Tercer examen parcial
Matemáticas Discreta
Profesor: Jaime Andrés Castaño

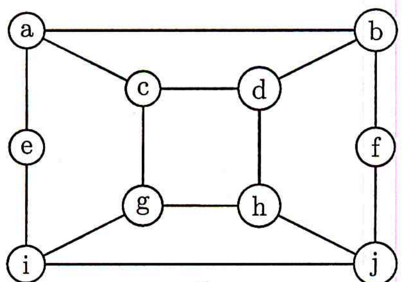
2013-1

UNIVERSIDAD ICESI
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

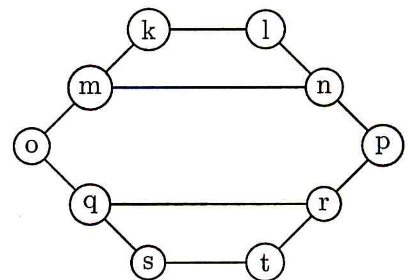
Estudiante: ______________________________ **Código:** ______________

Responda claramente cada una de las siguientes preguntas. No se responden preguntas relacionadas con el desarrollo de ejercicios. No se permite el uso de aparatos electrónicos. **Tiempo**: 2 horas.

1. [1,0] Construcción de Autómatas:
   a) Diseñe un AFD que reconozca el lenguaje $L = (a \bigcup ba)^*$ definido sobre el alfabeto $\sum = \{a, b\}$.
   b) Diseñe un AFN sobre el alfabeto $\sum = \{0, 1\}$ con cuatro estados que reconozca todas las palabras formadas por ceros y unos cuyo penúltimo símbolo siempre sea un 1.
2. [0,6] Determine si en el par de grafos G y H se preservan los invariantes trabajados en clase. En caso que se cumplan, se puede concluir que los dos grafos son isomorfos? `JUSTIFIQUE CLARAMENTE`



G



H

3. [1,5] Responda de forma clara los siguiente:
   - Demuestra que si G es un grafo con más de un vértice, se pueden encontrar dos vértices diferentes de G que tengan el mismo grado.
   - Demuestre que $A^+ \cdot A^+ \subseteq A^+$
   - Define inductivamente la longitud $|x|$ de una cadena x. Luego, demostrar por inducción que $|xy| = |x| + |y|$.
4. [0,7] Suponga que se define sobre el conjunto de todos los autómatas finitos la relación $\equiv_L$ cuando dos autómatas reconocen el mismo lenguaje, es decir, dadas los autómatas A_1 y A_2 entonces $A_1 \equiv_L A_2$ si y solo si $L(A_1) = L(A_2)$. Es esta relación de equivalencia?. En caso de serlo, indique lo que significan sus clases y el conjunto cociente de todos los autómatas particionado por la relación $\equiv_L$?
5. [1,2] El recíproco de un grafo dirigido $D = (V, A)$ es el grafo dirigido $D^r = (V, A^r)$ tal que $(u, v) \in A$ si y solo si $(v, u) \in A^r$. Demuestra que si D_1 y D_2 son dos grafos dirigidos isomorfos cualesquiera, entonces los recíprocos de D_1 y D_2 son también isomorfos.

Parcial 1
Matemáticas Discreta
Profesor: Jaime Andrés Castaño

UNIVERSIDAD ICESI
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

2013-1

Estudiante: ______________________________ **Código:** ______________

Responda claramente cada una de las siguientes preguntas. No se responden preguntas relacionadas con el desarrollo de ejercicios. No se permite el uso de aparatos electrónicos. **Tiempo**: 2 horas.

1. [1,0pto] Demuestre los siguientes enunciados.
   a) Sean m y c enteros tales que $mcd(m,c) = 1$. Si $d \in \mathbb{Z}$ es tal que $m|dc$, entonces $m|d$
   b) Si $m > 0$,$a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $(c, m) = 1$ y $ac \equiv bc(mod\, m)$ entonces $a \equiv b(mod\, m)$.
2. [1,0pto] Califique como falsa (F) o verdadera (V) los siguientes enunciados. $\underline{Justifique}$.
   a) La sucesión $a_n = n^2 4^n$ es solución de la relación de recurrencia $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$.
   b) La solución general de la relación de recurrencia dada por $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$ es de la forma $a_n = \alpha_0 2^n + \alpha_1 n 2^n + \alpha_3 n^3 (2)^n + \alpha_4 (-2)^n$
3. [1,0pto] Consideremos la sucesión S donde S_n denota el número de cadenas de longitud n formada solamente por $0's$ y $1's$ que no contienen la cadena 000. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{S_n\}$.
4. [1,0pto] Use el algoritmo de la división para demostrar que el cuadrado de todo número entero es de la forma $4k$ ó $4k + 1$. (sugerencia: use algoritmo de la división con d=4)
5. [1,0pto] Escribir un algoritmo recursivo para encontrar el máximo de una sucesión finita de números. Dar una prueba usando inducción matemática de que su algoritmo es correcto.