



EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES. 19 de noviembre de 2008

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

PROFESOR: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

NOTA: i) El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos. SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

ii) En este examen **no se permite el uso de calculadora**. Aquellas respuestas que involucren raíces, logaritmos o exponenciales, deben quedar indicadas en la forma más simplificada posible.

1. (20 puntos) Identifique el **tipo** de ecuación que representa cada una de las siguientes expresiones enumeradas de (a) hasta (e). Luego escoja tres de éstas ecuaciones y resuélvalas.

(a)  $6x^2 - x = 2$

(b)  $\sqrt{3-x} - x = 3$

(c)  $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2 - 2x}$

(d)  $\log_6(x+5) + \log_6 x = 2$

(e)  $4^{x-3} = 8^{4-x}$

2. (15 puntos) Considere la función  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ 3-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- (a) Construya la gráfica de  $f$  indicando los valores de los interceptos con los ejes coordenados.  
(b) Determine los intervalos donde  $f$  es creciente y los intervalos donde  $f$  es decreciente.  
(c) Determine el rango de  $f$ .

3. (15 puntos) Considere la función  $h(x) = -3\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

- (a) Construya la gráfica de  $h$  en un período.  
(b) Halle los valores de  $x \in [0, 2\pi]$  donde  $h$  se anula.  
(c) Determine los puntos donde  $h$  alcanza el máximo y el mínimo en un período.

4. (25 puntos)

- (a) Un bebé pesa 10 libras al nacer y tres años después alcanza 30 libras. Si el peso  $W$  (en libras) en la infancia está relacionado **linealmente** con la edad  $t$  (en años), ¿cuánto pesará el niño cuando cumpla seis años? ¿a qué edad pesará 70 libras?
- (b) El número de bacterias en un cultivo está dado por la fórmula  $n(t) = 500e^{0.45t}$ , donde  $t$  se mide en horas. i) cuál es el número inicial de bacterias? ii) Cuál es la tasa (como porcentaje) de crecimiento relativo de esta población de bacterias?. iii) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo después de 3 horas? iv) ¿Después de cuántas horas será de 10000 el número de bacterias?

5. (21 puntos)

- (a) Use la propiedad de las funciones inversas para demostrar que las funciones  $f(x) = x^3 + 1$  y  $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$  son inversas entre sí.
- (b) Encuentre un polinomio  $p(x)$  de cuarto grado con ceros 2, -3, y  $1 + i$  y que satisfaga la condición  $p(0) = 24$
- (c) Resuelva la ecuación  $\cos 2x + \cos x = 0$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$

6. (24 puntos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y justifique su respuesta.

- (a) Si  $\sin x = \frac{4}{5}$ , entonces  $\cos 2x = \frac{7}{25}$
- (b) Existe por lo menos un triángulo  $ABC$  que satisface las condiciones:  $a = 3$ ,  $b = 10$  y  $\angle A = 30^\circ$
- (c) Si la gráfica de una función polinómica corta el eje  $x$  en tres puntos, entonces el polinomio es de grado tres.
- (d) La gráfica de  $f(x) = \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x - 4}$  tiene tres asíntotas en total, y se intercepta con su asíntota horizontal.
- (e) La ecuación  $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$  representa una hipérbola que no está centrada en el origen.
- (f) La recta tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$  en el punto  $(3, -4)$  tiene pendiente  $-\frac{4}{3}$ .