Examen Final Algebra Lineal 23 de Junio de 2012

El Examen se califica sobre 100 puntos

NOMBRE______________________________ CÓDIGO__________ Grupo 02

Profesor: Fernando Posso Gómez

1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

a) (5 puntos) Encuentre los valores propios de A

b) (7 puntos) sabiendo que el polinomio característico de la matriz A es $(\lambda+2)^2(\lambda-4)$ encuentre los vectores propios de A asociados a cada valor propio λ

c) (10 puntos) Diagonalice ortogonalmente la matriz A encontrando una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$

2. Sea L una transformación lineal $\mathbf{L}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definida como $\mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{3x-2y+z} \\ \mathbf{x-z} \\ \mathbf{2x+y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$

a) (5 puntos) Encuentre la matriz de la transformación lineal L referida a las bases canónicas

b) (8 puntos) Encuentre una base para el núcleo de L y una para la imagen de L

c) (5 puntos) ¿Es L Inyectiva? Justifique su respuesta

d) (5 puntos)¿(3, 1, 2,0) pertenece a la imagen de L? Justifique su respuesta

3. (12 puntos) Sea $\mathbf{L}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal tal que $\mathrm{L}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (1,-2)$, $\mathrm{L}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (2,3)$. Encuentre $\mathrm{L}\left(\begin{bmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{bmatrix}\right)$ y determine luego el valor de $\mathrm{L}\left(\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right)$

4. (10 puntos) Determine la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos (1,1), (5,2), y (7,10)

5. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones

(a) **(8 puntos)** Si los planos $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ son paralelos entonces $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

(b) **(8 puntos)** Dos rectas **se cruzan** si no son paralelas ni se interceptan. Muestre que las rectas $l_1: x=1+4t; y=2+5t; z=3+3t$ y $l_2: x=2+h; y=1-3h; z=-1-2h$

(c) **(8 puntos)** Muestre que $T=\{(x,y,z)|x+y-z=0\}$ es un subespacio de R^3

(d) **(8 puntos)** Si A y B son matrices semejantes entonces det A=det B

(e) **(8 puntos)** Si A es una matriz ortogonal entonces el determinante de A es ± 1