiantes, posibilitando la elaboración del diseño que se aplicó en esta investigación. Finalmente, el uso del software Geogebra con una intencionalidad didáctica, permite desarrollar habilidades de autonomía por parte de los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje.

En este sentido, reconociendo la importancia del uso de la tecnología en el desarrollo de actividades de enseñanza de las matemáticas desde un enfoque didáctico, Gómez (2004) plantea que la tecnología electrónica (calculadoras gráficas y ordenadores) puede llegar a ser un catalizador de los procesos de cambio en el aula de matemáticas. Sin embargo, los efectos de la utilización de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dependen de cómo el profesor diseñe y desarrolle el currículo, de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares vivan experiencias matemáticas que sean relevantes para su aprendizaje. El diseño y puesta en práctica de actividades que utilicen la tecnología debe ser un procedimiento sistemático que tenga en cuenta la complejidad de los aspectos conceptuales, procedimentales y cognitivos del tema que se pretenda tratar, que se base en las potencialidades de la tecnología dentro del contexto de los problemas que se quieran abordar y que utilice coherentemente la información que surge de estos análisis.

A través de sus investigaciones Gómez (2004) ha determinado que el uso de la tecnología requiere del análisis cognitivo del tema que se piense tratar en clase, que para realizarlo, es necesario desarrollar paralelamente un análisis de contenido de la estructura matemática en cuestión. La información que surge a partir de estos sirve de base para, por un lado, identificar y caracterizar el problema que se quiere abordar en el aula y, por el otro, para decidir cómo utilizar la tecnología. Para ello es necesario conocer sus características y potencialidades.

El diseño (o selección) de las actividades deberá surgir de relacionar la información obtenida de los análisis de contenido y cognitivo con el conocimiento de la tecnología dentro del contexto del problema que se quiere abordar. Cuando se establece esa relación, se pueden proponer y gestionar actividades que, además de ser relevantes desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes, utilicen eficaz y eficientemente la tecnología disponible. Aquí es importante resaltar los cuatro elementos de análisis que el autor propone para poner en acto situaciones didácticas en un contexto específico, como es el caso de esta investigación.

Referente al contexto educativo colombiano, en la propuesta de los Estándares de Educación Básicos para Matemáticas, se propone introducir el estudio de familias de funciones cuadráticas generadas a partir de la variación de los parámetros. Sin embargo, esta es una propuesta que apenas está siendo acogida en el currículo de matemáticas de las instituciones en la educación básica, así como en algunos textos escolares recientes, se presentan propuestas para el estudio de estos conceptos, por lo cual se busca con la implementación de una situación didáctica en el aula, que sea fundamentado un diseño bien estructurado, que contribuya a enriquecer lo sugerido en los Estándares de Educación Básicos de matemáticas con una visión más amplia y completa.

Con respecto a lo que se presenta en los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1996) es posible reconocer aspectos generales que deben ser tenidos en cuenta para mediar una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas integral y significativa, los cuales consisten en una educación matemática que propicie espacios de reflexión y análisis, donde el estudiante comunique sus ideas, se cuestione, interprete críticamente información y tome decisiones. Es decir, que amplíe y enriquezca su conocimiento continuamente, que no se limite a la memorización de conceptos y de procedimientos, sino que debe dar lugar a procesos de pensamiento y razonamiento de manera significativa, los cuales pueden ser útiles y aplicables tanto en contextos matemáticos y cotidianos.

De acuerdo con esta visión, se señalan los “conocimientos básicos” para el área de matemáticas, los cuales consisten en el desarrollo de cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Fundamentalmente en este último pensamiento, que además está relacionado con los sistemas algebraicos y analíticos, es posible establecer elementos que permiten reconocer el contenido matemático que hay en juego (funciones cuadráticas) como un objeto de estudio que circula en la escuela.

Uno de estos elementos se puede evidenciar al poner de manifiesto la importancia que tiene para el desarrollo del pensamiento variacional, darle sentido a la variación, la cual puede ser encontrada en contextos de dependencia de variables o en contextos donde una misma cantidad cambia. Además, se señala que uno de los núcleos conceptuales matemáticos en los que se involucra la variación es “la función como dependencia y modelos de función”.

También, se menciona la introducción de las gráficas cartesianas en los programas de matemáticas en la educación básica, lo cual puede ser una fuente de estudio dinámico de la variación y que involucra el aprendizaje de la noción de función como dependencia.

De esta manera, se considera a la función como una herramienta de conocimiento que resulta necesaria para interrelacionar patrones de variación entre variables y para realizar predicciones y controlar el cambio. Así, se involucra específicamente la función cuadrática dentro del contexto escolar y es considerada como uno de los modelos más simples de función, como también la función lineal, afín, exponencial, entre otras, las cuales encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad.

Se manifiesta también, la necesidad de realizar un estudio posterior a la conceptualización de la función y de los objetos asociados como dominio y rango, que consiste en el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, *cuadrático*, exponencial, priorizando en estos el estudio de los patrones que los caracterizan como el crecimiento, decrecimiento y desplazamientos.

De esta forma, es posible hacer una asociación de este contenido matemático y lo abordado mediante el desarrollo del pensamiento variacional, donde resulta importante considerar dicho componente como una manera de pensar dinámica. Sin embargo, no se debe dejar de lado la necesidad de poner en juego tipos de pensamiento como el numérico, el métrico o espacial, si es el caso, ya que en cierta forma estos se requieren para lograr un mejor desarrollo del variacional.

Teniendo en cuenta lo anterior es posible establecer la importancia que se da en las propuestas que regulan la educación en el contexto colombiano a un aprendizaje significativo de las matemáticas, y en particular a lo que tiene que ver con el concepto de función. Sin embargo, es de resaltar el hecho de que en estas dos propuestas no se indica explícitamente el estudio de los parámetros en la función, y por ende, tampoco cómo ellos influyen en el comportamiento de la función, ni cómo estos son generadores de familias de funciones. Para este trabajo resulta ser una fuente importante para el desarrollo del pensamiento variacional y el estudio de la variación, teniendo como objeto central las funciones, en este caso cuadráticas.

Entendiendo que los Estándares de Educación Básica y Media se definen como criterios claros y públicos que permiten conocer qué es lo que deben aprender los estudiantes, como el punto de referencia de lo que un estudiante puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel.

En este sentido, en los estándares del área de matemáticas se destacan los siguientes criterios:

De sexto a séptimo:

- Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

De Octavo a Noveno:

- Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.
- *Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.*
- Analizar el cambio en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales[1].

Se considera mediante esta última propuesta, que es necesario un manejo amplio y significativo de la noción de función, que debe ser construido a lo largo de los últimos grados de la educación básica y durante el transcurso de la educación media. Lo cual corrobora la importancia del aprendizaje integral de este concepto por los estudiantes y de la introducción de esta temática en el programa de matemáticas.

Ahora, de acuerdo con los criterios destacados, se observa de manera explícita la referencia que se hace acerca de establecer las relaciones entre la representación

---

[1] MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas.

gráfica y la ecuación, así como el ítem que indica la necesidad de interpretar la relación entre los parámetros de la función con la familia de estas, que a pesar de que se generaliza para cualquier función, sólo en esta propuesta se pone de manifiesto el estudio del concepto en cuestión, especialmente para los grados octavo a noveno. Por tanto, se infiere la importancia que representa el abordaje de este concepto por parte de los estudiantes y promover prácticas pedagógicas que permitan mejorar el aprendizaje de los estudiantes, en particular con respecto al estudio de los parámetros y las familias de funciones cuadráticas.

Vale la pena considerar que el estudio de las familias de funciones construidas a partir de la variación de los parámetros, es una temática muy potente, con la cual es posible mediar un aprendizaje del concepto de función más significativo, como otra forma de llevar a cabo el estudio matemático de la variación y usar la función como una herramienta imprescindible que permite desarrollar el pensamiento variacional, tal como se define en los Lineamientos Curriculares de matemáticas del MEN (1996), y por tanto mediar el desarrollo de una manera de pensar dinámica.

Al ubicarse en el contexto de las matemáticas escolares, se puede determinar que la noción de función es un concepto, que como tal tiene una complejidad inherente a su naturaleza, al igual que el concepto de parámetro y de familia de funciones, hecho del que todo educador debe estar plenamente consciente. Además, llevarlo al aula requiere de un conocimiento estrictamente matemático, así mismo de un trabajo amplio de diseño curricular, dado que el nivel de abstracción exigido por el estudio de los parámetros implica un gran esfuerzo de generalización, el cual se ve reivindicado por una construcción del concepto de función como un objeto potente en el ámbito de las matemáticas. La noción de función es un tema que se constituye como un principio fundamental para estudiar posteriormente conceptos más complejos, referentes al cálculo, como por ejemplo, la continuidad de una función, el concepto de límite o el estudio de las derivadas, los cuales deben ser abordados desde la educación media hasta los estudios universitarios.

Considerando este hecho, con esta investigación se propende contribuir en la construcción de un concepto de función que sea comprendido y aprendido por los estudiantes de manera significativa, lo que les permitirá luego acceder en gran medida, de una forma más asequible y analítica, a aquellos conceptos que se fundamentan en una base consolidada por la noción de función y que requieren del manejo, la interpretación y la aplicación de esta. Así mismo, es fundamental su generalización, pues los futuros universitarios deberán entender también operaciones con conjuntos de funciones, sus propiedades generales y su comportamiento. De esta manera, se busca ampliar el aprendizaje de conocimientos posteriores al concepto de función, que requiere una actividad cada vez más compleja y de su dominio para obtener un mejor desempeño y una mejor comprensión.

1.3 Antecedentes

En torno a las investigaciones desarrolladas en el campo de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, particularmente de la noción de función, que están enmarcados en el campo específico de la Didáctica de las matemáticas, de acuerdo con los desarrollos de la escuela francesa y que comparten elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, se consideran las investigaciones de Azcárate y Deulofeu (1990), Zaslavsky (1997) y Bedoya (2002).

Azcárate y Deulofeu (1990) llevan a cabo un trabajo de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones centrado en el estudio de la representación gráfica cartesiana. Este trabajo se desarrolla desde las perspectivas: matemática e histórica-epistemológica. De una parte, realizan un estudio sobre el concepto de función a partir de diversas definiciones, por ejemplo la función inversa, compuesta, biyectiva, entre otras, e involucran características relacionadas con dicho concepto, como el dominio o rango. De otra parte, aportan elementos conceptuales importantes referentes al estudio histórico de la noción de función, donde sobresale este concepto desde la perspectiva de dependencia que subyace a los fenómenos de variación y desde su desarrollo formal, es decir, la función establecida como correspondencia.

También, se determinan aspectos didácticos relacionados con el lenguaje de los gráficos cartesianos, ya que a pesar de reconocer la importancia que tiene cada forma de representación, enfatizan especialmente en el estudio de las gráficas y en su gran alcance. Esto se constituye en un instrumento necesario para la interpretación de la realidad, dada la importancia de las gráficas en el mundo actual y que permiten presentar de una forma visual e intuitiva una idea global del concepto de función.

Lo que significa que estos autores dan gran importancia al papel que juegan las representaciones en la comprensión de las matemáticas, pues afirman que la adquisición de un concepto, depende en gran parte de la capacidad de reconocer e interpretar una representación del mismo, y posteriormente tener la capacidad para traducir de una a otra representación.

En particular, señalan la gran importancia que tiene favorecer el estudio de la representación gráfica de las funciones, el cual no es un trabajo trivializado, por el contrario, se indica que es una actividad compleja, que requiere no sólo de la lectura de gráficos, sino de la capacidad para describir la función de forma global, atendiendo a los aspectos generales de las gráficas, es decir, a las variaciones que presenta. Esto es, en lugar de características puntuales como hallar el valor de una variable a partir de otra, determinar puntos que pertenecen a la gráfica o el vértice de una parábola, se requiere tener una visión global de la variación de la gráfica, por ejemplo, considerar intervalos en los que se mantienen o se modifica una determinada manera de variar la función y tener la capacidad de dar cuenta de ello.

Uno de los trabajos de investigación sobre la función cuadrática, basados en un marco tradicional de la Didáctica de la Matemática, es el trabajo realizado por Zaslavsky (1997) cuyo propósito era identificar los principales "obstáculos conceptuales" y dificultades que pueden impedir a los estudiantes el aprendizaje de las funciones cuadráticas. Este investigador analizó los procesos de solución por parte de alumnos de Secundaria (de 10º y 11º grado) de institutos en Israel, de una variedad de problemas sobre dichas funciones. Identificó cinco tipos distintos de obstáculos conceptuales y otros tipos de dificultades de los estudiantes. Los obstáculos identificados los definió de la siguiente manera:

- **a.** Obstáculo de interpretación de la información gráfica.
- **b.** Obstáculo de la relación entre una función cuadrática y una ecuación cuadrática.
- **c.** Obstáculo de la analogía entre una función cuadrática y una función lineal.
- **d.** Obstáculo del cambio aparente de la forma de una función cuadrática cuyo parámetro es cero.
- **e.** Obstáculo del sobre-énfasis en una de las coordenadas de los puntos especiales (Zaslavsky, 1997).

Todos los problemas utilizados por Zaslavsky fueron "problemas no estándares" sobre funciones cuadráticas. Los problemas fueron no rutinarios sobre diferentes tópicos del sistema o estructura conceptual y procedimental de estas funciones. Los problemas se debían resolver sin utilizar tecnologías de graficación, más concretamente, el objetivo era utilizar las categorías de análisis determinadas por Leinhardt (1990) en su importante revisión sobre investigaciones relacionadas con las funciones. También, retoma de Janvier (1978, 1987), los tipos de problemas que versaron sobre "**traslación**" o traducción (*translation task*) entre distintos tipos de representación (gráfica, numérica y algebraica), de “**interpretación**” y de “**construcción**”.

Por su parte, Bedoya (2002) se propone el diseño, planificación, implementación y evaluación de un programa de formación curricular orientado hacia la reflexión conjunta por parte de todos los participantes sobre las maneras de concebir, tanto el conocimiento matemático sobre las funciones como el sistema o estructura conceptual y las metodologías de enseñanza. En la práctica, el programa se referirá al desarrollo de conocimientos didácticos bases para la formación de docentes que deberá estar orientada hacia el diseño de actividades y unidades didácticas sobre los elementos fundamentales que organizan la estructura matemática del concepto escolar de función en general, y de función, trinomio y ecuación cuadrática, en particular. Estos conocimientos didácticos estarán referidos también a la pluralidad de los sistemas de representación usuales en Matemáticas y a los recursos y utilidades curriculares de las nuevas tecnologías informáticas con opciones de representación múltiple y sistema de cálculo simbólico incorporado, como las modernas calculadoras graficadoras (modelos TI-83 y T I-92) con las cuales se propuso trabajar. En este estudio se conciben estas tecnologías como herramientas mediadoras y catalizadores de los conocimientos matemáticos a través de sus distintos tipos de representación y sus posibilidades de visualización dinámica e interactiva.

De esta manera, el autor logra caracterizar y valorar los dominios relativos a conocimientos, procedimientos y estrategias, así como determinadas actitudes que los profesores en formación tienen y desarrollan sobre:

- Las representaciones gráficas, numéricas, algebraicas y analíticas (simbólicas) y verbales de las funciones, así como las articulaciones, conversiones e interrelaciones que se dan entre ellas, aplicadas a la enseñanza y evaluación de las funciones en general y del trinomio, la ecuación y la función de segundo grado, en particular.

- La integración de los dominios o estructuras conceptuales de la noción de función mediante los sistemas de representación y las calculadoras graficadoras, concebidos como concreciones de la propuesta de los organizadores del currículo en el diseño y desarrollo de unidades didácticas y delimitación de tareas para su enseñanza y evaluación (Bedoya, 2002).

En su estudio plantea que los futuros profesores de matemáticas pueden llegar a construir sus conocimientos relativos a las tareas de planificación curricular, reflexionando sobre la multiplicidad de significados que tienen los conceptos matemáticos cuando se les considera como objetos de enseñanza y aprendizaje. Una de las conclusiones a las que llega el autor es considerar un modelo local con, por lo menos, los cuatro elementos organizadores siguientes: la estructura conceptual del tópico matemático en cuestión, los sistemas de representación, la modelización y los recursos, materiales y herramientas tecnológicas de representación múltiple con sistemas de cálculo simbólico integrado. La inclusión de la modelización como cuarto elemento organizador se debe a que la estrategia didáctica integradora de la resolución de problemas vincula de manera natural estos cuatro elementos organizadores del currículo.

1.4 Objetivos de la Investigación

De acuerdo con el problema definido, se establecen los siguientes objetivos para la investigación:

1.4.1 Objetivo General

Identificar y caracterizar los cambios que se producen en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado noveno, implementado situaciones didácticas de enseñanza con el software Geogebra, para favorecer la movilización de este concepto.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Realizar un diseño didáctico con base en la Teoría de Situaciones Didácticas para el estudio de las familias de funciones cuadráticas, incorporando el uso del Software Geogebra.
- Observar y caracterizar los procedimientos y desarrollos de la implementación en el aula del diseño didáctico basado en la Teoría de Situaciones Didácticas.
- Evaluar los cambios producidos en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas, a través de la institucionalización del objeto matemático, de las interacciones y el comportamiento observable de los estudiantes.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Orígenes de la Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas propone un enfoque basado en una construcción de saberes que permite comprender las interacciones sociales entre estudiantes, docente y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los estudiantes aprenden y cómo lo aprenden. En este sentido se asume que el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al interactuar con el *medio* creado por una situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso.

Es en el año 1970, en la Universidad de Bordeaux, cuando Brousseau aprovechó las condiciones institucionales para plantear su proyecto científico de construir modelos de las situaciones utilizadas en la enseñanza, formuló diversos análisis y de manera crítica propuso otras más apropiadas. En dicho contexto, este investigador empezó a tener en cuenta aspectos relacionados con la enseñanza, como el análisis de los dispositivos en sí mismos y explicitar la relación entre estos y la noción matemática que se iba a adquirir. Además, cuáles eran las condiciones que propiciaban que un sujeto tuviera la necesidad de construir un saber matemático para tomar ciertas decisiones.

Se transforma la intencionalidad de la enseñanza, que en lo tradicional está más orientado a la ejercitación, en esta teoría con un enfoque más amplio, existe la intención de lograr la modelización de esas situaciones que se dan en la construcción de saberes, resultado de la negociación de un contrato[2] que permite explicar en gran parte fenómenos asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje, así como prever otros.

2.2 La Modelización de las Situaciones Didácticas

Un concepto inicial de situaciones expuesto por Brousseau (2007)[3] es que una *Situación* es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso. Desde esta perspectiva, se determina que:

> Las *situaciones* son modelos mínimos que "explican" cómo ese conocimiento interviene en los informes especiales que un tema establece con un *medio* para ejercer una influencia determinada. (Brousseau, G. 2000b, p. 4)

El *medio* se considera como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto. En este caso, son fundamentales las circunstancias en las que se llevan a cabo la adquisición de los conocimientos, con todos los elementos a tener en cuenta desde que se plantea la situación (análisis previo) hasta que el estudiante entra en juego, ya sea que alcance el aprendizaje o se rehúse al problema por la dificultad que tiene. En el desarrollo de una situación resulta fundamental el papel que

[2] Según Brousseau (1993), en la construcción de saberes se establece una relación -explícitamente en parte- de manera implícita, en la que cada protagonista del proceso enseñanza y aprendizaje, el enseñante y el enseñado tienen la responsabilidad de administrar y de lo que será responsable delante del otro de una u otra manera. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de este contrato que es específica del "contenido", es decir, del conocimiento matemático en cuestión.

[3] Las situaciones didácticas y a-didácticas son elementos constitutivos de las TSD, que se ha venido desarrollando desde la década de los 70. Lo se expone aquí se basa en lo que describe el investigador Brousseau en su libro *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas* de 2007.

desempeñan las relaciones entre el funcionamiento de los conocimientos del alumno y las características de las situaciones.

Vale la pena identificar otra acepción de las situaciones utilizadas en la Teoría de Situaciones Didácticas, como es el de *situaciones matemáticas*, que se caracterizan por ser aquellas que provocan una actividad matemática en el alumno sin intervención del profesor. Algunas situaciones requieren no sólo de la aplicación de conocimientos, sino que estimulan y permiten que estos se construyan aún si no han sido adquiridos. Estas son *situaciones de aprendizaje*: "Algunas de estas situaciones de aprendizaje se presentan de manera espontánea y no requieren de la intervención de un tercero dotado de una intención de enseñar el conocimiento en cuestión para producir sus efectos." (Brousseau, 2000 b)

Mientras que el término *situaciones didácticas* se utiliza para los modelos que describen la actividad del profesor y también la del estudiante. En relación con dicha concepción, se especifica:

> La situación o el problema elegido por el profesor es una parte esencial de la siguiente situación más amplia: el maestro busca devolver al alumno una situación a-didáctica que provoque en él una interacción lo más independiente y lo más fecunda posible. Para ello, comunica o se abstiene de comunicar, según el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. En consecuencia, el profesor está implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le ha planteado. Este juego o esta situación más vasta es la **situación didáctica**. (Brousseau, 1993, p. 14)

Con el objeto de consolidar la modelización en la Teoría de las Situaciones Didácticas, se tiene en cuenta la concepción de enseñanza que subyace, la cual va por tanto a pedir al maestro que provoque en el estudiante las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los “problemas” que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. Entre el momento en que el estudiante acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer.

El estudiante sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe adquirir verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada a-didáctica: “En el sentido de que desaparece de ella la intención de enseñar (es siempre *específica* del saber)”[4].

2.3 Clasificación de las Situaciones Didácticas

A continuación se presenta una aproximación a la clasificación de las situaciones didácticas, que a su vez es determinante para definir el modelo general de una situación. (Brousseau 2007)

2.3.1 Situación de Acción

En esta situación una estrategia se adopta rechazando intuitivamente o racionalmente una estrategia anterior. Una estrategia nueva se somete a la experiencia y puede ser rechazada o aceptada según la apreciación que tenga el estudiante sobre su eficacia. La sucesión de situaciones de acción constituye el

[4] Brousseau, 1993, p. 14.

proceso por el cual él va a "aprenderse" un método de resolución de problema. En esta situación permanece un *modelo implícito* antes de poder formularlo, que corresponde al conjunto de relaciones o reglas según las cuales el estudiante toma sus decisiones sin tener conciencia de ellas y a posteriori de formularlas.

Esquema general de una situación de acción: el tipo de "acción" consiste para el estudiante en establecer su estado con el medio, para determinar o limitar las acciones con los demás participantes (ya sea con materiales o con reglas impuestas) (ver Figura 1). "Actuar" consiste en elegir directamente los estados del medio antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el alumno puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias reacciones futuras. Los conocimientos permiten producir y cambiar estas "anticipaciones". El aprendizaje es el proceso por el cual se modifican los conocimientos. Se pueden representar estos conocimientos por medio de tácticas o procedimientos que parece seguir el sujeto o por las declaraciones de lo que parece tener en cuenta, pero sólo se trata de proyecciones. La manifestación observable es un patrón de respuesta explicado por un modelo implícito de acción.

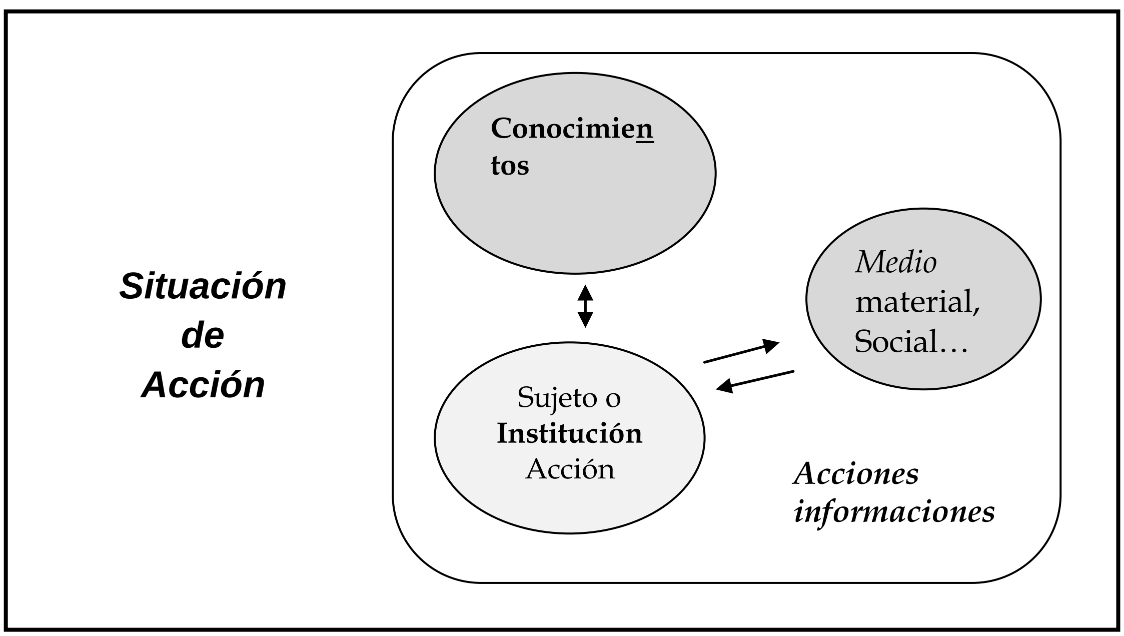


Figura 1. Esquema Situación de Acción. (Brousseau, 2000a, p.12))

2.3.2 Situación de Formulación

El estudiante no sólo debe conocer la estrategia que le permite solucionar el problema, sino poder comunicar a otros la estrategia que propone, ya que esta es una posibilidad que tiene de mostrar la acción en la situación. Dicha comunicación está sometida a dos tipos de retroacciones: una inmediata, por parte de los demás, que pueden comprenderlo o no, compartirlo o no, y una mediata por parte del *medio*, cuando al ser aplicada la estrategia de manera concreta, resulta acertada o no.

La simple formulación no tiene ninguna influencia sobre los conocimientos y las convicciones de los estudiantes, pero permite la aparición de las estrategias en acto. En esta situación se va a cambiar el conocimiento de otros estudiantes por medio de mensajes que llevan información y está sometida a retroacciones (ver Figura 2).

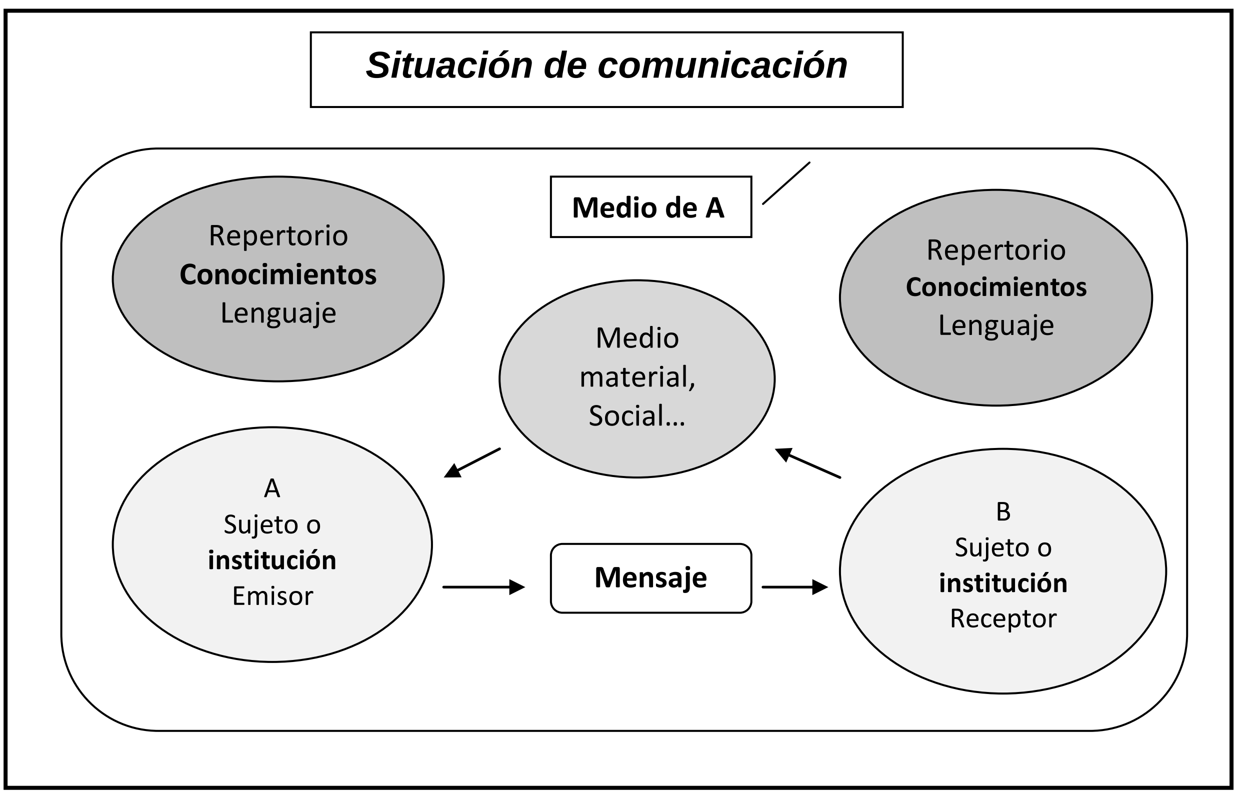


Figura 2. Esquema Situación de Comunicación. (Brousseau, 2000a, p. 13)

Esquema general de una situación de formulación: la formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto a quien él primero deberá comunicar una información. La formulación pone en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario). La adquisición de tales repertorios acompañan a la de los conocimientos que enuncian, pero ambos procesos son distintos.

2.3.3 Situación de Prueba o de Validación Social

En este nuevo tipo de situación, los estudiantes organizan enunciados en demostraciones, construyen teorías –en cuanto conjuntos de enunciados de referencia- y aprenden cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer sin ceder ni a argumentos retóricos ni a la autoridad, la seducción, el amor propio, la intimidación, etc. Las razones que un estudiante pueda dar para convencer a otro o las que pueda aceptar para cambiar de punto de vista, serán clarificadas progresivamente, construidas, puestas a prueba, debatidas y convenidas. El estudiante no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener una opinión o presentar una demostración. Esta situación favorece la justificación y la validación de los actos culturales o declaraciones (ver Figura 3).

Cada una de las interacciones que se presentan permite modelar diferentes tipos de condiciones y movilizar aprendizajes de diferentes maneras. Por ejemplo, se puede demostrar que "presentar la prueba" es parte de una situación muy diferente de una simple comunicación de la información, la estructura de la misma, es decir la posición de los estudiantes en relación con un medio es muy diferente, ya sea con un juego, las normas o la orientación en cada situación.

Esquema general de una situación de prueba: los dos esquemas anteriores conllevan a procesos de corrección, ya sea de manera empírica o apoyada en aspectos culturales para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los saberes movilizados. Tanto oponente como proponente se ocupan juntos de las relaciones formuladas entre un medio y un conocimiento relativo a ese medio. Cada uno puede tomar posición con respecto a un enunciado y, si hay desacuerdo, pedir una demostración o exigir que el otro aplique sus declaraciones en la acción con el medio

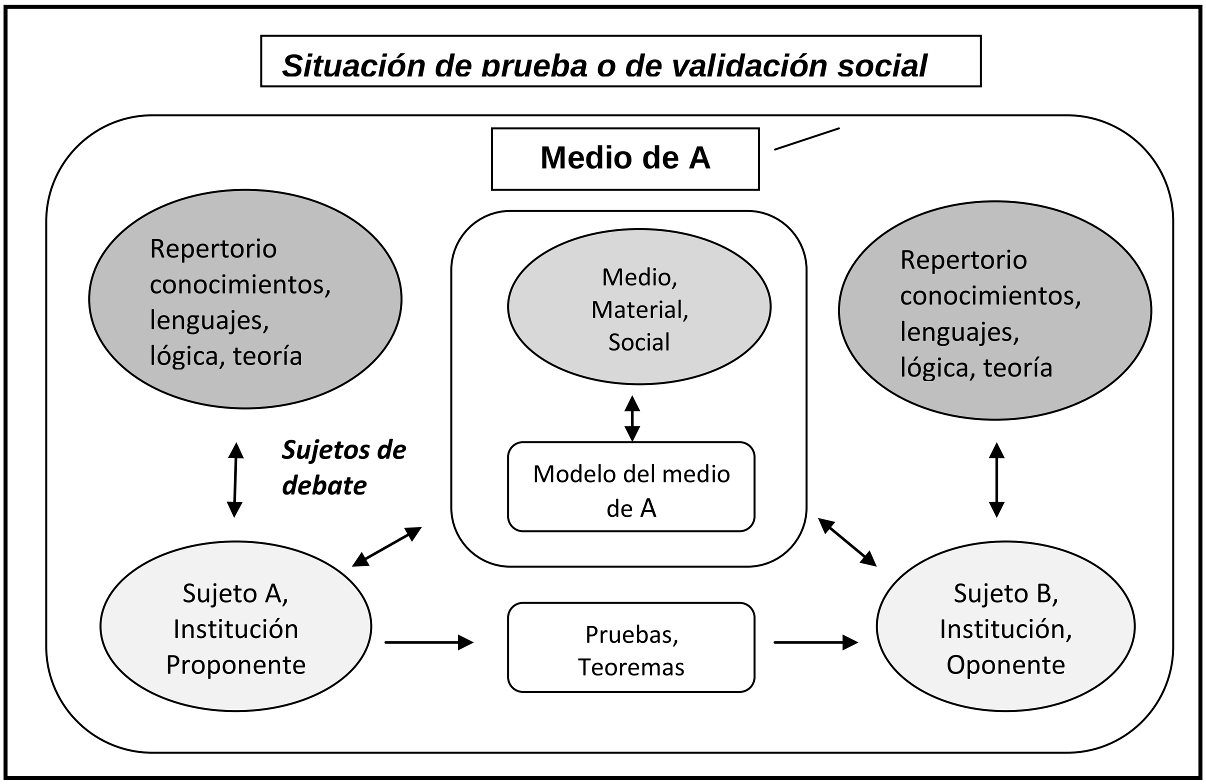


Figura 3. Esquema de situación de prueba o de validación social. (Brousseau, 2000a, p. 14)

Brousseau (2000a) expone que en la enseñanza esta clasificación ha promovido el establecimiento y la observación del paso de situaciones de formulación a las de prueba. Sin ella la iniciación a estas prácticas no es fácil de implementar. Además, estas situaciones no son solamente un paso importante en los procesos de las matemáticas, sino que son parte de un proyecto educativo esencial, la de formar al estudiante como un ser racional y social, autónomo y responsable, capaz de entender cómo preparar y compartir una verdad en sociedad, generar debates democráticos y constructivos.

2.3.4 La Institucionalización

Con base en las experiencias desarrolladas en la escuela Jules Michelet, el profesor Brousseau (2007) pudo constatar que además de considerar las tres situaciones: de acción, de formulación y de validación, los docentes necesitaban ordenar un espacio y querían detenerse a revaluar lo que habían hecho. Al preguntarse por qué se daba esa resistencia, el investigador comprobó la necesidad que tenían los docentes de dar cuenta de lo que habían hecho los estudiantes, de describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto a resultados de los estudiantes y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones e indicar cuáles podían ser reutilizadas en otro contexto.

Asegurar la consistencia del conjunto de las modelizaciones eliminando las que son contradictorias exige un trabajo teórico, lo que condujo a la necesidad de tener en cuenta una fase de Institucionalización para dar a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes. En aras de aclarar la manera cómo se abordan los conocimientos en la Teoría de Situaciones Didácticas, vale la pena tener en cuenta que:

> Los conocimientos son los medios trasmisibles (por imitación, iniciación, comunicación, etc.), aunque no necesariamente explicitables, de controlar una situación y obtener de ella determinado resultado conforme a una expectativa o a una exigencia social. El saber es el producto cultural de una institución que

> tiene por objeto identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación. (Brousseau G. y Centeno, J. 1991. P. 176)

En esta fase de la Teoría de las Situaciones Didácticas resulta fundamental la actividad que desarrollan los docentes, ya que en el contexto escolar existen saberes «oficiales»[5] que se les pueden exigir a los estudiantes, y que sólo son utilizables por ellos si pueden establecer una relación directa con tales saberes y si los ponen en funcionamiento con saberes de otra naturaleza (personales, contextualizados, temporalizados...).

De esta manera, no todos los saberes que el estudiante ha entrelazado, personalmente o gracias a la historia de la clase, son institucionalizados por la actividad del docente, pero sin duda, algunos de ellos son institucionalizados en el contexto, y esto con toda razón, por la relación establecida con el *medio*.

2.4 Movilización de Saberes

Un referente teórico a tener en cuenta para el desarrollo de la investigación es el de “movilización” que está asociado en el marco de investigación de la escuela francesa. Para ello se tiene en cuenta el referente de Perrenoud (1999), quien presenta un fuerte sesgo de dicho concepto al desarrollo de las competencias. Este autor presenta la importancia de modernizar los planes de formación, de potenciarlos, de tener en cuenta, además de los saberes, el valor que tiene la capacidad de transferirlos y movilizarlos.

Así, el autor se refiere a *Saberes movilizables* en términos de:

> Fuera de la escuela, la mayor parte de los saberes son utilizados en prácticas sociales complejas que extraen sus recursos de más de un

[5] O también llamados <<institucionalizados>> por el fundador de la teoría Guy Brousseau.

> campo disciplinar. Podemos, por lo tanto, trabajar la transferencia o la movilización como un cruce de numerosos saberes dentro de proyectos multidisciplinares. Pero también se puede interesar uno en las prácticas propiamente disciplinares que son la investigación, la enseñanza y el debate científico. Esos dos modos de reparación a la movilización no chocan ni se encuentran con los mismos obstáculos (Perrenoud, P. 2008).

Plantea que en la enseñanza tradicional, apenas existe preocupación por las competencias, incluso cuando se piensa en abordarlas, se pretende con mayor frecuencia el desarrollo de las capacidades intelectuales básicas sin referencia a las situaciones y a las prácticas sociales, sobre todo, se dispensan altas dosis de conocimiento. El enfoque por competencias afirma que esto no es suficiente, que "*sin darle la espalda a los saberes"* (Perrenoud, 1999c), sin negar que "*hay otras razones para saber y para saber hacer"* (Perrenoud, 1999b)[6], es importante relacionar los saberes con las situaciones en las que se propician que actúen, más allá de la escuela, más allá de las instituciones educativas.

Actuar y obrar, aquí supone afrontar las situaciones complejas y, por lo tanto, pensar, analizar, interpretar, anticipar, decidir, regular y negociar. Tal acción no se satisface con habilidades motrices, perceptivas o verbales. Exige saberes, pero estos no son pertinentes más que cuando están disponibles y movilizables con pleno conocimiento y en el momento oportuno.

Perrenoud (2008) utiliza otro elemento constitutivo denominado la "transferencia de conocimientos", para señalar que esta no funciona muy bien en la escuela, por ejemplo, tal estudiante que domina una teoría en el examen, se revela incapaz de utilizarla en la práctica, porque jamás ha sido conducido a hacerlo. La

[6] Citado por el mismo autor Perrenoud en el año 2009.

transferencia de conocimientos no es automática, se adquiere por el ejercicio y una práctica reflexiva, en situaciones que propician la ocasión de movilizar los saberes, de extrapolarlos, de cruzarlos, de combinarlos, de construir una estrategia original a partir de recursos que no la contienen y que no la dictan.

De acuerdo con lo que este autor plantea la movilización conlleva a situaciones complejas que obligan a plantear el problema antes de resolverlo, a señalar los conocimientos pertinentes, a reorganizarse en función de la situación, a extrapolar o colmar los vacios. Por su parte, los ejercicios escolares clásicos permiten la consolidación de la noción de algoritmos en cálculo. Ellos no trabajan en la transferencia de conocimientos.

> Para caminar en este sentido, hará falta colocarse en situaciones complejas: obligaciones, hipotecas, pequeños créditos, arrendamiento financiero. No es suficiente poner estas palabras en los datos de un problema de matemáticas para que estas nociones sean comprendidas, aún menos para que la movilización de los conocimientos sea ejercida. Por ejemplo, existe una gran diferencia entre conocer las leyes de la física y construir una balsa o poner correctamente un interruptor (Perrenoud, 2008).

También, Mendez (2007) aborda la conceptualización de la “movilización” para lo cual contextualiza un panorama de reflexión en la educación:

> No basta con emplear largos años en asimilar saberes escolares y académicos para ser, *ipso facto,* capaz de hacer de ellos algo útil fuera de la escuela. Los docentes lo saben o lo presienten: evaluar la movilización de los saberes en ámbitos diferentes del contexto de aprendizaje, supone prepararse para bellos y rotundos fracasos.

Lo anterior hace referencia al fracaso de todos aquellos que no dominan, fundamentalmente, los saberes pero que llegan a mostrar “ilusión” por el trabajo, la memorización, el estudio rápido y atropellado, el conformismo, la imitación y la astucia, incluso las trampas. Como resultado se pone en marcha un círculo vicioso, no se evalúa *el transfer o la transmisión* para no perder la ilusión totalmente durante la escolaridad de modo que, tras los estudios se mantenga la sorpresa ante las tareas más complejas.

Esta autora retoma además a De Ketele (2005), quien establece que la movilización implica la identificación, combinación e integración de recursos pertinentes (saber-hacer de aplicación, saber-hacer de resolución) a fin de resolver las tareas complejas que exige la competencia. De esta forma, Ketele presenta la competencia como un concepto integrador de contenidos, actividades y situaciones en las cuales se ejercen esas actividades. Esta precisión subraya un componente fundamental de la competencia, es decir la *movilización de recursos* para *resolver las tareas complejas* que exige *la situación-problema*.

Para el propósito que se tiene en la investigación resultó fundamental contextualizar el concepto de movilización de saberes, enmarcado en los desarrollos establecidos por los autores mencionados.

3. MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo presenta y justifica el diseño didáctico en la propuesta metodológica que se implementó con el fin de dar cuenta sobre los cambios producidos en la movilización del concepto de familias de funciones cuadráticas con estudiantes de grado noveno, y determinar en qué medida la implementación de situaciones didácticas utilizando el software Geogebra, favorece el aprendizaje de este conocimiento.

El diseño didáctico se inscribe en el campo de la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau, la cual propone un desarrollo basado en situaciones de acción, comunicación, validación e institucionalización/Evaluación. Estos procesos hacen observable las potencialidades, movilización y restricciones en el aprendizaje del concepto de familias de funciones cuadráticas.

3.1 Contexto y participantes

La investigación se inscribe en la modalidad de un estudio cuasi-experimental, según lo que determina Kerlinger (2002), a este modelo se le llama *cuasi* porque dicho termino significa “casi” o “tipo de”, en relación con un experimento verdadero. Para llevar a cabo el estudio se tuvo en cuenta la participación de dos grupos del grado noveno del colegio Bennett, uno que recibió un tratamiento experimental donde se realizó el estudio de familias de funciones cuadráticas mediante las situaciones didácticas con el apoyo del software Geogebra, y otro grupo que realizó el estudio de forma diferente (enseñanza tradicional). Además, participó un tercer grupo que también pertenece al grado noveno y con el cual se aplicó la prueba piloto para establecer la pertinencia y nivel de claridad del diseño didáctico.

Con respecto a la escogencia de los grupos, se hizo según lo acordado con la profesora[7] que enseñanza el área de matemáticas en el grado noveno, implementar la prueba piloto con el grupo 9C, debido a que este tenía, en ese momento, un conocimiento más amplio sobre el estudio de las funciones cuadráticas, en relación con los otros dos grupos.

El grupo 9B fue seleccionado como grupo control, donde se llevó a cabo el estudio de las familias de funciones cuadráticas, mediante enseñanza tradicional, el factor de decisión aplicado consistió en que este grupo se encontraba apenas en la construcción del concepto de función cuadrática, lo cual favorecía el proceso de observación previo para el estudio de la enseñanza sin incorporar tecnología.

El grupo 9A se escogió para realizar la aplicación del diseño didáctico, debido a que en el momento de la intervención se encontraban en la transición del concepto de función cuadrática a las familias de estas funciones.

En relación con el contexto escolar, el Colegio Bennett está ubicado en la ciudad de Santiago de Cali en el Departamento del valle del Cauca. Desde 1972 el Colegio Bennett ha estado funcionando en su emplazamiento en el barrio Ciudad Jardín con 26.000 metros cuadrados y donde los estudiantes disponen de unas instalaciones campestres con buenas condiciones, espacios abiertos y acceso a aulas dotadas con recursos tecnológicos.

Los estudiantes del Colegio Bennett se forman en habilidades y competencias en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, competencias comunicativas tanto en inglés como en español. Se profundiza en permanecer en un alto nivel de

[7] La profesora del grado noveno es Licenciada en Matemáticas, quien tuvo mucha disposición para efectuar el estudio y ser oportuna con sus apreciaciones. En sus clases ha implementado el uso del software Geogebra, en particular los estudiantes de los tres grupos de noveno han utilizado alguna vez dicho software, conociendo los elementos básicos de ejecución del software.

bilingüismo que les permita desempeñarse competentemente en el ambiente académico e intelectual respondiendo a los estándares establecidos en las áreas de producción escrita, comprensión, análisis y expresión oral. La propuesta pedagógica tiene como propósito el desarrollo del pensamiento, también contempla la formación del carácter de sus estudiantes a través del desarrollo de valores y principios éticos, morales y espirituales que les permitan discernir correctamente para ser personas de bien con un alto perfil de liderazgo.

Los estudiantes que participaron en el estudio tienen entre 15 y 16 años de edad. Cada curso está conformado con aproximadamente 17 estudiantes (ver Tabla 1), con un bajo índice de estudiantes nuevos, en su mayoría vienen realizando sus estudios desde los primeros grados escolares en la Institución.

Tabla 1. Distribución de estudiantes por grupos del grado Noveno

GRUPO	NÚMERO DE ESTUDIANTES		
	MUJERES	HOMBRES	TOTAL
9A	10	6	16
9B	12	5	17
9C	7	9	16

La jornada de estudio en la sección de secundaria del colegio Bennett es matutina, de lunes a viernes desde las 6:45 a.m hasta las 2:30 p.m. Los estudiantes del grado noveno tienen en su horario seis horas de clases de matemáticas semanales.

Aunque la intensidad horaria en matemáticas es de seis horas a la semana, la fase de experimentación se llevó a cabo utilizando cuatro de las seis horas por tres semanas, que inició el 11 de febrero y terminó el 11 de marzo del tercer periodo del año lectivo 2013-2014 (ver Anexo A).

Para la aplicación de la prueba piloto y del diseño didáctico se utilizó la sala de apoyo con la que cuenta el Colegio Bennett disponible para las diferentes áreas de conocimiento, la cual resultó muy favorable para estas actividades puesto que es un salón muy cómodo, dotado de los recursos suficientes para el uso de tecnologías, 31 computadores con soporte técnico, programas actualizados y el software Geogebra instalado. Para hacer uso de la sala de apoyo se debía contactar al monitor y hacer la reserva previamente, este fue un recurso muy útil ya que permitió una mejor organización y cumplimiento del horario establecido para realizar la fase experimental.

Es de tener en cuenta que las observaciones del grupo 9B, que es el grupo control se realizaron en el salón de clase habitual donde se desarrollan las clases, sin incorporar tecnología.

3.2 Fuentes de información previa a la implementación del Diseño Didáctico

En el contexto de la aplicación del diseño didáctico, se llevó a cabo una revisión de la documentación del área de matemáticas en el colegio Bennett[8], en particular lo referente a la programación del grado noveno del tercer período en el año lectivo 2013-2014 (ver Anexo B), donde se observa la pertinencia en relación con los contenidos programados y las fechas estipuladas, en los cuales se encuentran: la función cuadrática, gráfica de la función cuadrática y ecuaciones cuadráticas.

[8] En este colegio se ha diseñado el Plan de Área de Matemáticas teniendo en cuenta las necesidades institucionales educativas y su diseño e implementación se han convertido poco a poco en la base para reflexionar sobre el quehacer del maestro y la identificación de los contextos de la comunidad educativa. Este diseño del plan de área, implica el acompañamiento permanente al conocimiento de las normas legales vigentes así como los elementos básicos del currículo, todos dados desde los Lineamientos Curriculares (M.E.N. 1998). Tomado de: Marcos Teóricos curriculares. Colegio Bennett. Actualización 2011 – 2012.

En el aspecto normativo, el área de matemáticas del colegio Bennett tiene como fundamentación para el desarrollo de pensamiento matemático, del grupo de grados de 8º y 9º E.B.S (Ver Anexo B – Tabla 3), que la descripción es acorde a la implementación del Diseño Didáctico y se encuentra inscrito en la definición del pensamiento variacional-numérico, donde se expone que:

> Se establecen relaciones entre lo numérico y variacional a través de las gráfica cartesianas, contextualizadas desde la variación proporcional (razonamiento multiplicativo), modelando situaciones de variación con funciones polinómicas (fenómenos de cambio y variación), haciendo énfasis en la utilización de descripciones verbales y tablas, favoreciendo la comprensión sintáctica de las nuevas expresiones algebraicas (simbólica, tabular, gráficas cartesianas), construyendo expresiones algebraicas equivalentes, conceptualizando funciones lineales y cuadráticas.[9]

En el colegio Bennett se realiza la contextualización de los procesos de aula a través de situaciones problema para la creación de ambientes de trabajo que sean perceptibles a los estudiantes, y que por tanto, la conceptualización que de ellos se derive les sea significativa. Las situaciones problema se interpretan como:

> …el contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el

---

[9] Tomado de Fundamentación para el desarrollo de pensamiento matemático, para el grupo de grados: 8º y 9º E.B.S. Colegio Bennett. (2013), que a su vez se soporta en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas.

debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación. (Munera, J; Obando, G, 2003, p. 183)[10]

Por tanto es relevante para la propuesta de enseñanza institucional relacionar los conocimientos de aprendizaje con las experiencias cotidianas de los estudiantes a partir de los desempeños y habilidades en la resolución de problemas, el uso de conocimientos y de intercambios de diferentes puntos de vista, que tienen que ver con el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejecución de procedimientos.

Previo a la aplicación del diseño didáctico, los estudiantes del grado noveno, realizaron un estudio de las funciones cuadráticas a través de una situación problema titulada: “Cómo reducir el impacto de tu huella ecológica” (ver Anexo C), la cual tenía como propósito relacionar los conocimientos de la función cuadrática y su gráfica para dar solución a la problemática planteada en un entorno medio ambiental y de la agricultura. También, la profesora había introducido los contenidos referentes a: abertura de la parábola, vértice y eje de simetría de una parábola. En particular con el grupo 9B la profesora orientó el trabajo con el taller de “Función Cuadrática” (ver Anexo C), teniendo en cuenta que este es el grupo donde se realizó la observación sin incorporar tecnología.

Por otra parte, en estas fuentes de información vale la pena mencionar que se tuvo en cuenta una unidad didáctica publicada en la red, por Belén Fernández Alfageme[11], propuesta para estudiantes de 4º de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), donde se utilizan diferentes escenas interactivas de Geogebra para el análisis de la representación gráfica de la función polinómica de 2º grado.

---

[10] Citado en: Marcos Teóricos curriculares. Colegio Bennett. Actualización 2011 – 2012

[11] Profesora del área de matemáticas de Educación Secundaria en España, esta unidad didáctica es publicada en el marco de trabajos realizados en el curso “TIC en el área de Matemáticas. Iniciación”, donde se presentan diferentes propuestas para aplicar las TIC en el aula, en el área de Matemáticas. Disponible en versión on-line. (2010).

Fernández (2010) describe para la unidad didáctica que “partiendo del caso más sencillo, $f(x)=x^2$, se estudian los distintos tipos de funciones de 2º grado estableciendo una relación de traslaciones con el caso inicial” y tiene como propósito tratar los aspectos fundamentales de la función cuadrática: expresión algebraica y gráfica, así como sus características principales. Esta autora propone un enfoque detallado del estudio de la expresión algebraica y las gráficas de la función cuadrática enunciada en la forma polinómica $f(x)=x^2+bx+c$, y no se abordan expresiones algebraicas equivalentes.

Para el diseño didáctico utilizado en la prueba piloto, en la Situación Didáctica 1, se retoman algunas preguntas de la manera como se plantean en la propuesta de Fernández (2010). En la Situación Didáctica 2, se retoman algunos elementos de dicha propuesta y se trabajan en los ítems a, b y c. Posterior a la aplicación de la prueba piloto, la Situación Didáctica 1 es ajustada y se elaboran diferentes preguntas según las observaciones que se llevaron a cabo, lo cual se encuentra detallado en el apartado titulado Diseño Didáctico Prueba Piloto.

3.3 Diseño de la Investigación

3.3.1 Prueba Diagnóstica

Se aplicó la misma prueba diagnóstica a los grupos 9A y 9B, con el fin de obtener información que permitiera establecer una medida comparativa para el final de la fase experimental. Cabe indicar que la prueba diagnóstica es la misma prueba aplicada como evaluación final, lo que permite recolectar información y establecer un análisis comparativo entre los resultados. En los dos grupos, tanto en el grupo 9B (grupo control) como en el grupo 9A (grupo donde se implementó el diseño didáctico) se aplicó la prueba diagnóstica a 17 y 16 estudiantes respectivamente, para luego confrontar los resultados con la evaluación final, verificar los alcances del diseño didáctico y de la enseñanza sin incorporación de la tecnología.

En los dos casos los estudiantes realizaron la prueba de manera individual y registraron sus respuestas de forma escrita en hojas, las cuales hacen parte de las fuentes de información para el análisis de datos. La solución de la prueba no tuvo intervención alguna por parte de la docente, ni de la docente investigadora, a pesar de que los estudiantes manifestaron la necesidad de hacer algunas preguntas se les pidió que sus respuestas fueran estrictamente personales.

3.3.2 Diseño Didáctico Prueba Piloto

La prueba piloto (ver Anexo D) fue aplicada con el grupo 9C, conformado por 16 estudiantes, los cuales ya habían usado el software Geogebra en ocasiones anteriores y se evidenció el manejo de los comandos necesarios para el desarrollo de las situaciones, lo que se convierte en una ventaja para la aplicación del diseño didáctico.

Los hallazgos al realizar la prueba piloto fueron:

En relación con el manejo de los applets en cada situación didáctica se observó un buen uso por parte de los estudiantes, quienes demostraron habilidad en la manipulación de los comandos básicos requeridos, tales como: 

el Deslizador,  Elige y Mueve,  la casilla de control, barra de entrada y selección de índices 

y una propiedad importante del software, la distinción entre los elementos que constituyen la ventana algebraica y la ventana geométrica.

Se evaluó la validez del diseño didáctico, en términos del alcance que se esperaba, puesto que los estudiantes lograron interactuar de manera efectiva y ágil con la propuesta del diseño didáctico, entre pares y con la docente.

Se encontró que se debían efectuar los siguientes ajustes:

En la situación Didáctica 1 los estudiantes concluyeron que hay exceso de preguntas y segmentación en la secuencia, lo que determinó que existían algunas preguntas repetitivas que deberían ser escritas en términos de interrogantes que le dieran más homogeneidad a la situación y se desarrollara un proceso de construcción más ágil con los estudiantes.

En términos de la construcción del saber en la Situación Didáctica 1 es pertinente darle un título más contextualizado, puesto la forma como se enunció no fue claro para los estudiantes (ver Anexo D), a diferencia de los títulos en las demás situaciones y se observó que este fue un elemento de interés para los estudiantes al iniciar cada situación didáctica.

Se enunció verbalmente la instrucción de enviar por correo electrónico a la docente investigadora las construcciones que se debían realizar en el software, de forma individual, de aquí se apreció que era conveniente hacer explícitas las instrucciones para realizar este proceso y además hacer uso de las herramientas del menú archivo que posee el software Geogebra, como: *guarda*, *guarda como* y *Exporta* - *vista gráfica como imagen*, todo ello tiene como propósito potencializar el uso de las herramientas de Geogebra (Situación Didáctica 1 y 2).

La Situación Didáctica 4 fue la que tuvo más dinamismo en el proceso de interacción con el software[12], entre pares de estudiantes, quienes sugirieron incluir más actividades de este tipo. Lo que se observó es que cuando los estudiantes proponían diferentes estrategias de solución construidas por sí mismos utilizando Geogebra, se potencializaban las situaciones de acción y de validación, con mejores alcances en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes. Esto a su vez, sirvió como referencia para hacer ajustes en las Situaciones Didácticas 1 y 2.

3.4 Implementación del Diseño Didáctico

Teniendo en cuenta la Teoría de las Situaciones Didácticas se proponen cuatro Situaciones Didácticas que se diseñaron incorporando las situaciones de acción, de formulación, de prueba o validación social e institucionalización, según se caracterizó en el marco teórico de la investigación. Al realizar el diseño didáctico se puso en consideración con dos pares académicos, profesores del área de matemáticas del colegio Bennett, uno de ellos es el docente de la educación media, grados decimos y undécimos, y la otra docente es la encargada del grado noveno, quien acompañó la implementación del diseño didáctico (ver Anexo D).

También, se tuvieron en cuenta los aportes de la coordinadora del área de matemáticas, quien tiene una visión global de la programación y manejo de dicha área en el Colegio Bennett. De aquí, se obtuvieron opiniones consensuadas acerca de la claridad de las preguntas, manejo de los applets, coherencia entre los propósitos de cada situación, su desarrollo y la viabilidad en el cronograma de las actividades propuestas.

[12] En términos de la TSD, se define como el medio material y social que permite generar retroacciones mediatas que permiten acciones y anticipaciones por parte de los sujetos que aprenden (Brousseau, 1986).

Después de la aplicación de la prueba piloto y la prueba diagnóstica se realizan los ajustes correspondientes al diseño didáctico, el cual se aplica en los horarios establecidos previamente. En cuanto a la implementación del diseño didáctico, que se realizó con el grupo 9A, durante una semana se desarrollaron las situaciones didácticas 1 y 2, y la semana siguiente las situaciones 3 y 4 (ver Anexo A).

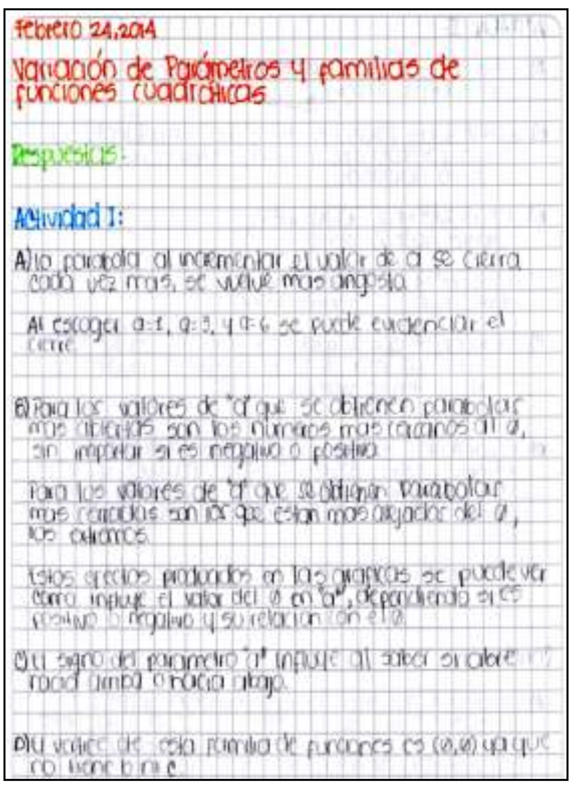
Durante el desarrollo de las situaciones didácticas se efectuaron filmaciones con la colaboración del asistente de la Sala de Apoyo, focalizando las intervenciones e interacciones de los estudiantes con sus pares, con la docente y el entorno tecnológico. De aquí se transcriben los diálogos con algunas apreciaciones o comentarios y se hace el respectivo registro (ver Anexo F), se realiza también el registro fotográfico de cada una las sesiones que hacen parte de los instrumentos que se utilizaron en la recolección de la información.

En la sala de Apoyo, cada estudiante recibió la guía de las situaciones didácticas impresa y la hoja para escribir las respuestas aparte, de esta manera los estudiantes se organizaron según la ubicación de los computadores en la sala, cada uno frente a un computador (ver Figura 4). Como los applets habían sido instalados previamente, al iniciar la implementación se hizo una breve inducción explicando en qué carpeta del sistema se encontraba cada applet al que se refería cada situación didáctica.

A pesar de que cada estudiante trabajó en un computador, vale la pena aclarar que las fases de prueba o validación social e institucionalización, se hicieron entre los pares que se encontraban ubicados en la misma fila de la sala de apoyo, esto de manera verbal y luego cada uno debía escribir la conclusión de manera personal en la hoja de respuestas.

Figura 4. Organización de estudiantes en la sala de apoyo.
Aplicación del diseño didáctico. 24 de Febrero de 2014

En cada una de las situaciones didácticas, los estudiantes deben registrar por escrito sus respuestas en hojas de manera individual, de donde se obtienen 16 hojas de respuestas para cada intervención (ver Figura 5).


Febrero 24, 2014
Variación de Parámetros y familias de funciones cuadráticas
Respuestas:
Actividad I:
A) la parabola al incrementar el valor de a se cierra cada vez mas, se vuelve mas angosta
Al escoger a=1, a=3, y a=6 se puede evidenciar el cierre
B) Para los valores de "a" que se obtienen parabolas mas abiertas son los numeros mas cercanos al 0, sin importar si es negativo o positivo
Para los valores de "a" que se obtienen parabolas mas cerradas son los que estan mas alejados del 0, los extremos.
Estos efectos producidos en las graficas se puede ver como influye el valor del 0 en "a", dependiendo si es positivo o negativo y su relacion con el 0.
C) El signo del parametro "a" influye al saber si abre hacia arriba o hacia abajo.
D) El vertice de esta familia de funciones es (0,0) ya que no tiene b ni c.


Actividad #1:
d) Consiste en este punto ya que 'x' vale cero, por ende 'y' también vale cero.
Concluye:
I. $F(x)=10x^2$ · $F(x)=0,1x^2$

Figura 5. Hojas de respuestas de dos estudiantes.
Situación Didáctica 1: La variación del parámetro "a"

En relación con la fase de institucionalización de cada situación didáctica se realizó en dos momentos, el primero se lleva a cabo finalizando cada sesión a manera de cierre de la situación didáctica, donde los saberes son institucionalizados en el contexto por la relación establecida con el *medio* y la construcción social entre pares académicos; el segundo momento se lleva a cabo mediante una evaluación escrita que se aplicó al finalizar la implementación de las cuatro situaciones didácticas, procedimiento que se efectuó una semana después de finalizar las sesiones de aplicación del diseño didáctico.

Para la recolección de la información, también los estudiantes hicieron construcciones que hacen parte de la fase de prueba o validación social en cada una de las situaciones didácticas, las cuales se guardaron usando el ***menú Archivo***, la opción ***Vista Gráfica como Imagen*** del ítem *Exporta* del software Geogebra y se envían por correo electrónico para ser recopilados por la docente investigadora.

Así, se plantea para este diseño didáctico la siguiente hipótesis:

"El diseño didáctico, apoyado en el software Geogebra, con base en la Teoría de Situaciones Didácticas favorece el cambio en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas"

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Esto se llevó a cabo con base en tres categorías de análisis con sus respectivos indicadores, tal como se presentan en las Tablas 2, 3 y 4. Estas categorías permiten tener un panorama amplio de observaciones distribuidos de esta forma:

1. Objeto de aprendizaje:

   Esta es la primera categoría de análisis donde se determina lo referente al estudio de las familias de funciones cuadráticas y de la variación de los parámetros que intervienen en la expresión analítica que representa a las familias de funciones cuadráticas.

   Los indicadores que corresponden a esta categoría (ver Tabla 2) se definieron teniendo en cuenta los aportes señalados en el estudio previo de investigación desarrollado como trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas y Física en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, que tuvo como título: **"Dificultades de estudiantes de educación media relativas a las familias de funciones cuadráticas a través de la interpretación de parámetros**" tal como se referenció en el apartado de presentación y formulación del problema de investigación del primer capítulo de este trabajo.

   De acuerdo con la Teoría de Situaciones Didácticas, expuesta en el apartado del Marco Teórico en el primer capítulo, se determinan los descriptores que dan cuenta de manera integrada los presupuestos teóricos de las situaciones didácticas con el desarrollo del análisis de los resultados obtenidos.

2. Interacción social y con el medio:

   Con base en lo propuesto por Brousseau (1986), específicamente en lo denominado como "interacciones", se establecen tres indicadores de análisis que además de tener en cuenta la interacción entre pares y con la docente[13], hacen referencia a la interacción con el medio[14] (ver Tabla 3).

3. Comportamiento: Actitudes favorables hacia el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas (ver Tabla 4).

   Esta categoría es de carácter actitudinal y transversal a las diferentes situaciones didácticas que se desarrollan a lo largo del diseño, por tal razón sólo se definen sus indicadores y su respectiva descripción.

[13] La interacción con la docente se refiere en particular a las acciones observables de los estudiantes en relación con las intervenciones de la docente de matemáticas del grupo, por lo cual no es objeto de investigación la actividad de la docente.

[14] Se define el concepto de *medio* en relación con la Teoría de Situaciones Didácticas, en el apartado llamado Marco Teórico del primer Capítulo.

Tabla 2. Categoría de análisis
1. OBJETO DE APRENDIZAJE

<table>
<tr><th>INDICADORES</th><th>FASE DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA</th><th>DESCRIPCIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1.1 Interpretación de los parámetros en la expresión algebraica que representa una familia de funciones cuadráticas.

1.2 Visualización de las propiedades de las gráficas desde la representación simbólica general en un nivel alto de abstracción.

1.3 Pasar del lenguaje natural especializado al lenguaje formal analítico.

1.4 Articulación y coordinación en los diferentes sistemas de representación (gráfico, verbal, algebraico).</td><td>SITUACIÓN DE ACCIÓN</td><td>El estudiante expresa sus opciones y sus decisiones con base en las acciones sobre el medio y las manifiesta en las estrategias de solución.</td></tr>
<tr><td>SITUACIÓN DE FORMULACIÓN</td><td>Se hace explícito pasar de una formulación en lenguaje natural a un enunciado formal. El recurso en la actividad matemática, a la lengua natural y a otras clases y a otros tipos de representaciones tales como dibujos o grafos, exige distinguir para ellos códigos y modos de control propios.</td></tr>
<tr><td>SITUACIÓN DE PRUEBA O DE VALIDACIÓN SOCIAL</td><td>Se relacionan concepciones anteriores y preguntas acerca de nuevos conceptos, surgen propiedades que sirven para proponer nuevas cuestiones que introduzcan definiciones.
Los estudiantes manifiestan el uso de pruebas y validaciones y consideran la validez de una solución.</td></tr>
<tr><td>INSTITUCIONALIZACIÓN</td><td>Los saberes están organizados en teorías, en demostraciones y definiciones bien determinadas en su más completa forma cultural.</td></tr>
</table>

Tabla 3. Categoría de análisis

2. INTERACCIÓN SOCIAL Y CON EL MEDIO

INDICADORES	FASE DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA	DESCRIPCIÓN
2.1 Interacción entre pares 2.2 Interacción con el software Geogebra 2.3 Interacción con el docente	SITUACIÓN DE ACCIÓN	Los intercambios de informaciones, las acciones y las decisiones que actúan directamente sobre el otro protagonista "comparten las mismas informaciones sobre el medio" (Brousseau, 1986).
	SITUACIÓN DE FORMULACIÓN	El mensaje a manera de información. El estudiante no indica explícitamente una necesidad de validación. Los intercambios de informaciones están codificadas en un lenguaje que "debe cambiar al menos la incertidumbre del medio y en general su estado" (Brousseau, 1986).
	SITUACIÓN DE PRUEBA O DE VALIDACIÓN SOCIAL	El intercambios de opinión es necesario para obtener la decisión - los estudiantes intercambian aserciones, refutaciones, pruebas y demostraciones según el par: "medio / mensajes". Se utilizan los saberes y los conocimientos matemáticos para convencer – no por medios retóricos.
	INSTITUCIONALIZACION	Toma de decisiones y realiza procesos de formalización.

Tabla 4. Categoría de análisis.
3. COMPORTAMIENTO: ACTITUDES FAVORABLES HACIA EL APRENDIZAJE DE LAS FAMILIAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

INDICADORES	DESCRIPCIÓN
3.1 Disposición	El estudiante tiene una actitud reflexiva, para progresar en el desarrollo de las situaciones.
3.2 Interés	Realiza acciones útiles y necesarias para lograr el desarrollo de la situación.
3.3 Motivación	Participación activa de los estudiantes.
	Cooperación: Los estudiantes comparten el mismo deseo de alcanzar una verdad

4.1 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 1. Variación del parámetro “a” y sus efectos en las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$

Esta es la primera situación didáctica que se implementó con los estudiantes, para iniciar se realiza una breve explicación acerca del objetivo que tiene el diseño en general por parte de la docente investigadora. Así mismo, se les indica a los estudiantes algunos aspectos técnicos para identificación de la carpeta que contiene los applets del diseño con el objetivo de que ellos se familiaricen con la dinámica de cada actividad (desde lo procedimental) y relacionaran los requerimientos básicos para el desarrollo de las situaciones didácticas.

Cuando los estudiantes abrieron el Applet 1 se mostraron deseosos de efectuar la manipulación e iniciar la exploración de los elementos de la ventana geométrica, particularmente haciendo uso de los deslizadores, actividad que no presentó ninguna dificultad técnica pues ellos ya tenían experiencia al usar este comando.

Fue necesario sugerir a los estudiantes el uso de las casillas de control, que se encuentran en la parte inferior izquierda de la ventana, pues la mayoría no se percataban del aporte de esta herramienta.

A continuación se hace una descripción y análisis de los resultados obtenidos en cada fase de la situación didáctica:

Situación de acción: Esta fase es observable de manera específica con los literales a y b de la Situación 1. Consiste en visualizar las propiedades de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$, que están determinadas por la ampliación o reducción de las ramas de las parábolas en comparación con la gráfica de la función $f(x)= x^2$.

En este caso se registran expresiones como:

a) lo que sucede en la parabola es que si el valor (positivo) del parametro "a" es menor la parabola de color verde se vuelve mas delgada y si el valor va aumentando se puede evidenciar que la parabola comienza hacerse mas ancha.

a) Lo que sucede en la parábola es que si el valor (positivo) del parámetro "a" es menor la parábola de color verde se vuelve más delgada y si el valor va aumentando se puede evidenciar que la parábola comienza hacerse más ancha.

A) la parabola al incrementar el valor de a se cierra cada vez mas, se vuelve mas angosta
Al escoger a=1, a=3, y a=6 se puede evidenciar el cierre

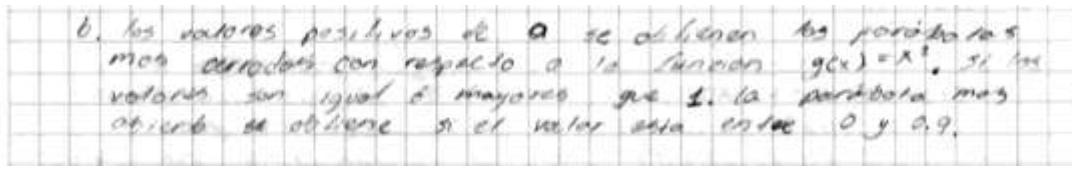
A) La parábola al incrementar el valor de a se cierra cada vez más, se vuelve mas angosta.
Al escoger a=1, a=3, y a=6 de puede evidenciar el cierre.

Figura 6. Respuestas de la pregunta a – Situación 1. Estudiante 2 y 7

Existe una tendencia que se observa y es que para los estudiantes es fundamental hacer la diferenciación entre la parábola que representa la variación del parámetro "a" y la función f(x)= x^2, haciendo uso de un elemento visual como es el color de la curva. Además, en esta fase describen la ampliación o reducción de las parábolas usando el lenguaje natural (aún no formal) con expresiones como: más grande, más abierta, más ancha, más delgada, se estrecha o se cierra, aludiendo a sus acciones en relación con el medio (Applet 1) y la solución a las preguntas planteadas.

B) Para los valores de "a" que se obtienen parabolas mas abiertas son los numeros mas cercanos al ø, sin importar si es negativo o positivo.
Para los valores de "a" que se obtienen parabolas mas cerradas son los que estan mas alejados del ø, los extremos.

B) Para los valores de "a" que se obtienen parábolas más abiertas son los números más cercanos a ø, sin importar si es negativo o positivo.
Para los valores de "a" que se obtienen parábolas más cerradas son los que están más alejados del ø, los extremos.


b. los valores positivos de a se obtienen las parábolas mas cerradas con respecto a la función $g(x) = x^2$. si los valores son igual ó mayores que 1. la parábola mas abierta se obtiene si el valor esta entre 0 y 0.9.

b. los valores positivos de a se definen las parábolas más cerradas con respecto a la función g(x)= x^2 . Si los valores son igual o mayores que 1. La parábola más abierta se obtiene si el valor está entre 0 y 0.9.

Figura 7. Respuestas de la pregunta b – Situación 1. Estudiantes 9 y 11

La respuesta de los estudiantes a esta pregunta es correcta, los cuales expresan en lenguaje natural la relación de la variación de “a” y cómo se obtienen las parábolas, ya sea más abiertas o más cerradas. Como se observa en la Figura 8 los estudiantes describen la variación del parámetro “a” recurriendo a elementos descriptivos desde lo que visualizan en el sistema gráfico y lo articulan con el sistema verbal.

Se encuentran dos resultados erróneos, en el primero el estudiante expresa que “*para los valores positivos de “a” a partir del dos (2) para arriba se pueden obtener parábolas más cerradas*”, y el segundo caso es que “*los números tienen que concordar con la gráfica es decir que si “a” es 3 la parábola tiene que pasar por 3 y así con los demás números*”. En estos casos se observa que a pesar de la manipulación con el Applet 1, los dos estudiantes no efectúan un proceso de visualización adecuado estableciendo valores para los parámetros que no corresponden a una correcta interpretación.

Situación de formulación: esta fase de la Situación Didáctica se hace observable con los literales c y d de la Situación 1. Consiste en establecer que las parábolas que representan a la familia de funciones $f(x) = a\,x^2$ $(a \neq 0)$, abren sus ramas hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, por tanto se indaga sobre el efecto en la parábola según el signo del parámetro “a”. En el literal d se debe establecer la relación entre la expresión algebraica, la gráfica de la familia de funciones cuadráticas $f(x) = a\,x^2$ y su vértice.

La tendencia se observa en que los estudiantes establecen apropiadamente la relación entre el signo del parámetro “a” y la forma de la gráfica, logran enunciar esta propiedad de las gráficas interpretando el efecto que produce el signo en el parámetro “a” adecuadamente.

En este caso los estudiantes hacen una formulación de un enunciado general y expresan la variación del parámetro “a” así: si el signo de “a” es positivo la parábola abre hacia arriba y si es negativo la parábola abre hacia abajo.

Existen algunas formulaciones donde los estudiantes complementan el enunciado agregando características propias del registro gráfico (códigos y modos de control propios) observables en la ventana geométrica del software Geogebra, tales como:

c) si "a" es positiva la parábola abre hacia arriba (y esta encima del eje x) y si "a" es negativa la parábola abre hacia abajo (y esta por debajo del eje x)

c. si “a” es positiva la parábola abre hacia arriba (y esta encima del eje x) y si “a” es negativa la parábola abre hacia abajo (y está por debajo del eje x)

c. influye en que si signo del parametro es negativo la parabola se convierte en negativa y que ubicada entre los cuadrantes III y IV pero si el signo es positivo la parabola queda positiva y se ubica entre los cuadrantes I y II

c. Influye en que si signo del parámetro es negativo la parábola se convierte en negativa y que ubicada entre los cuadrantes III y IV pero si el signo es positivo la parábola queda positiva y se ubica entre los cuadrantes I y II.

Figura 8. Respuestas a la pregunta c – Situación 1. Estudiantes 7 y 10

Por otra parte, para establecer el vértice de las familias de funciones de la forma $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) es posible observar que la tendencia en la formulación de los estudiantes es determinar adecuadamente que el vértice corresponde al punto con coordenadas (0,0) y el recurso que utilizan para justificar esta definición es relacionar el conocimiento previo acerca de la ecuación canónica de las funciones cuadráticas expresada de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Los estudiantes recurren a la interpretación en el sistema de representación algebraico, pues relacionan que como el parámetro "b" y "c" son cero, entonces cuando $\boldsymbol{x}$ vale cero, $\boldsymbol{y}$ vale cero y por tanto este es el vértice de las parábolas que representan a esta familia de funciones, lo que además ha sido controlado desde la observación en el sistema gráfico a través del Applet 1.

*Situación de prueba o de validación social: e*sta fase de la Situación 1 fue desarrollada por los estudiantes agrupándose por filas según la ubicación en la sala de apoyo. Por esta razón los grupos estaban conformados por 3 ó 4 estudiantes, donde realizaron la validación de sus respuestas y luego cada uno la escribió en la hoja individualmente.

Con el desarrollo del literal I de la sección CONCLUYE, se pudo observar el proceso de validación realizado por los estudiantes, de donde se obtiene que todos definen correctamente las cuatro expresiones algebraicas de las funciones cuadráticas que hacen parte de la familia de funciones de la forma $f(x)=ax^2$, las cuales ordenan ya sea de menor a mayor o viceversa. De los registros enviados por los estudiantes (ver Figura 9), a través de la opción *vista gráfica* del ítem *Exporta*, se observa que el manejo técnico y la interacción con el medio es apropiada porque lograron representar gráficamente las funciones que habían propuesto y que conformaban la familia de funciones indicada. Así mismo, realizan el proceso de registro, es decir, manipulan el programa Geogebra y generan sus respuestas como imágenes aprovechando las herramientas del software.

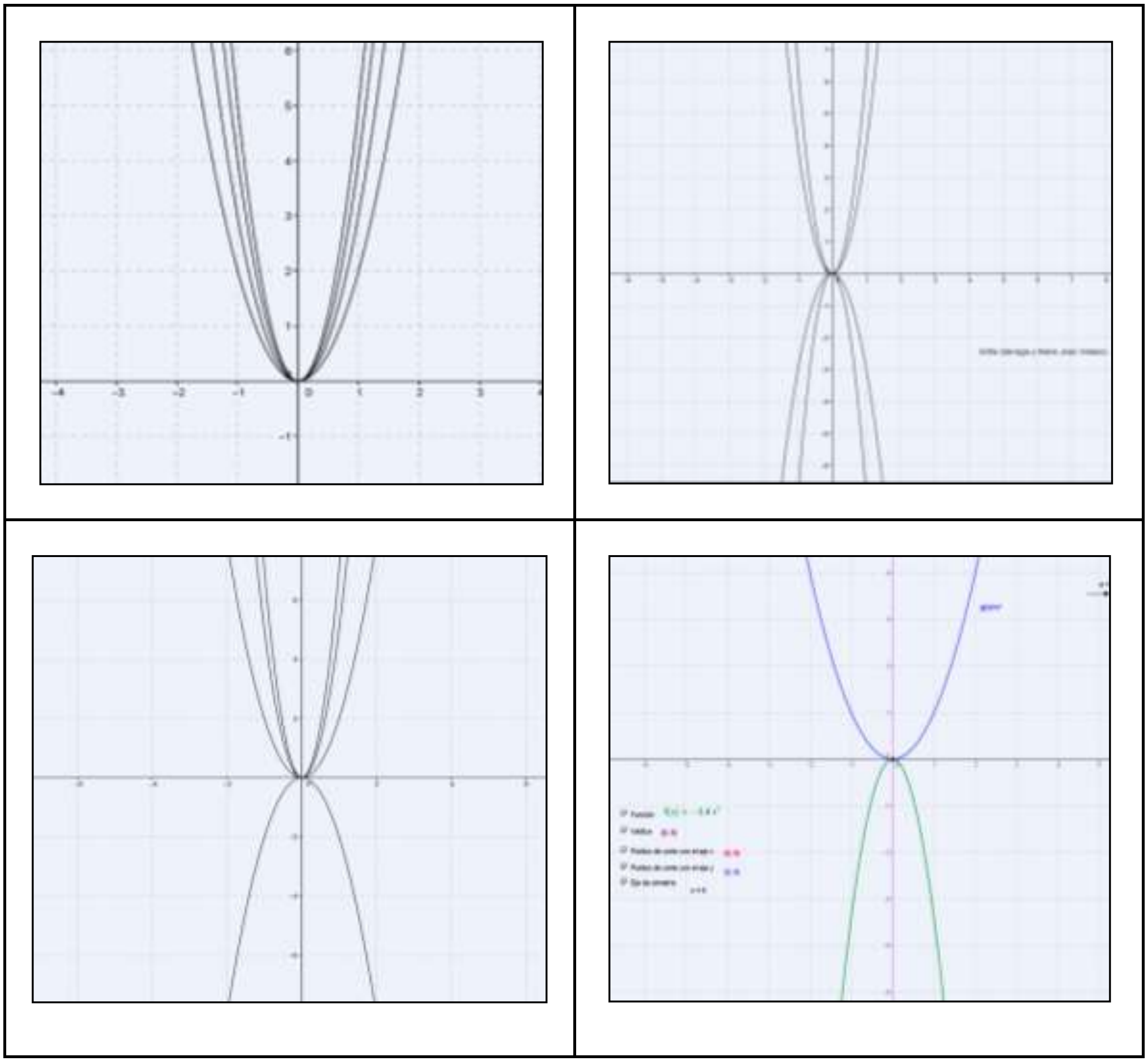


Figura 9. Registros de la respuesta al literal I. Sección *Concluye*. Situación 1. Estudiantes filas 2, 5, 7 y 8

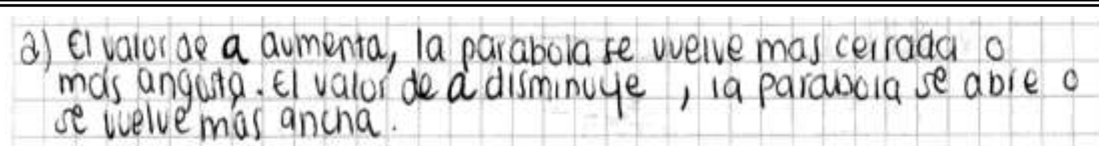
Los estudiantes representan adecuadamente las cuatro funciones de la familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x)=ax^2$, y con base en ellas, pudieron validar las conjeturas que se hacían de manera verbal al intercambiar opiniones sobre el efecto que produce la variación del parámetro “a” en sus gráficas. Además, los estudiantes integraron la variación del parámetro “a” con respecto al signo y registraron gráficas que abrían hacia arriba y hacia abajo. En sólo tres casos los estudiantes no utilizan una ventana nueva del programa y registran las gráficas de manera individual, sin embargo utilizan adecuadamente los valores del deslizador y los expresan algebraicamente de manera correcta tal como se muestra en la cuarta gráfica de la Figura 9.

Institucionalización

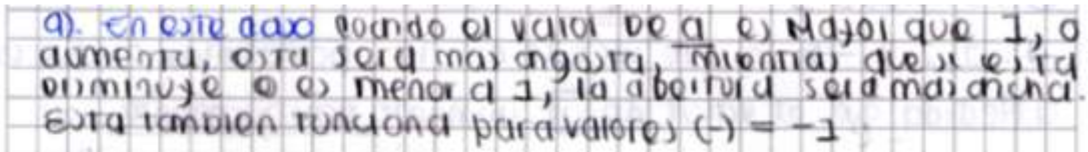
Esta fase consta de dos partes, la primera se relaciona con el literal II de la sección CONCLUYE de la Situación 1, y la segunda se realiza con la evaluación que se aplicó una semana después de terminada la implementación del diseño didáctico.

Con respecto a la primera parte se observa que la fase de validación realizada antes de la institucionalización resulta fundamental para promover cambios en el aprendizaje del concepto de parámetro y de su variación, debido a que con las formulaciones e intercambios de opiniones los estudiantes logran realizar el proceso de formalización, que consiste en establecer la interpretación del parámetro “a” en la familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x)=a\,x^2$ para definir el efecto que este genera en los sistemas de representación gráfico, algebraico y verbal.

En relación con la variación del parámetro “a” y la representación de la familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x)=a\,x^2$, se presentan enunciados como:


a) El valor de a aumenta, la parabola se vuelve mas cerrada o mas angosta. El valor de a disminuye , la parabola se abre o se vuelve mas ancha.

a) El valor de a aumenta, la parábola se vuelve más cerrada o más angosta. El valor de a disminuye, la parábola se abre o se vuelve más ancha

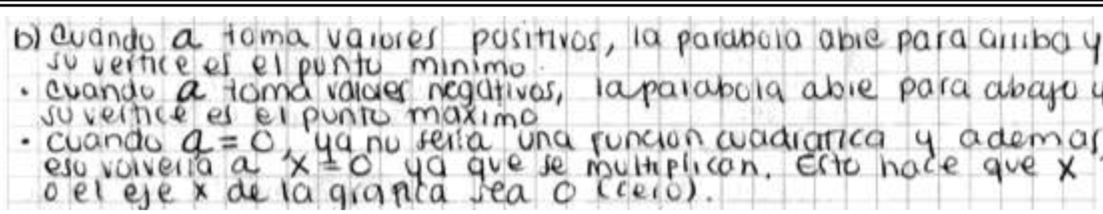


a) En este caso cuando el valor de <u>a</u> es Mayor que 1, o aumenta, esta será mas angosta, mientras que si esta disminuye o es menor que 1, la abertura será más ancha. Esta también funciona para valores (-) = -1.

Figura 10. Respuestas al literal II (a). Sección *Concluye*. Situación 1. Estudiantes 1 y 7

Los estudiantes pueden hacer la formalización correctamente de la interpretación del parámetro “a” y expresar su variación en términos de la ampliación o reducción de las ramas de la parábola al compararla con la gráfica de la función $f(x)= x^2$, por tanto se observa en los enunciados cómo cada estudiante puede verbalizar el efecto del cambio en el parámetro “a” representado en el sistema algebraico y su articulación con el sistema gráfico. Algunos estudiantes determinan la variación del parámetro teniendo el 1 como límite de variación, lo que produce rangos de variación más precisos para el dominio del parámetro (ver Figura 10).

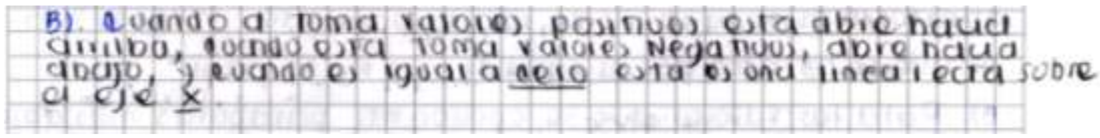
En el literal II se observa la definición de la variación del parámetro “a” en relación con el signo y el efecto en la abertura de la parábola. Para ello se registran enunciados tales como:



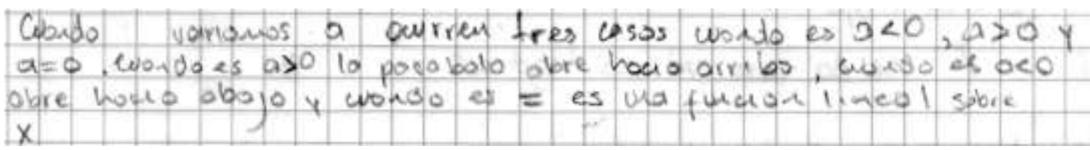
b) Cuando a toma valores positivos, la parábola abre para arriba y su vértice es el punto mínimo.

. Cuando a toma valores negativos, la parábola abre para abajo y su vértice es el punto máximo.

. Cuando a=0 ya no sería una función cuadrática y además, eso volvería a x=0 ya que se multiplican. Esto hace que x o el eje x de la gráfica sea 0 (cero).



b) Cuando a toma valores positivos esta abre hacia arriba, cuando esta toma valores negativos abre hacia abajo, y cuando es igual a <u>cero</u> esta es una línea recta sobre el eje <u>x</u>.



Cuando variamos a ocurren tres casos cuando a<0, a>0 y a = 0. Cuando es a>0 la parábola abre hacia arriba, cuando es a<0 abre hacia abajo y cuando es = es una función lineal sobre x.

Figura 11. Respuestas al literal II (b). Sección *Concluye*. Situación 1. Estudiantes 1, 7 y 10

Los estudiantes determinan de forma completa la variación del parámetro “a” y logran establecer el efecto en la gráfica de la familia de funciones según su signo. Cuando se define la familia de funciones de la forma $f(x)=a\,x^2$, la docente hizo la observación de manera verbal acerca de excluir el valor del parámetro “a” cuando vale cero. Sin embargo, se puede observar que los estudiantes incluyeron este valor en sus definiciones y la visualización en el Applet 1 les permitió afianzar la diferencia de generar parábolas cuando el parámetro “a” es diferente de cero, o cuando “a” es igual a cero y la gráfica es una línea recta horizontal.

Vale la pena tener en cuenta que en el proceso de institucionalización en esta situación, la docente interviene en pocas ocasiones debido a que los estudiantes logran hacer construcciones apropiadas de su saber y requieren muy poco de la orientación de la autoridad para verificar sus aserciones. En este caso recurren más a la organización de los saberes con base en el intercambio cultural entre pares que a la orientación de la docente.

La segunda parte de la institucionalización se realiza con la aplicación de una evaluación (ver Anexo F) de manera individual, cuyo propósito es poner en acción lo que ya definieron en las fases anteriores. En particular la pregunta 1 de la evaluación está relacionada con la aplicación de la variación del parámetro “a” y la interpretación del efecto que produce en la gráfica. De aquí se pudo constatar que todos los estudiantes dieron solución correcta a la respuesta, justificándola apropiadamente.

En contraste con la prueba diagnóstica, donde 9 de los estudiantes contestaron de manera incorrecta, 4 correctamente y 3 no dieron respuesta, la tendencia de error fue considerar que el valor del parámetro “a” causaba un efecto en la gráfica de traslación ½ unidad hacia la derecha (opción c de la pregunta 1) y la respuesta correcta se expresaba en la opción d (ver Anexo F).

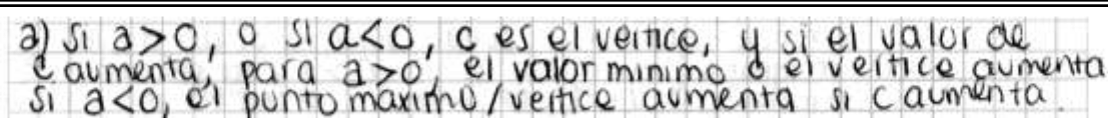
4.2 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 2. Familia de funciones cuadráticas: $f(x)=ax^2+c$

Cuando los estudiantes resuelven esta situación se observa en ellos más disposición e interés al realizar acciones útiles y necesarias pertinentes para progresar en el desarrollo de la situación. Lo que se evidencia al interactuar con el medio de manera más hábil y efectiva en comparación con la situación 1. Para iniciar la situación los estudiantes ya tenían más confianza y manejaban la dinámica del uso del Applet 2.

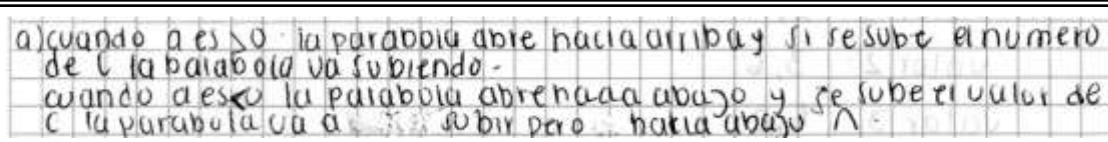
El propósito de esta situación es determinar que para las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$, donde “a” y “c” son constantes reales no nulas, si se suma un valor “c” a la ordenada de cada punto de las funciones de la forma $f(x) = ax^2$, la gráfica se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia “c”. Para el caso $c < 0$, se resta el valor a cada ordenada y con ello se desplaza la gráfica de la función una distancia “c” verticalmente hacia abajo. Además, las gráficas de todas las funciones cuadráticas definidas por la expresión de la forma f(x) = ax^2 + c son simétricas con respecto al eje y, con vértice (0, c).

Situación de acción: en esta situación didáctica se presentan tres actividades relacionadas con la fase de acción, que se proponen en los literales a y b (ver Anexo E). Estos literales están relacionados con la manipulación del Applet 2 y con la visualización del efecto que produce en la gráfica la variación del parámetro "c" en la expresión algebraica de la familia de funciones de la forma f(x) = ax^2 + c, elementos que se relacionan para determinar la coordenada del vértice.

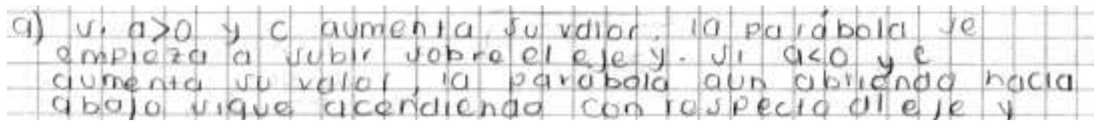
En esta actividad de acción (literales a y b – Situación Didáctica 2) se observa que los estudiantes manifiestan diferentes formas de expresar sus decisiones con base en las interacciones sobre el medio. Sin embargo, todos interpretan adecuadamente lo que ocurre con las parábolas si el valor de "c" va aumentando y utilizan diferentes estrategias de solución al relacionarlo con la variación del parámetro "a". Las siguientes son algunas soluciones que se observaron en esta actividad:



a) si a>0, o si a<0, c es el vértice, y si el valor de c aumenta, para a>0, el valor mínimo o el vértice aumenta. Si a<0, el punto máximo / vértice aumenta si c aumenta.



a) cuando a es >0 la parábola abre hacia arriba y si se sube el numero de c la parábola va subiendo.
   cuando a es <0 la parábola abre hacia abajo y se sube el valor de c la parábola va a subir pero hacia abajo 



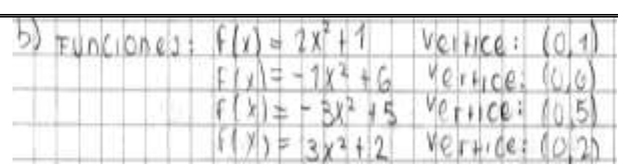
a) si a>0 y c va aumentando su valor la parábola se empieza a subir sobre el eje y. Si a<0 y c aumenta su valor, la parábola aun abriendo hacia abajo sigue acendiendo [*sic*] con respecto al eje y

Figura 12. Respuestas al literal (a). Situación 2. Estudiantes 13, 1 y 3

Como se presenta en estas respuestas los estudiantes utilizan diferentes intercambios de informaciones y recurren a diversos elementos descriptivos que son propios de su interacción con el Applet 2. Se puede inferir que esta diversidad enriquece la actividad y les permite establecer relaciones adecuadas y cada vez más completas.

Con respecto al comportamiento y actitudes hacia el aprendizaje, los estudiantes cada vez realizan acciones útiles y necesarias, siendo reflexivos para progresar en el desarrollo de la actividad propuesta.

Para la solución del literal b de la Situación 2, es posible percibir la agilidad que los estudiantes presentan al articular la relación entre los sistemas de representación de las funciones cuadráticas, desde lo gráfico y lo algebraico, pues logran definir correctamente para un conjunto de funciones que conforman la familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$, la coordenada del vértice correspondiente (ver Figura 13). Para ello, los estudiantes se valen de diferentes campos numéricos para identificar la variación del parámetro "c", considerando valores positivos, negativos, enteros y decimales.



b) Funciones: $f(x)=2x^2 + 1$ vértice: (0,1)
$f(x)=-1x^2 + 6$ vértice: (0,6)
$f(x)= -3x^2 + 5$ vértice: (0,5)
$f(x)= 3x^2 + 2$ vértice: (0,2)

B) * $f(x)=2x^2+1.2$ * $f(x)=2x^2+2$ vertice $=(0,1.2)$ vertice $=(0,2)$ * $f(x)=2x^2+4$ * $f(x)=2x^2+4.8$ vertice $=(0,4)$ vertice $=(0,4.8)$	B) f(x)= $2x^2 + 1,2$ * f(x)= $2x^2 + 2$ vértice = (0, 1.2) vértice = (0, 2) f(x)= $2x^2 + 4$ * f(x)= $2x^2 + 4.8$ vértice: (0, 4) vértice: (0, 4.8)
b) * $y=2.2x^2-2.2 \rightarrow (0,-2.2)$ * $y=0.2x^2+2.4 \rightarrow (0,2.4)$ * $y=7x^2+4 \rightarrow (0,4)$ * $y=3x^2+1.8 \rightarrow (0,1.8)$	b) * y = $2,2x^2 - 2.2$ → vértice: (0, -2.2) * y = $0,2x^2 + 2.4$ → vértice: (0, 2.4) * y = $7x^2 + 4$ → vértice: (0, 4) * y = $3x^2 + 1.8$ → vértice: (0, 1.8)

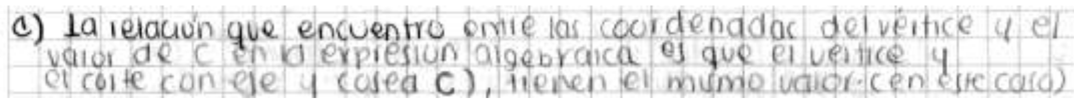
Figura 13. Respuestas al literal (b). Situación 2. Estudiantes 3, 6 y 16

Se observa también la habilidad que tienen los estudiantes en el manejo del Applet 2, el aprovechamiento de las herramientas que el programa provee como la casilla de control "vértice", la información de la ventana algebraica y la vista gráfica, y el deslizador.

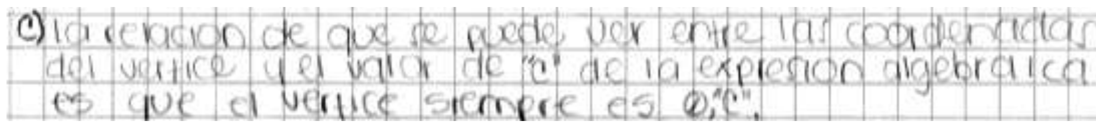
Situación de formulación: en esta fase de la Situación 2 se plantea con las preguntas de los literales c, d y e. El propósito es que los estudiantes sean capaces de formular la relación entre la coordenada del vértice y el valor de "c" de la expresión algebraica de las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$, también determinar en qué casos las parábolas cortan el eje $\mathbf{x}$, en particular en los casos a=1 y c=-4, y cómo se relacionan estos puntos de corte con la expresión algebraica.

A partir de las acertadas respuestas de la situación de acción, los estudiantes proceden a realizar sus formulaciones en relación con el vértice que poseen las parábolas de la familia de funciones $f(x) = ax^2 + c$.

c) La relacion entre las coordenadas del vertice y el valor de c es que el vertice siempre tiene coordenadas (0, c)
c) La relación entre las coordenadas del vértice y el valor de c es que el vértice siempre tiene coordenadas (0, c)



c) La relación que encuentro entre las coordenadas del vértice y el valor de c en la expresión algebraica es que el vértice y el corte con eje y (ósea c), tienen el mismo valor (en este caso)



c) La relación de que se puede ver entre las coordenadas del vértice y el valor de "c" de la expresión algebraica es que el vértice siempre es ø, "c".

Figura 14. Respuestas al literal (c). Situación 2. Estudiantes 5, 6 y 16

De aquí se observa que, además de determinar las coordenadas del vértice (0,c), algunos estudiantes manifiestan códigos propios que complementan su actividad, tales como relacionar el vértice y el corte con el eje $\mathbf{y}$, además de utilizar el término "expresión algebraica" que era desconocido para ellos.

Hubo sólo dos resultados no esperados que consistieron, uno de ellos que relacionó la coordenada (0,c) con el punto de corte en el eje $\mathbf{x}$, y el otro estudiante que no logró realizar la formulación adecuada. En este último caso porque expreso de manera incorrecta que "el vértice tiene las mismas coordenadas de c". Por lo anterior fue necesario que la docente hiciera el proceso de "devolución" con estos estudiantes para que replantearan sus formulaciones.

Otra propiedad de las gráficas de la familia de funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$ que se consideró son los puntos de corte en el eje $\mathbf{x}$ de las parábolas según la variación de los parámetros "a" y "c", estos son conocidos también como los ceros de la función. Aquí se deben considerar dos casos:

Caso 1: si $a>0$ la parábola abre sus ramas hacia arriba. Si $c = 0$, el vértice está situado sobre el eje x y la parábola "corta" en un solo punto del eje $\mathbf{x}$. Si $c < 0$, el vértice está situado debajo del eje $\mathbf{x}$ y la parábola debe cortar el eje $\mathbf{x}$ en dos puntos. Si c>0 la parábola no corta al eje $\mathbf{x}$.

Caso 2: si a<0 la parábola abre sus ramas hacia abajo y se consideran tres casos para el valor del parámetro “c”. Si c >0 entonces la función tiene dos ceros reales, es decir dos puntos de corte en el eje $\mathbf{x}$. Si c=0 sólo existe un cero real, por tanto un punto de corte en el eje $\mathbf{x}$ y si c<0 no existen ceros reales y por ende la parábola no corta al eje $\mathbf{x}$.

En particular, los literales d y e de la Situación 2 están relacionados con esta actividad. Es importante mencionar que las preguntas de estos literales fueron resueltas correctamente por todos los estudiantes, quienes lograron determinar para un caso específico de la expresión algebraica con a=1 y c=-4 la fórmula $f(x)=x^2 - 4$. El buen desempeño de los estudiantes se logró debido a que por la actividad previa podían relacionar la expresión algebraica con la gráfica de las parábolas. En este caso, interpretan adecuadamente los parámetros y el efecto en su representación gráfica, pues determinan que los puntos de corte en el eje $\mathbf{x}$ están definidos por las coordenadas (-2,0) y (2,0), además se observa la formulación apropiada que tiene que ver con el cálculo de los ceros de la función, quienes enuncian que si se reemplazan los dos valores x=-2 y x=2 en la fórmula de la función, el resultado es cero y esto es lo que define los puntos de corte con el eje $\mathbf{x}$. Cuando acuden a esta interpretación de los ceros de la función los estudiantes están relacionando conceptos anteriores que fueron trabajados previamente de manera procedimental con la docente y ahora están en la capacidad de relacionarlo con la interpretación gráfica de la familia de funciones.

Para establecer la formulación general de los casos en los cuales las funciones de la forma $f(x)=ax^2 + c$ cortan el eje $\mathbf{x}$ (literal d – Situación 2), los estudiantes logran enunciar la generalidad con criterios validos simples, definiéndolos en términos de que las parábolas cortan el eje $\mathbf{x}$ cuando ocurre que a>0 y c<0, también si a<0 y c>0, es decir cuando los parámetros poseen signos opuestos, que es una afirmación correcta. Sin embargo, en este caso sólo cinco estudiantes tienen en cuenta el punto de corte cuando el valor de c=0, y por tanto cuando el punto de corte de la parábola con el eje **x** es el origen del plano cartesiano.

En consecuencia, aunque los estudiantes determinaron la expresión algebraica de la familia de funciones correctamente y definieron correctamente la existencia de los ceros de función y su relación con los puntos de corte en el eje **x**, obviaron el caso en que c=0, debido a que en ese caso no existe desplazamiento de parábola y ellos se concentraron más en esta cualidad visual.

Situación de prueba o de validación social: Para realizar esta fase se propone a los grupos conformados en cada fila de la sala de apoyo escribir la expresión algebraica de funciones que conforman la familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x)=ax^2+c$ y luego representarlas gráficamente (literal a – Sección Concluye, Situación 2), anticipando lo que ocurrirá al registrar la información y exportarla como imagen en el archivo gráfico.

El desarrollo de esta actividad para los estudiantes implica una participación más activa y de más cooperación entre pares, pues ellos logran intercambiar las afirmaciones y refutaciones para visualizar el resultado de sus construcciones. Es interesante la relación medio/mensajes porque el uso del software Geogebra les permite rápidamente validar sus aserciones de manera eficaz, aprobando a quienes tienen razón y poniendo en desequilibrio a los que hicieron aportes incorrectos.

Figura 15. Fase de prueba. Aplicación de la Situación 2. 24 de Febrero de 2014

Aquí los estudiantes revisan lo que ya habían consolidado en las fases de acción y de formulación (ver Figura 15) y relacionan con nuevos conceptos donde surgen propiedades que sirven para proponer nuevas cuestiones que le dan validez a la solución planteada.

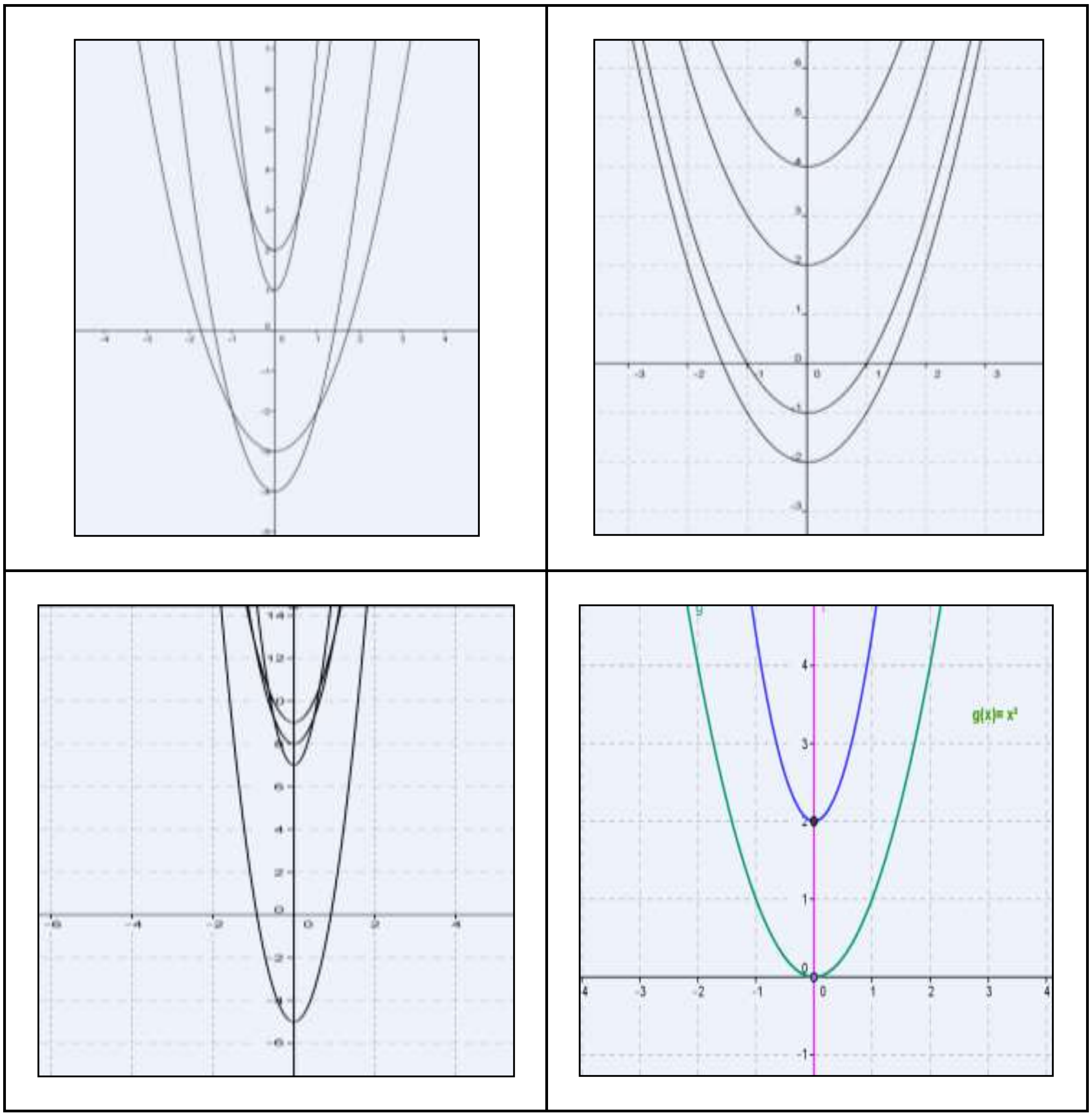


Figura 16. Registros de la respuesta al literal a. Sección *Concluye*. Situación 2. Estudiantes filas 2, 5, 6, 7

Al retomar los resultados de la fase de acción los estudiantes tienen en cuenta el efecto que también produce el parámetro “a” y la relación con el parámetro “c”, característica que se relaciona con el propósito de esta actividad. De aquí se obtienen dos tendencias (ver Figura 16), en la primera los estudiantes fijan el valor para el parámetro “a” y varían el de “c”, por ello obtienen gráficas que siguen el orden de una familia de funciones de la forma $f(x)=a\,x^2+c$, de tal manera que la representación gráfica permite visualizar el efecto del parámetro “c”, ya sea porque se hizo en una nueva ventana del software o usando el Applet 2.

La otra tendencia se dio cuando los estudiantes varían tanto el parámetro “a” como el parámetro “c”, aquí se puede observar que existe regularidad en la abertura, en tanto que todas las parábolas abren hacia arriba, pero establecen relación con su amplitud. Aún así los estudiantes logran representar correctamente lo que se propuso principalmente, que consistió en la variación del parámetro “c”.

Los estudiantes lograron a través de la representación gráfica del conjunto de funciones dar validez a lo que habían anticipado como efecto que produciría la variación del parámetro “c”, de tal manera que quedó registrado la forma como las parábolas además de conservar su abertura se desplazan verticalmente sobre el eje $\mathbf{y}$, hacia arriba o hacia abajo según el valor de “c”.

Por otra parte, Se encuentran dos resultados no esperados (ver Figura 17), en los cuales a pesar de representar el cambio en el parámetro “c”, no logran representar la regularidad para el parámetro “a”, en este caso los estudiantes sólo se concentran en los desplazamientos verticales de las parábolas y no tienen en cuenta el efecto que producía la variación del parámetro “a”, lo que limita las herramientas de visualización en el momento de institucionalizar los conceptos estudiados.

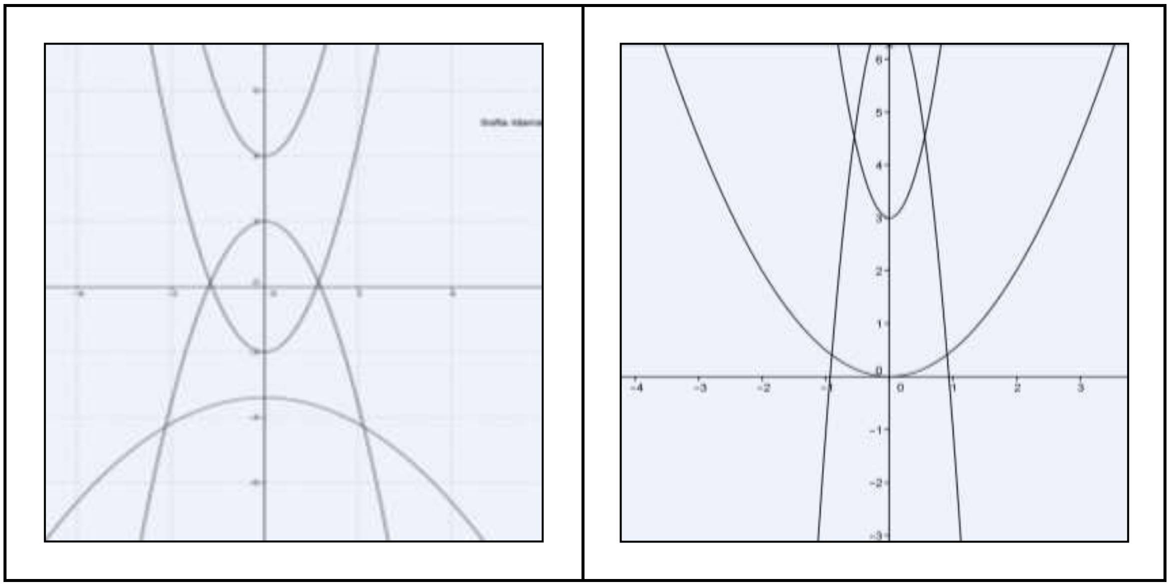


Figura 17. Registros respuestas no esperadas al literal a. Sección *Concluye*. Situación 2. Estudiantes filas 1 y 3

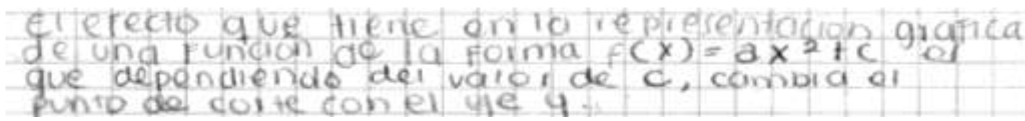
En este caso, la docente intervendrá con cuestionamientos para brindar elementos de reflexión y que los estudiantes elaboren mejores argumentos en la fase siguiente.

Institucionalización

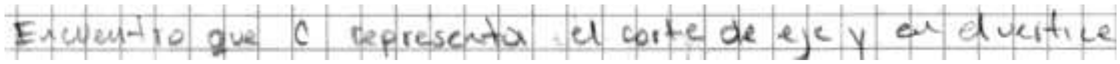
Los estudiantes realizan un proceso de construcción de saberes que se favorece desde que inicia la manipulación del Applet 2 - Situación 2, la fase de acción y posteriormente logran la formalización del parámetro “a”, ampliando su aprendizaje al movilizar los conceptos e incorporando un nuevo concepto como es el del parámetro “c” y sus propiedades gráficas.

Para concluir la Situación 2, los estudiantes están en la capacidad de determinar cuál es el efecto producido en las funciones por el parámetro “c”, y lo logran relacionar con el desplazamiento vertical de la parábola sobre el eje $\mathbf{y}$ con la coordenada del vértice en una situación general como es la familia de funciones cuadráticas de forma $f(x)=a\,x^2 + c$.

Los efectos que tiene la representación gráficas de esta función son de acuerdo a "c", el intercepto con el eje "y" ya que es (0,c) y el movimiento de la parábola de acuerdo a su signo, positivo o negativo.



El efecto que tiene en la representación gráfica de una función de la forma $f(x)=ax^2 + c$ es que dependiendo del valor de c, cambia el punto de corte con el eje y.



Encuentro que c representa el corte de eje y en el vértice.

Figura 18. Respuestas al literal b. Sección *Concluye*. Situación 2. Estudiantes 6, 10 y 16

Aunque se observa más precisión en unos enunciados que en otros (ver Figura 18), se determina que en general los estudiantes formalizan la propiedad del parámetro "c" al indicar el desplazamiento vertical sobre el eje $\mathbf{y}$ y la definición de la coordenada del vértice (0,c).

En la prueba diagnóstica se observó que para la pregunta 3, siete estudiantes eligen la respuesta correcta (opción e) que relaciona el punto de corte en el eje $\mathbf{y}$ de la función $f(x) = x^2 + 2x + c$ en el punto (0,c), cuatro de ellos eligen la opción a interpretando incorrectamente el corte con el eje $\mathbf{x}$, tres de ellos seleccionan la opción d, donde erróneamente eligen el punto de corte de coordenadas (c,0) y un estudiante no responde. En la pregunta 6 se le solicita a los estudiantes trazar gráficas de funciones de la familia $f(x) = ax^2 + 2$, en este caso seis estudiantes grafican sólo una parábola fijando el valor para a=1, tres representan correctamente tres gráficas que corresponden a la familia de funciones y los demás no resuelven la pregunta.

En relación con la aplicación de la evaluación, que se hace como parte de la fase de institucionalización, se tiene que los numerales 3 y 6 (ver Anexo F) son los que están relacionados con esta parte. Para el numeral 3 se observa que 14 estudiantes responden correctamente eligiendo la opción de respuesta d y argumentan que al reemplazar el valor de x=0 el valor de y=c, por tanto este es el corte en el eje $\mathbf{y}$, finalmente dos estudiantes no logran resolver correctamente esta pregunta.

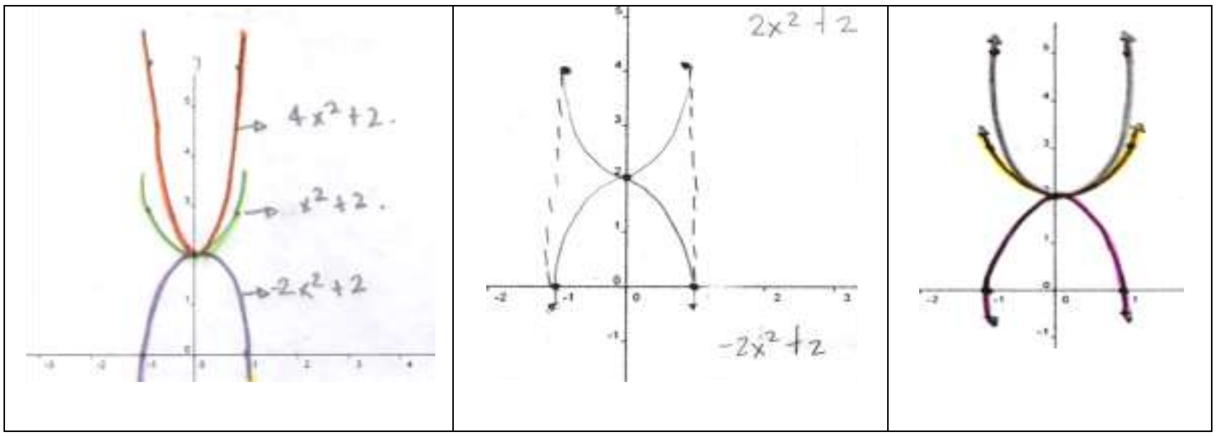


Figura 19. Respuesta al numeral 6 de la Evaluación. Estudiantes 6, 10 y 13.

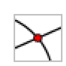
En el numeral 6 se evidencia una construcción apropiada de las gráficas de la familia de funciones por parte de todos los estudiantes (ver Figura 19), quienes grafican correctamente el vértice de las parábolas en el punto (0,2) y realizan gráficas que tienen el valor del parámetro “a” con signos positivos y negativos, lo que demuestra el uso e interpretación del parámetro “a” generalizado, pudiendo expresar desde lo variacional casos particulares. Una observación importante que subyace a estas respuestas es que a pesar de que los estudiantes no utilizaron el software para la graficación, sus gráficas construidas a lápiz y papel están representadas correctamente. Por tanto, se infiere que no existe dependencia del uso de la herramienta tecnológica para interpretar el efecto gráfico de los parámetros que intervienen en la expresión algebraica.

4.3 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 3: Familias de funciones cuadráticas según puntos de corte en el eje x.

Esta situación didáctica (ver Anexo E) tiene como propósito determinar a partir del registro gráfico de una familia de funciones cuadráticas y de sus puntos de corte en el eje **x** la expresión algebraica general que representa las funciones cuadráticas asociadas a la familia de funciones de la forma f(x) = a (x-1) (x+1), escrita de manera factorizada o su equivalente f(x)= a (x^2 -1).

Las situaciones 3 y 4 se trabajaron en una sesión diferente, para las cuales los estudiantes llegaron entusiasmados y mostraron interés por desarrollar las actividades, esto debido a que ya tenían más confianza con el manejo de los applets y tenían curiosidad por conocer de qué se trataban las siguientes situaciones.

Situación de acción: a partir de la visualización de las gráficas del Applet 3, los estudiantes deben determinar cuáles son los puntos de corte con el eje **x** de las parábolas (literal a – Situación 3).

Esta actividad fue resuelta por los estudiantes con gran facilidad, quienes utilizaron diferentes estrategias de solución, algunos determinaron los puntos de corte con el eje **x** de las gráficas basándose sólo en la visualización y ubicación de coordenadas en el plano cartesiano, otros estudiantes recurrieron al uso de herramientas del software tales como *Intersección de dos objetos*  (entre la parábola y el eje **x**) y a su vez utilizaron la información que se registra en la ventana algebraica donde se verifican las coordenadas de los puntos (-1,0) y (1, 0).

Se presentaron dos casos de soluciones no esperados, quienes escribieron las coordenadas asignando el valor de la coordenada **x** a **y** y viceversa, por tanto determinaron erróneamente las coordenadas del punto de corte con el eje **x** (0, -1) y (0, 1). De esta manera, se observa que la mayoría de estudiantes intercambiaron informaciones y acciones, que les permitieron dar solución correcta a la actividad, además optimizaron sus respuestas basándose en la interacción con el software.

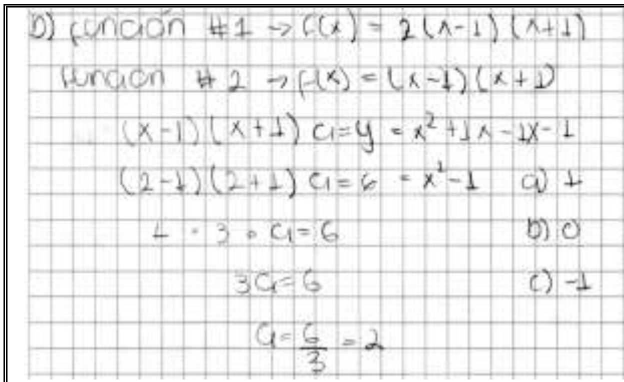
Situación de formulación: en esta fase se propone pasar del registro gráfico al registro algebraico de tal manera que los estudiantes formulen la expresión algebraica de por lo menos dos funciones que hacen parte de la familia de funciones de la forma f(x) = a (x-1) (x+1) representada gráficamente.

En el desarrollo que realizan los estudiantes de esta actividad se observa cómo se hace explicito pasar de una formulación en lenguaje natural a un enunciado formal. Los estudiantes utilizan modos de control propios distinguiendo diferentes estrategias de solución en las cuales se presentan, por una parte se presentan los que relacionan la propiedad de que si x = 1 ó x = -1 entonces el valor de y=0, con esta formulación determinan entonces que una de las funciones será f(x) = (x-1)(x+1) y las otras resultarán de aplicar un factor a la expresión algebraica de esta función. Por otra parte, se encuentran los estudiantes que se basan en la observación y construyen la fórmula aplicando las definiciones que se realizaron en el literal e de la situación 2. A partir de aquí determinan que la fórmula está relacionada con la expresión x^2 -1 y al factorizar se obtiene (x-1)(x+1) (ver Figura 20).

b) F(x) = (x-1) (x+1) f(x) = -2 (x+1) (x-1) f(x) = 2 (x+1) (x-1)	b) F(x) = (x-1)(x+1) f(x) = - 2 (x+1)(x-1) f(x) = 2 (x+1)(x-1)
b. • F(x) = (x-1) (x+1) • g(x) = 2 (x+1) (x-1)	b. · F(x)= (x-1)(x+1) · g(x)= 2 (x+1)(x-1)

Figura 20. Respuesta al literal b de la Situación 3. Estudiantes 1 y 2.

Una estrategia de solución diferente que se observó es que los estudiantes recurrieron a otro recurso (el manejo algebraico de variables) en la actividad matemática, lo que requiere elementos más abstractos pero que les permite establecer modos de control que validan la información interpretada del sistema gráfico. En este caso, los estudiantes realizan equivalencias fijando un valor que pertenece a una de las gráficas, la coordenada (2,6), reconociendo la generalidad de la expresión algebraica proceden a reemplazar en la ecuación de tal manera que calculan un valor específico para el parámetro “a” (ver Figura 21) y así determinan otra expresión para una de las funciones asociadas a la familia de funciones cuadráticas.



b) función #1 → f(x) = 2(x-1)(x+1)
función #2 → f(x) = (x-1)(x+1)

$(x-1)(x+1)a = y = x^2 + 1x - 1x - 1$

$(2-1)(2+1)a = 6 = x^2 - 1$ a) 1
$1 \cdot 3 \cdot a = 6$ b) 0
$3a = 6$ c) -1

$a = \frac{6}{3} = 2$

Figura 21. Respuesta al literal b de la Situación 3. Estudiante 14

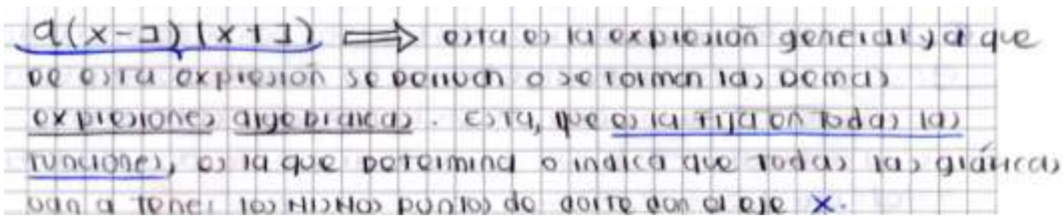
Adicionalmente determinan que los valores de los parámetros “a”, “b” y “c” en la expresión general cuando tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ son a = 1, b = 0 y c = -1, que corresponde a otro tipo de formulación, pero que conlleva a un resultado correcto. Para esta clase de solución se observa que los estudiantes han relacionado conceptos anteriores, como son el uso de la propiedad distributiva, el reemplazo y cálculo de valores numéricos en expresiones algebraicas.

Situación de prueba o de validación social: en esta fase se propone validar la formulación definida para dar solución a la actividad del literal b - Situación 3. Teniendo en cuenta lo descrito en la fase de formulación para esta misma situación, se observó que la validación social que realizaron los estudiantes estuvo orientada desde diferentes procedimientos, y no todos recurrieron a la verificación por medio del software Geogebra, aunque si retomaron los elementos fundamentales para dar solución a la actividad.

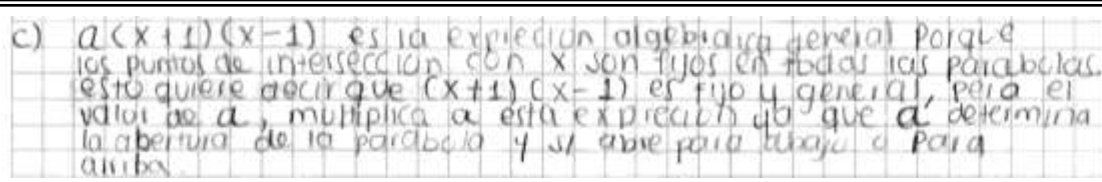
De esta forma, algunos estudiantes optaron por utilizar los saberes ya construidos a partir de la Situación 2, como aplicar la formulación según el criterio que sí un punto es corte con el eje $\mathbf{x}$ la coordenada $\mathbf{y}$ debe ser cero. También relacionaron concepciones anteriores y preguntas acerca de nuevos conceptos, lo que les permitió proponer nuevas cuestiones y determinar las expresiones algebraicas para algunas de las funciones asociadas a la familia de funciones cuadráticas y hasta hacer acercamientos muy próximos a la institucionalización de conocimientos.

Institucionalización: esta fase consiste en determinar la expresión algebraica general que representa las funciones cuadráticas asociadas a la familia de funciones representada gráficamente, literal c – Situación 3 (Ver Anexo E).

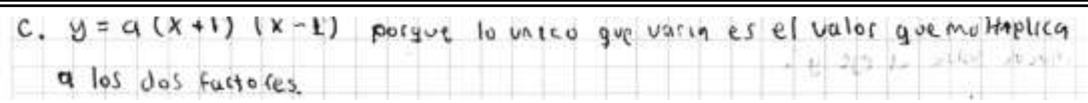
Con base en las soluciones efectuadas en la fase de formulación los estudiantes proceden a determinar en su más completa forma la expresión general que representa a la familia de funciones cuadráticas, se observa cómo a partir de la construcción de casos particulares ya validados, los estudiantes formalizan la información que ya habían determinado, logrando expresar en un lenguaje formal analítico sus respuestas (ver Figura 22).



a(x-1)(x+1) ⇒ esta es la expresión general ya que De esta expresión se Derivan o se forman las Demás expresiones algebraicas. Esta, que es la fija en todas las funciones, es la que Determina o indica que todas las gráficas van a tener los mismos puntos de corte en el eje x.



c) a (x+1) (x-1) es la exprecion [*sic*] algebraica general porque los puntos de intersección con x son fijos en todas las parábolas esto quiere decir que (x+1)(x-1) es fijo y general, pero el valor de a, multiplica a esta exprecion [sic] ya que a determina la abertura de la parábola y si abre para abajo o para arriba.



c. y=a (x+1) (x-1) porque lo único que varia es el valor que multiplica a los dos factores.

Figura 22. Respuesta al literal c de la Situación 3. Estudiantes 15, 16 y 2.

En las formulaciones de los estudiantes se observa además el recurso de las construcciones realizadas en las situaciones 1 y 2, y se pudo determinar cómo ellos relacionan concepciones anteriores con los nuevos conceptos, pues enuncian la propiedad de las funciones cuadráticas en relación con sus puntos de corte con el eje **x**, y también tienen la capacidad de generalizar la propiedad de la abertura de las parábolas en relación con la variación del parámetro “a” (ver Figura 22).

Existen otras definiciones más concretas pero que cumplen con la solución correcta de la actividad y se observan dos casos no esperados en los que los estudiantes no logran determinar la expresión algebraica general y no escriben ninguna respuesta. En estos casos fue necesario que interviniera la docente para hacer el proceso de “devolución” y finalmente contribuir a la construcción de la expresión algebraica que representaba la familia de funciones de la actividad por parte de los estudiantes.

En la Evaluación que corresponde a la segunda parte de la fase de institucionalización de la situación didáctica, se plantea que en los numerales 2 y 4 de la Evaluación (ver Anexo F), los estudiantes deben aplicar la conceptualización realizada en relación con una familia de funciones cuadráticas y los ceros que pertenecen a las funciones.

En la pregunta 2 con respuestas de opción múltiple, se obtiene que todos los estudiantes eligen el literal a que corresponde a la respuesta correcta. Los estudiantes justifican sus respuestas indicando que por ser los puntos de corte (1,0) y (-1,0), entonces la expresión general está representada de la forma $y= a(x+1)(x-1) = a(x^2-1)$, y la única opción que relaciona expresiones cuando “a” toma valores fijos que son a=4, a=1 y a=2, es la opción de respuesta a.

El numeral 4 propone una evaluación abierta en la que los estudiantes deben determinar cuál es la expresión algebraica general que representa las funciones cuadráticas asociadas a las gráficas. En este caso determinan los puntos de corte en el eje $\mathbf{x}$ con coordenadas (-2,0) y (2,0), de aquí definen que la ecuación debe tener la forma $y=(x-2)(x+2)$ para que satisfaga los ceros de la función. Posteriormente generalizan la expresión algebraica definiendo el parámetro “a”, que es el que determina la abertura de las parábolas hacia arriba y hacia abajo, con ello concluyen que la expresión que representa la familia de funciones cuadráticas es $y= a(x-2)(x+2) = a(x^2-4)$.

En contraste, cuando se aplicó la prueba diagnóstica se obtiene que para el numeral 2, seis estudiantes no respondieron la pregunta, cinco lo hicieron correctamente, cuatro eligen la opción de respuesta a y un estudiante la opción e, haciendo una elección incorrecta. De aquí se infiere que al presentar la prueba diagnóstica los estudiantes no tenían la conceptualización para dar respuesta correcta a la pregunta y determinar expresiones de funciones de acuerdo con los puntos de corte en el eje $\mathbf{x}$. Además seis de ellos no lograron emitir ningún juicio y por tanto no seleccionaron ninguna respuesta. En esta misma prueba, en el numeral 4 se evidencia que los estudiantes pueden describir propiedades de la familia de funciones como son determinar las coordenadas de los puntos de corte en el eje $\mathbf{x}$ y el comportamiento de las parábolas en relación con su abertura, pero ninguno logra determinar la expresión algebraica general que representa la familia de funciones, por último existe un caso donde el estudiante establece relaciones con la expresión de una función lineal, una dificultad muy particular.

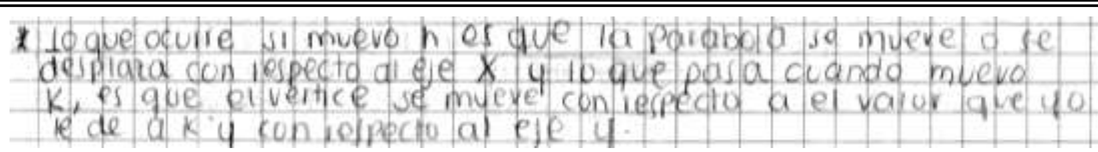
4.4 Análisis de los resultados de la Situación Didáctica 4: Desplazamiento de la gráfica de $f(x) = ax^2$. Funciones de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Para llevar a cabo esta situación didáctica es necesario tener en cuenta que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(b \neq 0)$ es la misma que la función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ que se obtiene aplicando la factorización completando el cuadrado, para determinados números reales “h” y “k”.

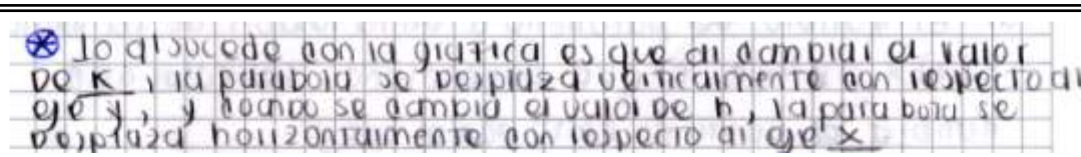
Se debe tener en cuenta que la gráfica de esta función $f(x) = a(x - h)^2 + k$, se puede obtener a partir de la gráfica de $f(x) = ax^2$, mediante un desplazamiento horizontal y uno vertical. Primero, se obtiene la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2$ desplazando la parábola que representa a la función $f(x) = ax^2$ ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo del signo de “h”. A continuación se traslada esta gráfica verticalmente hacia arriba o hacia abajo, a una distancia “k” dependiendo de su signo.

En esta situación didáctica se espera que los estudiantes formalicen e interpreten los parámetros que intervienen en una expresión algebraica que representa una familia de funciones cuadráticas, articulando diferentes sistemas de representación (gráfico, verbal y algebraico), y coordinando diferentes efectos que puede producir la variación de estos parámetros, tales como los desplazamientos verticales y horizontales de una parábola en relación con la función $f(x) = a\,x^2$.

Situación de acción: En esta fase se plantea utilizar el Applet 4, y dejar fijo el valor del parámetro a=1, cambiar los valores de los parámetros “h” y “k” mediante los deslizadores y observar que sucede con la gráfica y su expresión algebraica. Con la manipulación del Applet 4, se observó que los estudiantes visualizaron con facilidad los efectos producidos en las gráficas al cambiar los valores de “h” y “k”, por ello lograron hacer descripciones específicas de lo que ocurría en los desplazamientos de las gráficas recurriendo a características muy visuales como son los movimientos o desplazamientos de las gráficas (ver Figura 23).



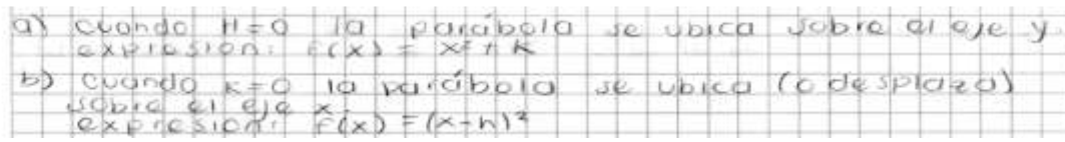
* lo que ocurre si muevo h es que la parábola se mueve o se desplaza con respecto al eje x y lo que pasa cuando muevo k, es que el vértice se mueve con respecto a el valor que yo le de a k y con respecto al eje y.



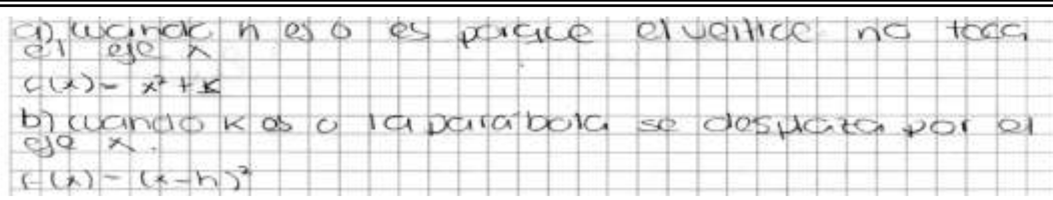
* Lo que sucede con la gráfica es que al cambiar el valor de <u>k,</u> la parábola se desplaza verticalmente con respecto al eje y, y cuando se cambia el valor de h, la parábola se desplaza horizontalmente con respecto al eje <u>x</u>.

Figura 23. Respuesta a la introducción de la Situación 4. Estudiantes 13 y 15.

Posteriormente los estudiantes expresan sus opiniones y sus decisiones con base en las acciones sobre el medio, la manipulación del Applet 4 y las manifiestan en las estrategias de solución, en este caso se observa que son capaces de establecer la expresión que se relacionaba con los valores fijados para el parámetro “h” y “k” (ver Figura 24).


a) cuando H=0 la parabola se ubica sobre el eje y.
expresion: $f(x) = x^2 + k$
b) cuando k=0 la parabola se ubica (o desplaza) sobre el eje x.
expresion: $f(x) = (x-h)^2$

a) Cuando H=0 la parábola se ubica sobre eje y.
   Expresión: $f(x)= x^2 + k$
b) Cuando k=0 la parábola se ubica (o se desplaza) sobre el eje y.
   Expresión: $f(x)= (x-h)^2$


a) cuando h es 0 es porque el vertice no toca el eje x
$f(x) = x^2 + k$
b) cuando k es 0 la parabola se desplaza por el eje x.
$f(x) = (x-h)^2$

a) Cuando h es 0 es porque el vértice no toca el eje x.
   $f(x) = x^2 +k$
b) cuando k es 0 la parábola se desplaza por el eje x.
   $f(x)= (x-h)^2$

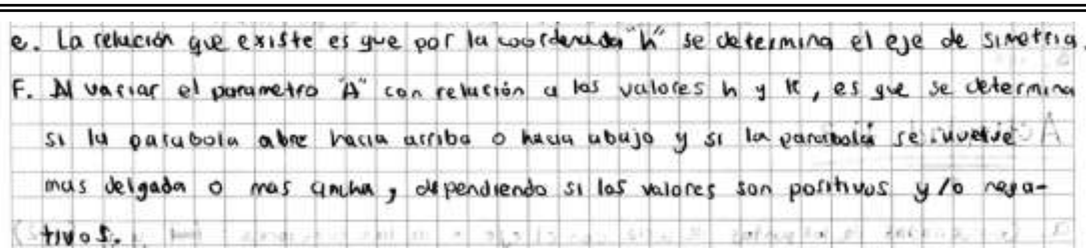
Figura 24. Respuesta a los literales a y b - Situación 4. Estudiantes 5 y 13.

Situación de formulación: esta fase consiste en determinar las propiedades de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a (x – h)^2 + k$ y su relación con la variación de los valores de “h” y “k”. En el literal c se deben determinar las coordenadas del vértice y la correspondencia con los valores de “h” y “k”. En el literal d se deben definir las condiciones en las que existen los puntos de corte con el eje **x**, al hacer variar los parámetros “h” y “k”. En el literal f se debe establecer lo que sucede al hacer variar el parámetro “a” en relación con los valores de “h” y “k”.

Los estudiantes se apoyan en la herramienta del applet, la casilla de control que indica los valores del vértice, de acuerdo con los valores que se definen en el deslizador para “h” y “k”. Aquí los estudiantes utilizan la estrategia de visualizar el movimiento de la gráfica en el plano cartesiano y verificar los valores según aparecen en la casilla de control. Tomando como referencia valores particulares para los parámetros “h” y “k” los estudiantes proceden a enunciar de manera general que la relación del vértice con los valores de h y k, se refiere a la pareja ordenada (h,k).

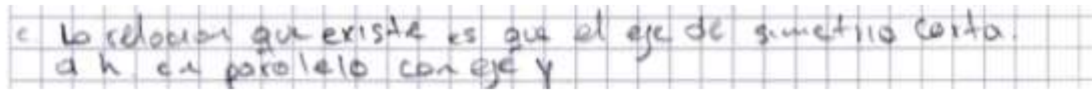
En el literal d, se observó que los estudiantes no lograron dar respuestas con enunciados completos a la relación de los valores que toman h y k, y los puntos de corte en el eje x, en este caso no se logró cambiar la incertidumbre del medio y en general de su estado, puesto que la mayoría de los estudiantes coinciden en que la variación de h y k no influyen en determinar si las funciones tienen o no puntos de cortes con el eje x. Esta propiedad será tratada en la fase de institucionalización donde interviene la docente para clarificar los conceptos.

Al determinar la relación que existe entre el eje de simetría de la parábola y los valores de h y k, se observó que la información fue correctamente utilizada al igual que los recursos del Applet 4, donde se evidencia el manejo de los deslizadores y de las casillas de control, de manera articulada y se formula la propiedad correctamente (ver Figura 25).


e. La relación que existe es que por la coordenada "h" se determina el eje de simetria.
F. Al variar el parametro "A" con relación a los valores h y k, es que se determina si la parabola abre hacia arriba o hacia abajo y si la parabola se vuelve mas delgada o mas ancha, dependiendo si los valores son positivos y/o nega-tivos.

e. La relación que existe es que por la coordenada “h” se determina el eje de simetría.

f. Al hacer variar el parámetro “A” con relación a los valores h y k, es que se determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo y si la parábola se vuelve más delgada o más ancha, dependiendo si los valores son positivos y/o negativos.



e. La relación que existe es que el eje de simetría corta a h en paralelo con eje y.

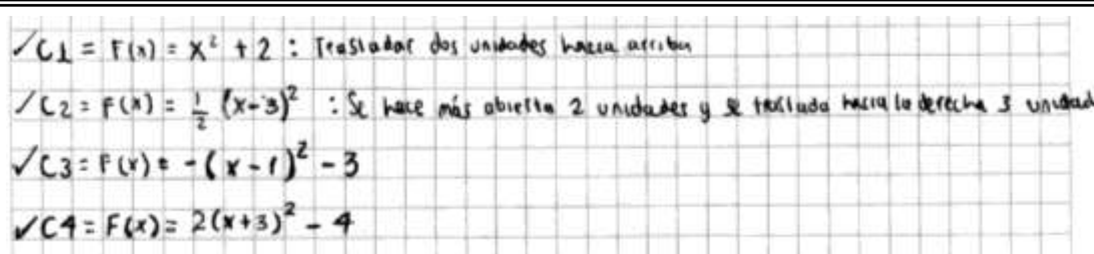
Figura 25. Respuesta a los literales e y f - Situación 4. Estudiantes 2 y 11.

Se verifica la propiedad del parámetro a, los estudiantes establecen correctamente el efecto de la variación de a en las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$, y a su vez pueden interpretar cómo influye la variación de los parámetros “h” y “k” en las gráficas de las funciones.

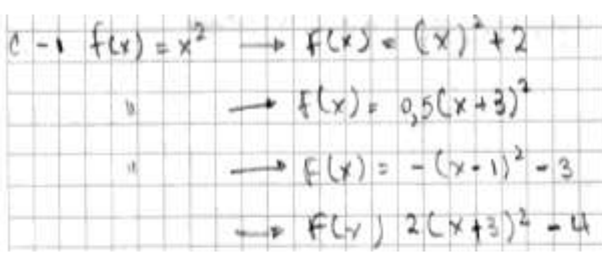
Situación de prueba o de validación social: Con base en lo que los estudiantes han formulado en la fase anterior, se espera que se apliquen desplazamientos verticales y horizontales interpretando la variación de “h” y “k”. Para ello se dispone de las herramientas del software Geogebra presentando los desplazamientos en el registro verbal de una función cuadrática determinada, se propone que los estudiantes determinen en el sistema algebraico la ecuación de la gráfica resultante expresada en la forma $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$.

Inicialmente los estudiantes intercambian opiniones y se observa que hay dificultad al definir las expresiones algebraicas, sus estrategias de solución se basan en primera instancia en hacer pruebas de fórmulas guiándose solo por algunos valores específicos que se mencionan en el enunciado, pero esta estrategia rápidamente causa negaciones y refutaciones pues al realizar la comprobación con lo que se requiere se dan cuenta que el procedimiento no satisface una solución correcta para la actividad. El medio pone resistencia a la validez de las estrategias utilizadas lo que exige a los estudiantes buscar otras formas de solución para desarrollar acertadamente la actividad.

Posteriormente, después de debatir en los grupos de trabajo, los estudiantes retoman las formulaciones definidas en la fase anterior y relacionan los valores de los parámetros a, h y k con los desplazamientos que se describen, de esta forma articulan los sistemas de representación gráfico, algebraico y verbal, y proponen nuevas expresiones como solución a la situación. Utilizan el comando *Entrada* del software y verifican sus respuestas, comprobando que la expresión algebraica si corresponde a lo que se requería. Para este momento el medio se utiliza como recurso de validación y demostración (ver Figura 26).


✓C1 = F(x) = $x^2 + 2$: Trasladar dos unidades hacia arriba
✓C2 = F(x) = $\frac{1}{2}(x-3)^2$: Se hace más abierta 2 unidades y se traslada hacia la derecha 3 unidades
✓C3 = F(x) = $-(x-1)^2 - 3$
✓C4 = F(x) = $2(x+3)^2 - 4$

- ✓ C1 = F(x) = + 2 : Trasladar dos unidades hacia arriba.
- ✓ C2 = F(x) = $\frac{1}{2}$ (x-3)^2 : Se hace más abierta 2 unidades y se traslada hacia la derecha 3 unidades.
- ✓ C3 = F(x) = - (x-1)^2 -3
- ✓ C4 = F(x) = 2 (x+3) ^{2} - 4


C - 1 $f(x) = x^2 \rightarrow f(x) = (x)^2 + 2$
" $\rightarrow f(x) = 0,5(x+3)^2$
" $\rightarrow f(x) = -(x-1)^2 - 3$
$\rightarrow f(x)\ 2(x+3)^2 - 4$

C -1 f(x) = x^2 → f(x) = (x)^2 + 2

” → f(x) = 0,5 (x+3)^2

” → f(x) = - (x-1)^2 - 3

” → f(x) = 2 (x+3)^2 - 4

Figura 26.Respuesta al literal a. Sección *Concluye* - Situación 4. Estudiantes 2 y 11.

Institucionalización: esta fase se aborda en los literales b y c donde se propone formalizar las propiedades de las gráficas desde la representación simbólica general de la familia de funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Los estudiantes retoman la definición que se tenía acerca del parámetro c y lo contrastan con el efecto que produce la variación del parámetro “k”, de aquí deducen que el signo de “k” determina si la parábola se traslada hacia arriba o hacia abajo. Posteriormente, ante el manejo del Applet 4 y la solución de la actividad en la fase de validación, los estudiantes determinan correctamente que el desplazamiento de la gráfica de $f(x) = ax^2$ ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda depende del signo que tenga el parámetro “h”.

De aquí también se institucionaliza el concepto del vértice de la familia de funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, pues todos identifican apropiadamente que el vértice de las parábolas tiene como coordenadas las componentes (h, k).

En relación con la fase de la institucionalización mediante la Evaluación, se tiene en el numeral 5 la aplicación de la construcción realizada en el desarrollo del diseño didáctico. Consiste en determinar la ecuación de la gráfica resultante si la función cuadrática $f(x)=2x^2$**,** se traslada 3 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia abajo. Se observa que los estudiantes interpretan cada parámetro que interviene en la expresión algebraica y pasan de la descripción verbal al sistema algebraico, representando apropiadamente los desplazamientos, en las argumentaciones predominan aquellas donde se define que si la función se traslada 3 unidades a la izquierda, este desplazamiento se representa con el valor de h igual a tres positivo, y que por trasladarse 4 unidades hacia abajo, el valor del parámetro que lo representa es “k” igual a menos 4. Por lo tanto, los estudiantes proceden a elegir la respuesta correcta que corresponde a la opción c.

Por último, en el numeral 7 de la Evaluación se requiere aplicar las construcciones de las situaciones didácticas y la interpretación de los parámetros “a” y “c”, “h” y “k” de acuerdo con las familias de funciones cuadráticas relacionadas.

Se observa que los estudiantes determinan adecuadamente las expresiones algebraicas que dan solución a las preguntas del problema planteado. Logran definir apropiadamente la variación del parámetro y expresarlo en el registro algebraico, utilizando las variables según el contexto que relacionaba la energía cinética de un cuerpo en función de la velocidad, con valores de la masa fijos, reducidos a la mitad o duplicados (ver Anexo F).

En contraste con la aplicación de la prueba diagnóstica, en el numeral 5, se obtiene que cinco estudiantes no responden la pregunta, cinco responden correctamente y seis eligen la opción de respuesta b, lo que muestra que 11 estudiantes no interpretan el efecto de los parámetros en las gráficas de una familia de funciones cuadráticas y no logran determinar la expresión algebraica que corresponde a los desplazamientos descritos. Como la expresión que tuvo una tendencia errónea es $y = 2x^2 + 3x - 4$, puede inferirse que los estudiantes relacionan el desplazamiento hacia la izquierda con el valor del coeficiente 3 de la **x** y el desplazamiento hacia abajo con el valor independiente de c = -4. Vale la pena aclarar que en el momento de la aplicación de la prueba diagnóstica los estudiantes habían estudiado la función cuadrática utilizando la representación algebraica de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y no se había estudiado su equivalente $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

5. CONCLUSIONES

En este último capítulo, se presentan las consideraciones generales determinadas en relación, tanto con la hipótesis del trabajo y los objetivos planteados, como con la pregunta de investigación. También, se realizan recomendaciones a tener en cuenta para futuras investigaciones relacionadas con este estudio.

La hipótesis plantea que el diseño didáctico desarrollado con base en la Teoría de Situaciones Didácticas favorece el cambio en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas. Para este trabajo, el diseño didáctico además incorporó herramientas TIC, específicamente el uso del software Geogebra con el cual se diseñaron applets que facilitaron el medio de experimentación e interacción y desarrollo del diseño.

Como objetivo general se propone identificar y caracterizar los cambios que se producen en el aprendizaje de las familias de funciones cuadráticas en estudiantes de grado Noveno, implementando situaciones didácticas de enseñanza con el software Geogebra, para favorecer la movilización de este concepto. A su vez este objetivo general se desglosa en cuatro objetivos específicos que aportan al propósito general de la investigación. En este trabajo el contraste de una prueba diagnóstica y la fase de institucionalización permite observar en qué medida se favoreció la movilización de saberes asociados con la variación de parámetros y las familias de funciones cuadráticas.

En relación con la hipótesis del trabajo se pudo constatar que para llevar a cabo intervenciones en el aula, tales como la implementación de un diseño didáctico que favorezca el aprendizaje de nuevos conceptos, en particular de las familias de funciones cuadráticas, se debe considerar que el estudiante aprende interactuando con un medio que sea factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, a través de interacciones sociales y culturales. El saber por tanto se manifiesta por construcciones nuevas en ese medio que son la prueba de su aprendizaje.

Como lo expone Brousseau (1986): “un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir en el estudiante todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera”, por tanto no es conveniente proponer una enseñanza limitada a los deseos del maestro ya que resulta carente de todo sentido e interés para los estudiantes. Con el diseño didáctico se pudo observar que las interacciones con el medio, basadas en intenciones didácticas para que los estudiantes produzcan respuestas personales o grupales a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio, resulta ser una experiencia fundamental para que construyan sus conocimientos y los institucionalicen en saberes. Por ende se hace necesario construir diseños didácticos para intervenir en el aula, con un medio bien pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica.

De aquí que la intencionalidad del diseño se basó en la reflexión y un análisis previo para proponer situaciones de enseñanza completas que se estructuraron con las cuatro fases planteadas en la Teoría de Situaciones Didácticas, esto brindó la posibilidad a los estudiantes de poner en juego herramientas y recursos de validación propios de la actividad matemática. También se consideró la importancia de seleccionar, adaptar y proponer a los estudiantes situaciones didácticas que fueron acertadas en la medida que se llevó a cabo una prueba piloto y se logró un diseño que estuviera al alcance de los estudiantes, según su nivel. Todo ello provocó una actuación fecunda y de autonomía, donde los estudiantes asumieron los problemas como suyos y produjeron sus respuestas, en lo que se observó un alto grado de interés y de cooperación entre ellos al compartir el mismo deseo de alcanzar la verdad o las soluciones con sus propias producciones.

En cuanto a los resultados se pudo observar que, por su parte la interacción con el medio (Software Geogebra) favorece en gran medida los procesos de visualización y modelización, así mismo brinda elementos que les facilita a los estudiantes desplegar enunciados descriptivos que fortalecen la interpretación de situaciones en el sistema verbal usando el lenguaje natural, y que más adelante será útil para la construcción de enunciados en el lenguaje formal.

En el desarrollo de las situaciones didácticas se observó que la fase de validación realizada antes de la institucionalización resulta fundamental para promover cambios en el aprendizaje del concepto de parámetro y de su variación, debido a que con las formulaciones e intercambios de opiniones los estudiantes logran realizar procesos de formalización articulando los sistemas de representación verbal, gráfico y algebraico. De hecho es simular en el aula la producción de saberes tal como se hace en comunidades científicas de la sociedad, donde el proceso de prueba o validación social son aspectos fundamentales en la producción académica.

Se pudo constatar que para la fase de institucionalización la docente intervino en pocas ocasiones debido a que los estudiantes logran hacer construcciones apropiadas de su saber, y requieren muy poco de la orientación de la autoridad para verificar sus aserciones, recurren más a la organización de los saberes con base en el intercambio cultural entre pares y cuando se hicieron procesos de socialización la docente utilizó la estrategia de devolución, que consistió en devolver a los estudiantes cuestionamientos para que ellos entraran en un desequilibrio acerca de sus afirmaciones y reflexionaran sobre lo que estaban afirmando. Esta es una de las características más opuestas con el grupo control que se observó, pues en ese caso los estudiantes dependen en gran medida de la autoridad de la docente, y dependen de su aprobación para resolver las actividades lo que los muestra inseguros y muy poco autónomos.

La manipulación de las expresiones algebraicas y el sistema gráfico en el software a través de los applets aportaron herramientas muy potentes puesto que los estudiantes podían validar sus afirmaciones y en ocasiones anticiparse a construcciones de conceptos dada la magnitud de sus interacciones entre pares, con el software y con el mismo conocimiento. Por ejemplo, en la Situación 2 los estudiantes lograron a través de la representación gráfica del conjunto de funciones dar validez a lo que habían anticipado como efecto que produciría la variación del parámetro “c”, de tal manera que quedó registrada la forma como las parábolas además de conservar su abertura se desplazan verticalmente sobre el eje y, hacia arriba o hacia abajo según el valor de “c”, y así consolidar por si mismos la formalización del parámetro “c” en la expresión algebraica.

Otro hallazgo en la observación de los desarrollos de los estudiantes tiene que ver con los modos de control que utilizaron los estudiantes para realizar la construcción de saberes. Se observó que las preguntas del diseño didáctico permitieron a los estudiantes relacionar concepciones anteriores y utilizarlos como un recurso valioso en la actividad matemática, y en lo que requería elementos más abstractos para validar la información interpretada en los diferentes sistemas de representación. En contraste con el grupo control se observó que los estudiantes se encuentran limitados a la producción que se hace en el momento de la clase y no se recurre a vincular concepciones anteriores pues el interés se centra en poder dar respuesta a una serie de ejercicios con temáticas muy específicas.

En términos generales, al contrastar la fase de institucionalización comprendida en dos partes: una el cierre de cada Situación Didáctica y la Evaluación aplicada, se hace observable en el desarrollo de las cuatro Situaciones Didácticas la movilización de conceptos, pues en todos los casos se encontró un desempeño favorable para la mayoría de los estudiantes, construyendo enunciados en lenguaje formal y aplicándolo apropiadamente en las situaciones que se planteaban en la evaluación. Las herramientas de comparación determinadas por la prueba diagnóstica y las observaciones del grupo experimental en el cual se hizo el proceso de enseñanza aplicando el diseño didáctico, muestran cómo los estudiantes antes de desarrollar el diseño didáctico no tuvieron buen desempeño y no tenían los elementos para resolver completamente la prueba, posterior al proceso de intervención con las situaciones didácticas presentaron un excelente desempeño dando solución a la evaluación realizada de manera satisfactoria. En relación con el grupo control se observó una situación que contrasta en los resultados al aplicar la evaluación, pues estos no fueron favorables. Ellos entregaron preguntas sin contestar y se evidenciaron dificultades en la interpretación gráfica de las funciones, así mismo no se superó la dificultad de determinar la expresión algebraica a partir de la representación gráfica de la familia de funciones.

Estos se constituyen en hallazgos fundamentales que permiten diferenciar la movilización de saberes que se dio con el grupo experimental y verificar la hipótesis del trabajo, pues el diseño didáctico basado en la Teoría de Situaciones Didácticas logró que los estudiantes se apropiaran del aprendizaje acerca de las familias de funciones cuadráticas y de la variación de los parámetros, que actuaran, formularan, validaran informaciones y conocimientos para finalmente institucionalizar los saberes que estaban en juego.

A manera de recomendaciones se tiene:

Dada la validez y alcance de diseños didácticos basados en la Teoría de Situaciones Didácticas, es de gran importancia continuar la implementación de este tipo de diseños que aportan a procesos de aprendizaje que se fortalecen en la actividad matemática en el aula, desarrollando en los estudiantes capacidades y habilidades, seres capaces de construir saberes de manera autónoma y de interés propio.

La incorporación de las tecnologías en la educación resulta de gran importancia, ahora es posible utilizar medios interactivos con intenciones didácticas que favorezcan los procesos de visualización y formalización de los conceptos matemáticos y como aporte para desarrollar niveles de abstracción más altos. El software Geogebra en este diseño didáctico mostró la potencia y utilidad que tiene como medio de interacción, sin embargo es una de las posibilidades que existe en las TIC, ya que se encuentran otras propuestas de software educativo y calculadoras con programas que se aplican en ambientes computacionales educativos.

No se debe dejar de lado la importancia del uso del lápiz y papel, queda abierta la opción de construir diseños que abarquen también el sistema de representación tabular, en este caso sería interesante contrastar elementos de construcción usando la tecnología con el uso del lápiz y papel, teniendo en cuenta que ellos resultan complementarios y dependiendo de la situación y la intencionalidad puede ser que uno resulte más relevante que el otro, sin inferir que uno desplaza al otro.

BIBLIOGRAFÍA

Azcarate, C. y Deulofeu, J. (1999) *Funciones y gráficas*. Síntesis. Madrid.

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didática de la matemática* (Versión castellana). Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, trabajos de matemática. No.19.1993.

Brousseau, G. (1991) *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de las didácticas de las matemáticas?* Versión castellana de Luis Puig. En Enseñanza de las Ciencias. Vol. 9 N. 1. Pp. 10 – 21.

Brousseau, G; Centeno, J. (1991). *Rôle de la memóire didactique de L'enseignant*. En Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 11, n. 23, pp. 167-210. Recuperado el 1 de octubre de 2013 en http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/R%C3%B4le-m%C3%A9moire-didactique-91.pdf

Brousseau, G. (2000 a). *Education et Didactique des mathématiques* Communication au Congrès d'Aguas Calientes, Mexico Article paru en espagnol dans la revue Mexicaine « Educación matemática » Vol 12 n°1 2000 pp 5-39. Recuperado el 21 de noviembre de 2013 de http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/62/60/PDF/Mexico_2000_HAL.pdf

Brousseau, G. (2000 b) *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire*. *L'étude de l'espace et de la géométrie.* Conférence invitée au Séminaire de

Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymon (2000) et publié dans les actes Recuperado el 15 de octubre de 2013 en http://math.unipa.it/~grim/brousseau_geometrie_03.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas.* 1ª edición. Traducción Dilma Fregona. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina. Disponible en

http://books.google.com.co/books?id=SFk8xyCht2gC&pg=PA16&lpg=PA16&dq=guy+brousseau+genesis+de+las+situaciones+didacticas&source=bl&ots=AdYVT9sn5P&sig=dLUSpTFfTklOiZOaY9sp2CY36FY&hl=es&sa=X&ei=hYuWUrfqA4XqkQeixoDgCA&redir_esc=y#v=onepage&q=guy%20brousseau%20genesis%20de%20las%20situaciones%20didacticas&f=false

MEN (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Recuperado el 25 de noviembre de 2013 de http:// www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Recuperado el 15 de septiembre de 2010 de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

De Ketele, J.-M. (2005). *L'evaluation des competénces: entre reconnaissance et validation des acquis de l'experiénce*. En Actes du college. Lisbone.

Fernandez, B. (2010) Unidad didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas. Recuperado el 5 de noviembre de 2013. En http://platea.pntic.mec.es/curso20/100_tic_matematicas_iniciacion/2010/html1/index.html

Gómez, Pedro (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de Matemáticas.* En Peñas, M.;Moreno, A.; Lupiáñez, J. L. (Eds.), Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación (pp. 73-95). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/385/1/GomezP04-2781.pdf

Joya, A. (2013).Los caminos del saber. Matemáticas 9. Bogotá, Colombia. Editorial Santillana.

Kerlinger, F; Lee, H. (2002). Investigación del comportamiento. Traducido de la cuarta edición de: Foundations of behavior research. Mc Graw Hill/ Interamaericana Editores, S. A. de C.V. Mexico, D. F.

Insuasty, Emilse (2004). Dificultades de estudiantes de educación media relativas a las familias de funciones cuadráticas a través de la interpretación de parámetro. (Tesis de pregrado no publicada). Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Méndez, A. (2007). *Terminología pedagógica especifica al enfoque por competencias: El concepto de competencia*. En Innovación Educativa. N. 17. pp. 173- 184. (Versión castellana). Universidad Católica de Lovaina. Bélgica.

Perrenoud Ph. (2008) *Construir las competencias, ¿Es darle la espalda a los saberes?* Red U. Revista de Docencia Universitaria, número monográfico I. "Formación centrada en competencias (II)". Recuperado el 26 de noviembre de 2013 En http://red-u.net/redu/index.php/REDU/article/view/72/pdf

Perrenoud Ph. (2009) Enfoque por competencias ¿Una respuesta al fracaso escolar? En Sips - revista interuniversitaria de pedagogía social nº 16 - marzo 2009. pp 45-64. Recuperado el 3 de septiembre de 2013 en http://www.upo.es/revistas/index.php/pedagogia_social/article/view/34/30

Zaslavsky, O. (1997). *Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions.* Focus on Learning Problems in Mathematics, 19 (1), 20-44.

ANEXOS

Anexo A. Horarios actividades en la fase experimental.

Tabla 1. Horario de los grupos y actividad en la fase experimental

CURSO	FECHA	HORARIO	ACTIVIDAD
9C	Martes 11 de febrero Miércoles 12 febrero Martes 18 de febrero	8:00 – 9:40 1:00 – 2:30 8:00 – 9:40	PRUEBA PILOTO
9B	Viernes 14 de febrero Lunes 17 de febrero	8:50 – 9:50 7:15 – 8:50	GRUPO CONTROL: ENSEÑANZA SIN INCORPORAR TECNOLOGIA
	Lunes 24 de febrero Viernes 7 de marzo	8:50 – 9:50 7:15 – 8:50	
	Lunes 10 de marzo	8:50 – 9:50	
9A	Lunes 24 de febrero Martes 25 de febrero	7:15 - 8:50 12:10 – 1:40	GRUPO EXPERIMENTAL: APLICACIÓN DEL DISEÑO SITUACIÓN 1 Y 2
	Lunes 3 de marzo Martes 4 de marzo	7:15 – 8:50 12:10 – 1:40	SITUACIÓN 3 Y 4
	Martes 11 de marzo	12:10 – 1:40	EVALUACIÓN

Anexo B. Programación y fundamentación del área de matemáticas del Colegio Bennett.

Tabla 2. Programación del área de matemáticas del grado Noveno del Tercer Período en el año lectivo 2013-2014 del Colegio Bennett

FECHA	CONTENIDO	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y ACTIVIDADES
Enero 20 a Marzo 28	**Macrocontenido:** Funciones polinómicas. Números complejos. Aplicaciones de Lógica y conjuntos en Probabilidad **Contenido Actitudinal/ Content Matter:** Normas básicas de comportamiento social / Basic rules of social conduct **Contenidos Procedimentales** Uso de: <u>Sistemas de representación</u> <u>Sistemas de registros</u> <u>Resolución de problemas</u> <u>Representaciones con TIC`s</u>	
Semana 1 Enero 20 – 24 Semana de Entrenamiento Pruebas Saber grados 10° y 11	Proposiciones, conectores lógicos y tautologías.	Guía propuesta. Actividad Tipo I
Semana 2 Enero 27 – 31 Simulacro grado 11	Operaciones entre conjuntos	Actividad Tipo I Evaluación Tipo III
Semana 3 Febrero 3 – 7 Actividades de Refuerzo (Feb. 5) Simulacro Debate "Colombia en Tus Manos" (Feb. 7)	Operaciones entre conjuntos	Actividad Tipo II Evaluación Tipo IV
Semana 4 Febrero 10 – 14 Día de San Valentín San Valentín Obra de Teatro: "La Gran Verdad"		¿Cómo reducir el impacto de huella ecológica? La ilusión de que los recursos naturales se pueden consumir de manera infinita se desvanece cuando calculamos nuestra huella ecológica. Para reducir la huella ecológica es necesario mejorar las políticas ambientales y la responsabilidad ciudadana. Concientizarse y seguir las principales acciones ecologistas puede contribuir a reducir nuestra huella ecológica y evitar consecuencias irreparables.

		Como puedes contribuir a reducir tu huella ecológica y a que tu ciudad y el planeta sean más sostenible, con tan sólo modificar algunas conductas o cambiando de estilo de vida. Los estudiantes deben analizar un problema de aplicación sobre manejo de recursos agrícolas como pauta de trabajo para introducirlos en los contenidos propuestos y la posterior elaboración del índice. Guía propuesta por el docente mediado por el uso de las Tic´s. Actividad Tipo I
Semana 5 Febrero 17 – 21	Gráficas cuadráticas	Actividad Tipo I
Semana 6 Febrero 24 – 28	Gráfica de la función cuadrática. Ecuaciones Cuadráticas.	Conceptualización y socialización. Actividad Tipo I
Semana 7 Marzo 3 – 7 Asamblea Día Internacional de la Mujer (Mar. 7)	Ecuaciones Cuadráticas.	Resolución de problemas. Actividad Tipo I Evaluación Tipo III
Semana 8 Marzo 10 – 14	Ecuaciones cuadráticas Funciones exponencial y logarítmica	Resolución de problemas. Actividad Tipo II Guía propuesta. Conceptualización y socialización.
Semana 9 Marzo17 – 21 Bennett Spirit Week	Funciones exponencial y logarítmica Números complejos.	Guía propuesta. Conceptualización y socialización. Actividad Tipo I
Semana 10 Marzo 25 – 28		Recirculación Tipo IV

Tabla 3. Fundamentación desarrollo de pensamiento matemático en el área de matemáticas del colegio Bennett, para el grupo de grados: 8º y 9º E.B.S

CUARTO GRUPO DE GRADOS: 8º Y 9º E. B. S.
PENSAMIENTO VARIACIONAL-NUMÉRICO
Establece relaciones entre lo numérico y variacional a través de las gráfica cartesianas, contextualizadas desde la variación proporcional (razonamiento multiplicativo), modelando situaciones de variación con funciones polinómicas (fenómenos de cambio y variación), haciendo énfasis en la utilización de descripciones verbales y tablas, favoreciendo la comprensión sintáctica de las nuevas expresiones algebraicas (simbólica, tabular, gráfica (cartesianas)), construyendo expresiones algebraicas equivalentes, conceptualizando funciones lineales y cuadráticas.
PENSAMIENTO ESPACIAL-METRÌCO
Hace conjeturas sobre el uso de teoremas, relaciones y propiedades geométricas, tales como: conceptualización de diversas magnitudes (longitud, superficie, amplitud angular, capacidad, peso), relaciones y propiedades de objetos geométricos, conceptualización de la longitud de la circunferencia y área del círculo, movimientos en el plano, utilización de patrones de medida convencionales.
PENSAMIENTO ALEATORIO
Analiza la información desde distintas interpretaciones y sentidos de medidas de tendencia central, haciendo inferencias sobre los datos dados para la toma de decisiones. Sobre la probabilidad, se exige su uso de una manera más formal dándole sentido desde el contexto particular. Se evalúan aspectos como: combinatoria y permutación, lectura e interpretación de gráficas, nociones de probabilidad y aleatoriedad, promedio y porcentajes.

Anexo C. Situación problema. ¿Cómo reducir el impacto de tu huella ecológica? grado noveno. Área de matemáticas del Colegio Bennett.

COLEGIO BENNETT **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

GRADO NOVENO PERIODO III

¿Qué puedes hacer tú para reducir la huella ecológica?

Tú puedes contribuir a reducir tu huella ecológica y a que tu ciudad y el planeta sean más sostenible, con tan sólo modificar algunas pautas de conducta o cambiando de estilo de vida. Aquí van algunas propuestas

Como ciudadano.

⇒ Procura estar informado sobre tu medio ambiente y la situación del planeta. Hay muchas revistas especializadas y en Internet encontrarás todo tipo de información ambiental.

⇒ Utiliza el derecho de acceso a la información en materia de medio ambiente para conocer la calidad de las condiciones ambientales en las que vives, ya sea ante tu municipio o Comunidad, para hacer propuestas de mejora y denuncia de los comportamientos o decisiones que dañen el medio ambiente.

Como consumidor

⇒ Compra con moderación. Cuanto menos compres menos residuos generarás, ahorrarás más dinero y tendrás menos dependencias.

⇒ Lee las etiquetas de los productos que compras, en ellas podrás ver cómo se han hecho, si están muy transformados y llevan conservantes y demás añadidos o si son naturales o incluso ecológicos, así como su procedencia.

En tu vida familiar

⇒ Utiliza electrodomésticos y bombillas de bajo consumo.

⇒ No tires a la basura productos peligrosos o tóxicos (fluorescentes, pilas, pinturas, radio grafías, aparatos eléctricos. etc) llévalos a un punto limpio para su tratamiento correcto.

⇒ Arregla las fugas (un grifo que gotea pierde 30 litros diarios).

Para reducir la huella ecológica es necesario mejorar las políticas ambientales y la responsabilidad ciudadana. Concientizarse y seguir las principales acciones ecologistas puede contribuir a reducir nuestra huella ecológica y evitar consecuencias irreparables.

SITUACIÓN PROBLEMA:

La problemática de la fertilización es cada vez más complicada y, el conocimiento de los abonos y de su aplicación es cada vez más importante . La reducción del área sembrada en Colombia se debe principalmente a la baja rentabilidad de los cultivos, ocasionado por los altos costos de producción, por la falta de incentivos por parte del gobierno hacia los agricultores y al mal manejo agronómico que se le ha dado al cultivo a través de los años.

El desarrollo de una agricultura moderna, basada en el uso de fertilizantes, requiere no solo de su uso masivo para transformar la agricultura tradicional; sino también de decisiones apropiadas para transformar y substituir productos y métodos de manejo para hacerlos más eficientes.

Un ingeniero forestal ha determinado que la productividad, medida en miles de kilogramos, debido al fertilizante en el terreno de papas a su cargo, viene dada por $P(x) = -1750x^2 + 3500x$, donde x se expresa en miles de kilgramos de fertilizantes.

Realiza la grafica correspondiente, señala cual de las afirmaciones es correcta y justifica:

⇒ La productividad, debido al fertilizante, se maximiza usando 1000 kg de fertilizante.

⇒ Si se usa mas de 1000 kg de fertilizante la productividad del terreno debido al fertilizante decrece.

⇒ Con 2000 kg de fertilizante, se alcanza la misma productividad que sin utilizarlo

Taller: Funciones Cuadráticas

COLEGIO BENNETT **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

Indicador de desempeño

Reconozco la función cuadrática y la relaciono con la ecuación cuadrática.
Reconozco la gráfica de una ecuación cuadrática

FUNCIÓN CUADRÁTICA

1. Identificar cuáles de las siguientes expresiones corresponden a funciones cuadráticas.

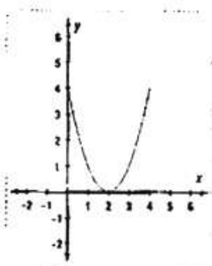
a. $y = x^2 + 2x + 5$
b. $f(x) = x + 2$
c. $y = 2x^3 + 5x$
d. $y = 4x + 6x^4$
e. $f(x) = 4x^2$
f. $y = 2x + 5$

2. Indicar hacia dónde abre la parábola que representa cada función cuadrática.

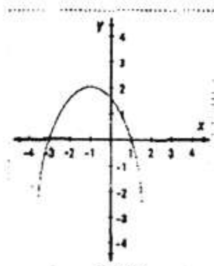
a. $f(x) = -x + x^2$
b. $y = 3x^2 + 6x - 2$
c. $f(x) = 4 - 2x^2$
d. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
e. $y = -5x^2 + 6x - 2$
f. $f(x) = -7x^2 + 4$

3. Trazar el eje de simetría de cada parábola. Luego, escribir la ecuación de dicho eje.

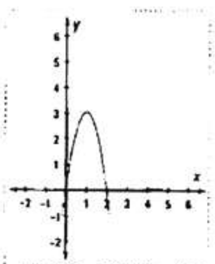
a.



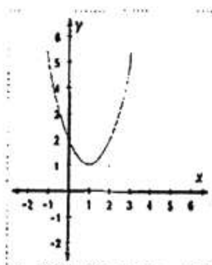
c.



b.



d.

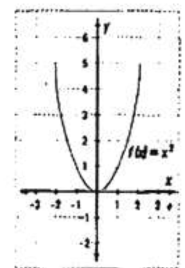


c. $y = -x^2, y = -2x^2, y = -3x^2, y = -4x^2.$

d. $y = 5x^2, y = -5x^2, y = \frac{1}{5}x^2, y = -\frac{1}{5}x^2.$

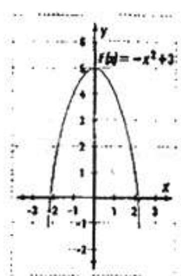
6. Para cada función cuadrática, dibujar otra función cuadrática con la condición indicada. Luego escribir su ecuación correspondiente.

a.

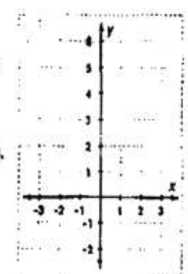


Trasladar la gráfica una unidad hacia arriba.

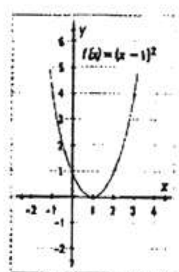
b.



Trasladar la gráfica 3 unidades hacia abajo.



c.



Trasladar la gráfica 2 unidades hacia arriba.

4. Escribir V, verdadero, o F, falso, para cada afirmación. Justificar las respuestas.
   a. La función $y = x - 3x^2$ se representa con una parábola que abre hacia abajo y sobre su eje de simetría se ubica el máximo.
   b. La gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ tiene un máximo sobre el eje x.
   c. La función cuadrática $f(x) = 1\backslash 2x^2$ abre hacia abajo ya que el coeficiente de x^2 es una fracción.

5. Graficar los siguientes conjuntos de funciones cuadráticas. Utilizar un plano para cada conjunto.
   a. $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$.
   b. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$.

7. Hallar el vértice y los puntos de corte con el eje x de las siguientes parábolas. Luego graficar.
   a. $f(x) = 5x^2 - 10x$
   b. $y = -x^2 + 4x$
   c. $f(x) = 3x^2 + 6x$
   d. $y = -2x^2 + 8x$
   e. $f(x) = x^2 - 2x$

8. Tomar como referencia las parábolas del ejercicio anterior, para construir la gráfica de las siguientes parábolas.
   a. $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$
   b. $y = -x^2 + 4x - 3$
   c. $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$
   d. $y = -2x^2 + 8x + 4$
   e. $f(x) = x^2 - 2x + 6$

Anexo D. Diseño aplicado en la prueba piloto

VARIACIÓN DE PARÁMETROS Y FAMILIAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

ACTIVIDAD 1: La variación del parámetro "a" y sus efectos sobre la parábola

Observa las gráficas de las funciones en el applet "Actividad 1", mueve el punto **a** que se encuentra en el deslizador, y observa que sucede con la gráfica de la función cuadrática f(x). De esta manera se obtiene una familia de funciones cuadráticas.

Responde:

- **a.** ¿Qué tienen en común las parábolas con $a>0$?
- **b.** ¿Qué tienen en común las parábolas con $a<0$?
- **c.** Escoge tres valores diferentes y positivos del parámetro **a**, ordenados de menor a mayor. Escribe lo que observas.
- **d.** Escoge valores diferentes y negativos del parámetro **a**, ordenados de menor a mayor. Anota lo que observas.
- **e.** ¿Cuál es el punto mínimo de las parábolas con $a<0$?
- **f.** ¿Cuál es el punto máximo de las parábolas con $a>0$?
- **g.** ¿Qué sucede cuando variamos el único parámetro de la ecuación anterior?
- **h.** ¿Cómo influye el valor de **a** y su signo en la forma de la gráfica?

CONCLUYE:

¿Qué relación existe entre la variación del parámetro **a** y la representación gráfica de una familia de funciones cuadráticas: cuando el valor de **a** aumenta y cuándo disminuye? ¿Cuándo a toma valores positivos y negativos o igual a cero? *(en estos casos, los valores de b y c son cero)*

i. Escribe las expresiones algebraicas de por lo menos 4 funciones cuadráticas que conformen una familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = \mathbf{ax^2}$. Comprueba tu respuesta usando el applet.

ACTIVIDAD 2: Familia de funciones cuadráticas: f(x)=ax²+c

En el Applet: Actividad 2. Cambia los valores, del parámetro **c,** en positivos y negativos, sin cambiar el valor del parámetro **a**, observa. ¿Qué sucede con la parábola?

a. Cambia ahora los valores del parámetro **a**, sin cambiar el valor del parámetro **c**, y observa. ¿Qué sucede con la parábola?
b. Si $\mathbf{a>0}$**,** ¿qué ocurre con la parábola si **c** toma valores mayores? ¿Y si ahora es $\mathbf{a<0}$?
c. Escribe las coordenadas del vértice de varias parábolas con valores de **c** distintos.
d. ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas del vértice y el valor de **c**?
e. ¿Para qué valores, o valor, de **c**, corta la parábola al eje X?
f. Fija el valor de $a = 1$ y $c = -4$, observa la expresión algebraica. Que relación tiene esta con los puntos de corte en el eje x de la gráfica. Halla por lo menos otros dos casos en los que se observa esta relación.
   - En el rango de variación del parámetro c, en el deslizador, para que valores los puntos de corte con el eje x son valores enteros. ¿Cómo se explica este hecho?
   - ¿Podría darse este caso para valores de $a < 0$?

CONCLUYE:

a. ¿Qué efecto tiene en la representación gráfica de una función de la forma **f(x)=ax²+c** el cambio del parámetro c?
b. ¿determina una expresión algebraica que represente la situación del punto f?

ACTIVIDAD 3: Familias de funciones cuadráticas según puntos de corte en el eje x.

Observa la familia de funciones cuadráticas representadas en el applet:

Actividad 3

a. Escribe por lo menos dos características que tienen en común estas gráficas.

b. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de corte con el eje x de las funciones?
c. Determina la expresión algebraica de por lo menos 2 funciones. Verifica tu respuesta, utilizando el programa Geogebra.
d. Determina la expresión algebraica general que representa las funciones cuadráticas asociadas a esta familia de funciones cuadráticas. Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 4: Desplazamiento de la gráfica de $f(x) = ax^2$. Funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Applet: Actividad 4

Deja fijo el valor de a=1. Cambia el valor del parámetro k, también el parámetro h, observa que sucede con la gráfica y su expresión algebraica.

a. ¿Qué ocurre cuando h=0? ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta familia de funciones cuadráticas?
b. ¿Qué ocurre cuando k=0? ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta familia de funciones cuadráticas?
c. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del vértice de la parábola y los valores de h y k?
d. ¿Cómo se relacionan los puntos de corte con el eje x de las gráficas, y los valores de h, k? ¿En qué condiciones existen?
e. ¿Qué relación existe entre el eje de simetría de la parábola y los valores de h y k?
f. ¿Qué sucede al hacer variar el parámetro a, en relación con los valores de h y k?

CONCLUYE:

a. ¿Cómo son los desplazamientos de la gráfica de una función cuadrática cuya ecuación es $f(x) = a(x - h)^2 + k$ en relación con los valores de h y k?
b. En la expresión $f(x) = a(x - h)^2 + k$, la coordenada del vértice de la función está determinada por las componentes: ____________

c. En una ventana nueva de Geogebra, construya las gráficas con las condiciones indicadas. Determine la ecuación de la gráfica resultante expresada en la forma **$f(x) = a(x - h)^2 + k$.**

C-1 La función cuadrática $f(x) = x^2$**, trasladar dos unidades hacia arriba.**

C-2 La función cuadrática $f(x) = x^2$**, se hace más abierta 2 unidades y se traslada hacia la derecha 3 unidades.**

C-3 La función cuadrática $f(x) = -(x - 1)^2$**, trasladar 3 unidades hacia abajo**

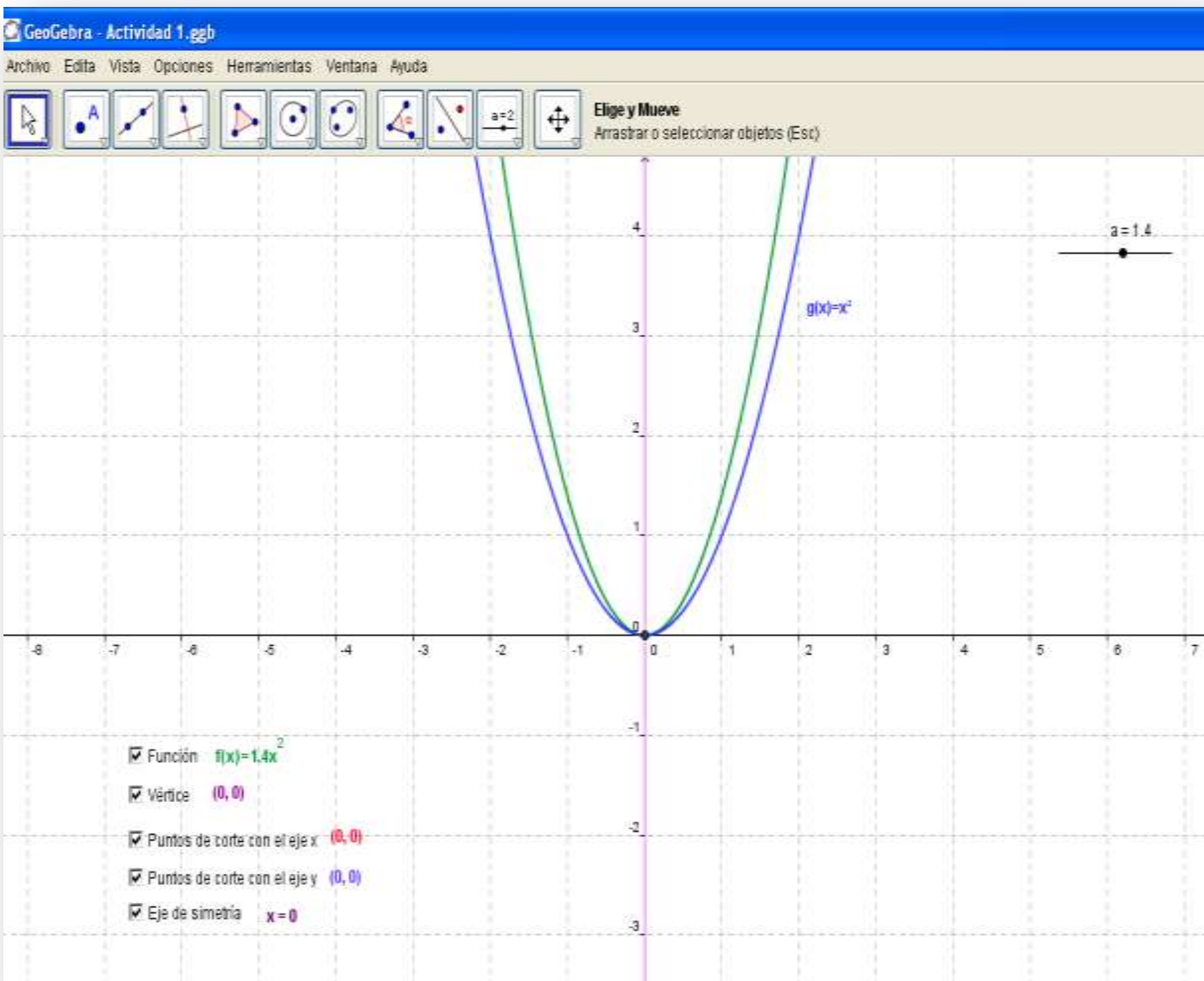
C-4 La función cuadrática $f(x) = 2x^2$**, trasladar 3 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia abajo.**

Anexo E. Diseño de las situaciones didácticas

VARIACIÓN DE PARÁMETROS Y FAMILIAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

SITUACIÓN 1: La variación del parámetro "a" y sus efectos en las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$.

Observa las gráficas de las funciones en el applet **Actividad 1**, mueve el punto **a** que se encuentra en el deslizador, y observa qué sucede con la gráfica de la función cuadrática f(x). De esta manera se obtiene una familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$.



Responde:

a. Escoge tres valores diferentes y positivos del parámetro **a**, ordenados de menor a mayor ¿Qué sucede con las parábolas?
b. En relación con la función $g(x)= x^2$, ¿Para qué valores de **a** se obtienen parábolas más abiertas? ¿Para qué valores de **a** se obtienen parábolas más cerradas? ¿Cómo se pueden explicar estos efectos producidos en las gráficas?
c. ¿Cómo influye el signo del parámetro **a** en la forma de la gráfica?
d. ¿Cuál es el vértice de familia de funciones de la forma $f(x) = ax^2$? ¿Por qué coinciden en este punto?

CONCLUYE:

I. Escribe las expresiones algebraicas de por lo menos 4 funciones cuadráticas que conformen una familia de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$. Explica el efecto que produce la variación del parámetro **a** en sus gráficas.

En una ventana nueva de Geogebra gráfica las funciones y valida la información. (Registra la información: En el *menú Archivo*, la opción *Vista Gráfica como Imagen* del ítem *Exporta* despliega una ventana de diálogo en que se puede especificar el *Formato*, *Escala* (en cm) y *Resolución* (en dpi) de la imagen guardada en el archivo gráfico al que se la exporta).

II. Qué relación existe entre la variación del parámetro **a** y la representación gráfica de una familia de funciones cuadráticas:

a. ¿Cuándo el valor de **a** aumenta y cuándo disminuye?
b. ¿Cuándo **a** toma valores positivos y negativos o igual a cero?

SITUACIÓN 2: Familia de funciones cuadráticas: $f(x)=ax^2+c$

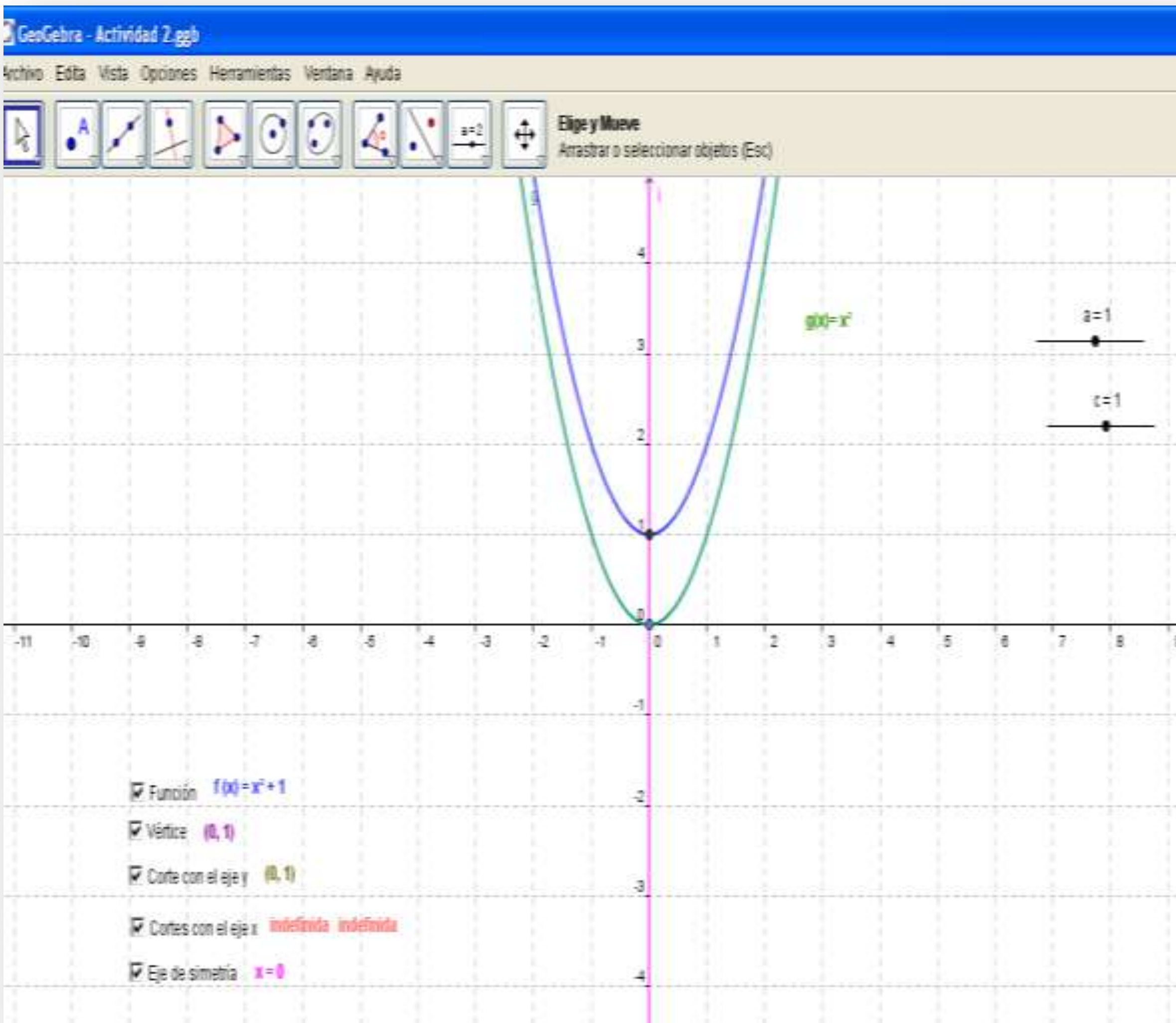
En el Applet: **Actividad 2.** Cambia los valores, del parámetro **c,** en positivos y negativos, sin cambiar el valor del parámetro **a**, observa. ¿Qué sucede con la parábola?

a. Si $a>0$, ¿Qué ocurre con las parábolas si **c** va aumentando en su valor? ¿Y si ahora es $a<0$?
b. Escribe la expresión algebraica de por lo menos 4 funciones diferentes para las que se ha fijado el valor de c, y relaciona las coordenadas del vértice que les corresponde.

c. ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas del vértice y el valor de **c** de la expresión algebraica?

d. ¿En qué casos, las parábolas cortan el eje X?

e. Fija el valor de a = 1 y c = -4, observa la expresión algebraica. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje x? ¿Qué relación tienen estos con la expresión algebraica?



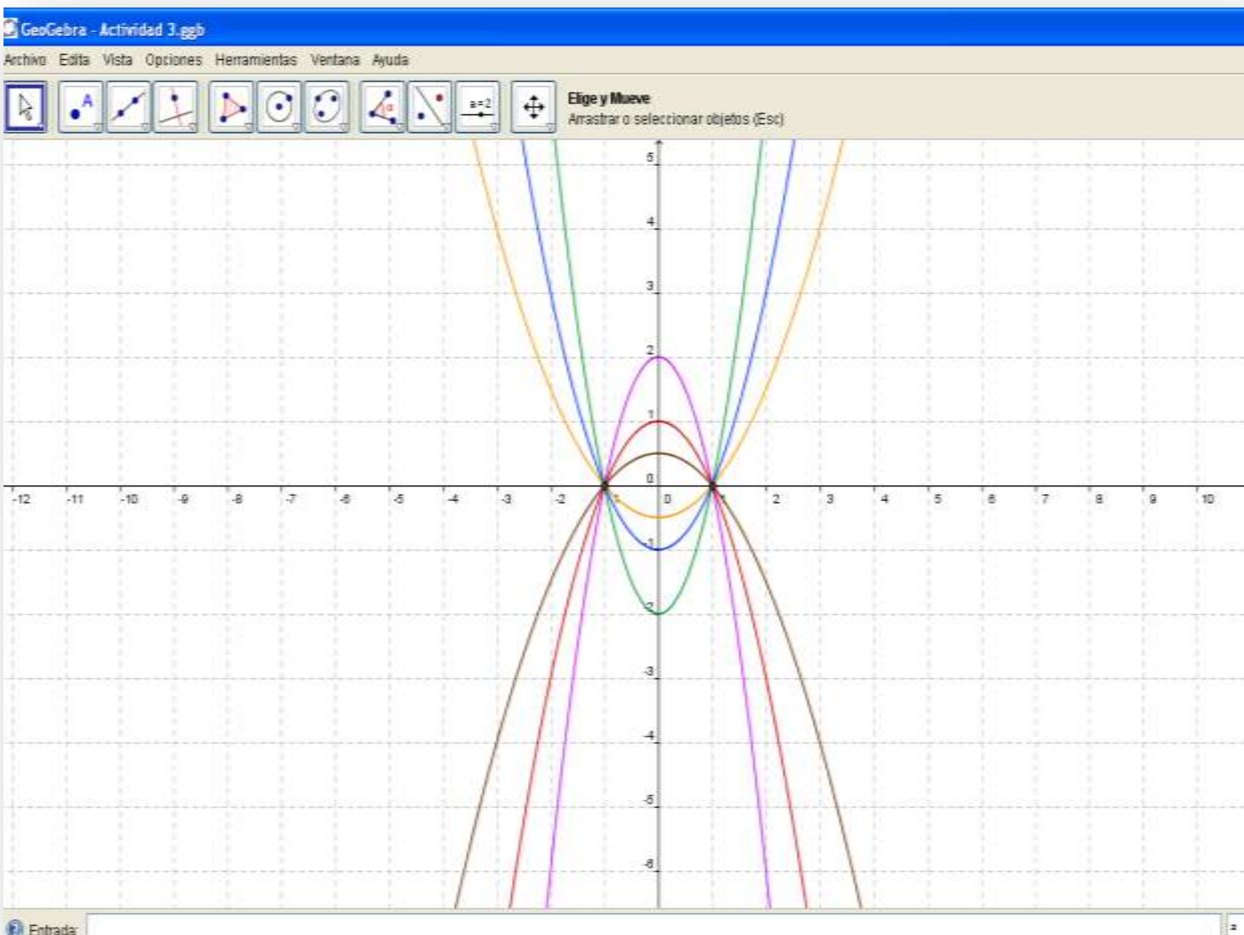
CONCLUYE:

a. En una ventana nueva de Geogebra, representa una familia de funciones cuadráticas de la forma **f(x)=ax²+c.** (Registra la información: En el *menú Archivo*, la opción *Vista Gráfica como Imagen* del ítem *Exporta* despliega una ventana de diálogo en que se puede especificar el *Formato*, *Escala* (en cm) y *Resolución* (en dpi) de la imagen guardada en el archivo gráfico al que se la exporta)

b. ¿Qué efecto tiene en la representación gráfica de una función de la forma **$f(x)=ax^2+c$** el cambio del parámetro c?

SITUACIÓN 3: Familias de funciones cuadráticas según puntos de corte en el eje x.

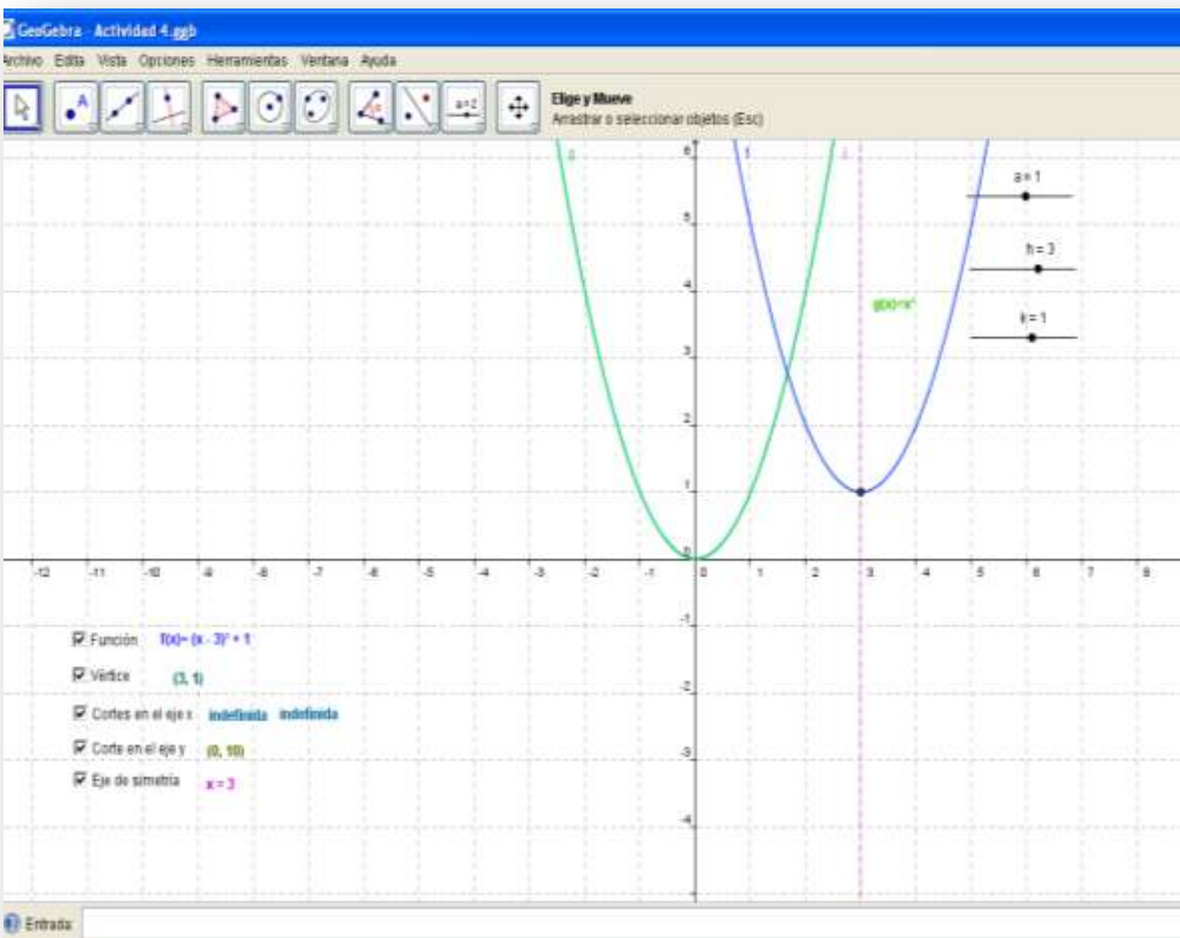
Observa la familia de funciones cuadráticas representadas en el Applet: **Actividad 3** y observa que tienen en común estas gráficas.



a. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de corte con el eje x de las funciones?
b. Determina cuál es la expresión algebraica de por lo menos 2 funciones. Verifica tu respuesta, utilizando el programa Geogebra.
c. Determina la expresión algebraica general que representa las funciones cuadráticas asociadas a esta familia de funciones cuadráticas. Justifica tu respuesta.

SITUACIÓN 4: Desplazamiento de la gráfica de $f(x) = ax^2$. Funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Deja fijo el valor de a=1. Cambia el valor del parámetro k, también el parámetro h, observa que sucede con la gráfica y su expresión algebraica, para ello utiliza el Applet: **Actividad 4.**



a. ¿Qué ocurre cuando $h=0$? ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta familia de funciones cuadráticas?
b. ¿Qué ocurre cuando $k=0$? ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta familia de funciones cuadráticas?
c. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del vértice de la parábola y los valores de h y k?
d. ¿Cómo se relacionan los puntos de corte con el eje x de las gráficas, y los valores de h, k? ¿En qué condiciones existen los puntos de corte con el eje x?
e. ¿Qué relación existe entre el eje de simetría de la parábola y los valores de h y k?
f. ¿Qué sucede al hacer variar el parámetro a, en relación con los valores de h y k?

CONCLUYE:

a. En una ventana nueva de Geogebra, construya las gráficas con las condiciones indicadas. Determine la ecuación de la gráfica resultante expresada en la forma **$f(x) = a(x - h)^2 + k$** .

   C-1 La función cuadrática $f(x) = x^2$**, trasladar dos unidades hacia arriba.**

   C-2 La función cuadrática $f(x) = x^2$**, se hace más abierta 2 unidades y se traslada hacia la derecha 3 unidades.**

   C-3 La función cuadrática $f(x) = -(x - 1)^2$**, trasladar 3 unidades hacia abajo**

   C-4 La función cuadrática $f(x) = 2x^2$**, trasladar 3 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia abajo.**

b. ¿Cómo son los desplazamientos de la gráfica de una función cuadrática cuya expresión algebraica es **$f(x) = a(x - h)^2 + k$** , si se tiene como referente la función $g(x)=$ **x^2**?

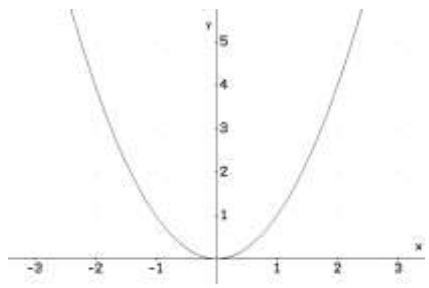
c. En la expresión **$f(x) = a(x - h)^2 + k$,** la coordenada del vértice de la función está determinada por las componentes: ____________

Anexo F. Evaluación: familias y parámetros de funciones cuadráticas.

NOMBRE: ___________________________________ **CURSO:** _________

SELECCIONE LA OPCION U OPCIONES CORRECTAS, JUSTIFICANDO LAS RESPUESTAS.

1. La siguiente gráfica corresponde a la función f(x) = x^2



Cuando a la gráfica de la función f(x)= x^2 se le cambia el coeficiente de x^2 por ½ con la misma escala, le sucede:

a. La gráfica se hace más abierta, abre hacia abajo y se traslada hacia arriba ½ unidad (sobre el eje y).
b. La gráfica tiene la misma abertura, abre hacia arriba y no se traslada.
c. La gráfica se hace más cerrada, abre hacia arriba y se traslada hacia la derecha ½ unidad (sobre el eje x).
d. La gráfica se hace más abierta, abre hacia arriba y no se traslada.
e. La gráfica se hace más cerrada, abre hacia abajo y no se traslada.

2. La opción con expresiones algebraicas que corresponden a funciones cuadráticas cuyas gráficas cortan el eje x en (1,0) y (-1,0), es:

a. $y = 4x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $y = 2x^2 - 2$

b. $y = 4x^2 - 1$, $y = 2x^2 - 1/2$, $y = 8x^2 - 2$

c. $y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 1$, $y = -4x^2 + 1$

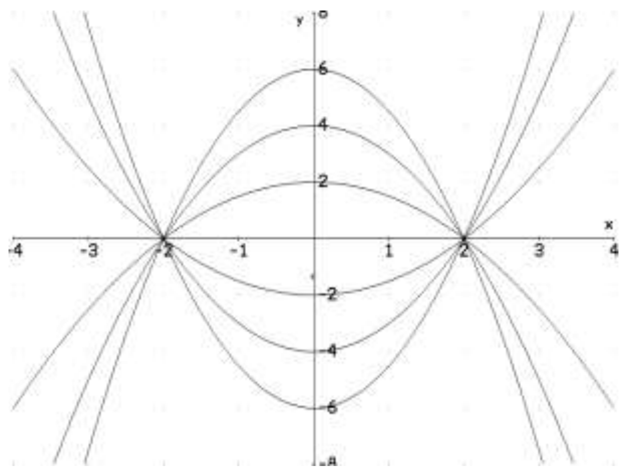
d. $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 - 4$

e. $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 + 2$, $y = 4x^2 + 2$

3. Todas las gráficas de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + c$, tienen como representación una parábola que:

   a. Corta el eje x en el punto (0,c)
   b. Corta el eje y en el punto (c,0)
   c. No corta ningún eje porque se desconoce el valor de c
   d. Corta el eje x en el punto (c,0)
   e. Corta el eje y en el punto (0,c)

4. Observa las siguientes gráficas:

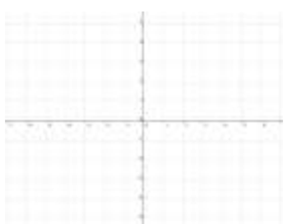


Escribe por lo menos dos características que tienen en común estas gráficas. Determina la expresión algebraica general que representa las funciones cuadráticas asociadas a estas gráficas.

5. Si La función cuadrática $f(x) = 2x^2$**, se traslada 3 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia abajo,** la ecuación de la gráfica resultante es:

   a. $y = 2(x - 3)^2 + 4$
   b. $y = 2x^2 + 3x - 4$
   c. $y = 2(x + 3)^2 - 4$
   d. $y = 2(x - 4)^2 + 3$
   e. $y = 2x^2 + 4x - 3$

6. Dada la función cuadrática $f(x) = ax^2 + 2$ donde $a \in R$, $a \neq 0$, traza la gráfica de las funciones y determina algunos puntos que están sobre las parábolas.

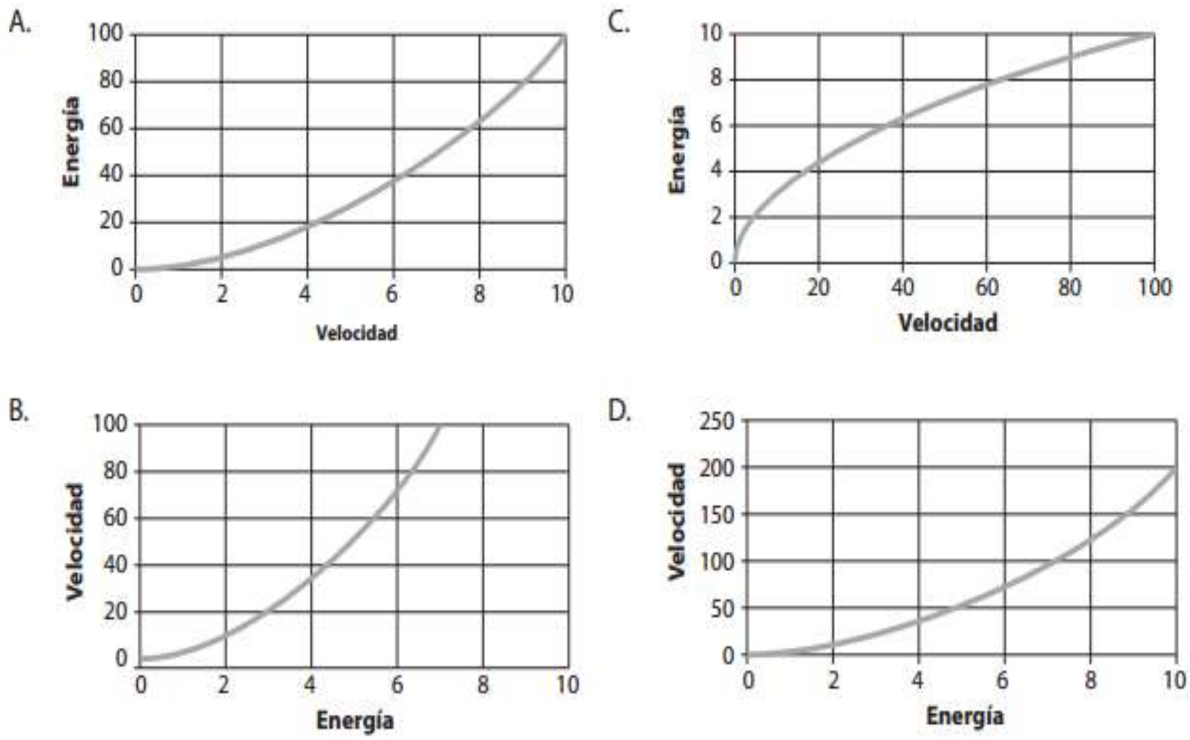


7. [15]La energía cinética es la energía en movimiento que poseen los cuerpos y la forma en que se determina la energía cinética de un cuerpo se efectúa al multiplicar la mitad de su masa por el cuadrado de su velocidad.

a. Escribe la expresión algebraica que permite calcular la energía cinética de un cuerpo de masa *m* y velocidad *v*.

b. Si la masa del objeto es 2 kg ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la energía en función de la velocidad?

[15] Tomado del texto Los caminos del saber 9º. Actividades multimedia. (2013) Editorial Santillana. Bogotá. Colombia



c. Si la masa del objeto se reduce a la mitad, ¿Cuál es la variación en la energía cinética? Haga un bosquejo de la gráfica que representa esta variación.

d. Si la masa del objeto se duplica, ¿Cuál es la variación de la energía cinética? ¿Cuál es el efecto que produce esta variación en la gráfica?