

MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES SOBRE TÍTULOS DE RENTA
FIJA: APLICACIÓN AL MERCADO COLOMBIANO

Darwin Giovanni Cárdenas Giraldo

Luis Guillermo Herrera Cardona

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Finanzas

Director del Trabajo de Grado:

Luis Berggrun Preciado, Ph.D.

Universidad ICESI

Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas

Santiago de Cali, Abril de 2011

CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	2
2. Valoración de una opción sobre un bono, una aproximación	3
2.1. Modelo de Valoración de Opciones de Black – Scholes	4
3. Una solución al problema de la dinámica estocástica en el tipo de interés: Modelos de evolución de tasas, el trabajo de Vasicek y la variante en la formulación de Black-Scholes	6
3.1. Modelo de Vasicek	7
3.2. La evolución del tipo de interés y la variante en la Formulación de Black – Scholes	10
4. Datos para la aplicación	12
5. Resultados	14
5.1. Estimación de los parámetros “ a ” y “ b ”	14
5.2. Estimación de la Volatilidad “ σ ”	15
5.3. Valoración de las Opciones <i>call</i> y <i>put</i>	16
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	21
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA	22
ANEXOS	27

Modelos de valoración de opciones sobre títulos de renta fija: aplicación al mercado colombiano

RESUMEN

En este documento se presenta e implementa el modelo de evolución de tasas de interés de Vasicek (1977) para la valoración de opciones *call* y *put* sobre un bono Colombiano (TES con vencimiento en 2020), apoyado mediante la formulación de Black-76 (1976). Para el desarrollo de esta aplicación se efectúan algunas operaciones con algoritmos de programación en Visual Basic¹ a través de la hoja electrónica Excel 2007[®] complementados por cálculos econométricos que estiman los parámetros de entrada del modelo. En el avance del trabajo se encuentra que el modelo de Vasicek no arroja resultados satisfactorios para la valoración de opciones sobre títulos de deuda pública en Colombia, especialmente los bonos emitidos por el gobierno nacional con vencimiento el 24 de Julio de 2020. Sin embargo, ajustando el modelo con parámetros basados en criterios empíricos se obtienen cifras consistentes. De esta manera, la aplicación realizada servirá para avanzar en el tema de valoración de opciones sobre títulos de renta fija y cobertura sobre tipo de interés en el mercado colombiano, permitiendo a su vez, un estímulo hacia la introducción y consolidación de este tipo de productos financieros.

Palabras Clave: Modelos de evolución de tasas de interés, Velocidad de Reversión, Modelo de Vasicek, Opción Call y Put, Strike, Valoración de opciones, Bono cero cupón, Modelo Black-76.

Fixed Income option pricing models: application to the Colombian Market

ABSTRACT

This paper presents and implements the Vasicek interest rate evolution model (1977) for the valuation of call and put options on a Colombian bond (TES maturing in 2020), supported by developing Black-76 (1976). For the development of this application are made some scheduling algorithms in Visual

¹ Los algoritmos originales fueron descargados a través de la página www.quantcode.com/quantcode.php, y modificados de acuerdo a las necesidades del estudio en cuestión.

Basic through the Excel spreadsheet calculations complemented by econometric estimate model input parameters. In advance of the work is that the Vasicek model does not yield satisfactory results for the valuation of options on debt securities in Colombia, especially the bonds issued by the national government to mature on July 24, 2020. However, by adjusting the model parameters based on empirical criteria consistent figures are obtained. Thus, the application made will help advance the issue of valuation of options on fixed income securities and interest rate coverage of the Colombian market, while allowing a stimulus towards the introduction and consolidation of such products financial.

Key Words: Interest rate evolution models, Speed of Reversion, Vasicek Model, Call and Put Option, Strike price, Option pricing, Zero-coupon Bond, Black-76 model.

1. Introducción

En la actualidad, el mercado de capitales colombiano se caracteriza por tener el 93,91% concentrado en títulos de renta fija, frente a un 2,41% y un 1,25% en renta variable y derivados, respectivamente², esto indica la relevancia de contar con instrumentos de cobertura sobre activos financieros de deuda para mitigar los riesgos de tasa de interés. La realidad evidencia que Colombia es un país con un incipiente mercado de derivados y peor aún, carece de metodologías para abordar el tema específico en valoración de opciones sobre títulos de deuda y tipo de interés. No obstante, de acuerdo con Ramírez (2007), La Bolsa de valores de Colombia adoptó la metodología de Nelson y Siegel para modelar tasas de interés y sobre esta base valorar precios futuros.

De esta manera, se hace necesaria la aplicación de modelos existentes para valorar este tipo de instrumentos derivados (opciones) sobre tasa de interés, y en esa vía introducir productos financieros presentes en otros mercados en aras de impulsar el mercado de derivados en Colombia. En general, como respuesta a dicha necesidad surgen los modelos de evolución de tasas de interés, y tal como lo exponen Botero & Restrepo (2008), en etapas incipientes de desarrollo de los mercados de derivados, estos modelos aparecen como una elección imprescindible debido a su sencillez y parsimonia.

² Cifras al 31 de diciembre de 2010, extraídas del informe anual de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), publicado el 19 de enero de 2011.

Para el caso específico de Colombia, a partir del año 2002 se comienzan a vislumbrar estudios relacionados con estructura a plazos, en donde se encuentran los trabajos de Arango, Melo y Vásquez (2002), Julio, Mera y Revéiz (2002), y Melo y Vásquez (2002). Cinco años después se exponen documentos que incorporan la metodología de Nelson, Siegel y Svensson como el de Ramírez (2007) y posteriormente tratados alusivos al uso de modelos de tasa corta tales como el de Hull y White, y Black y Karasinski evidenciados en Botero y Restrepo (2008) y Grajales y Pérez (2008).

Para este documento se seleccionó el modelo de Vasicek (1977). Este modelo, además de ser pionero dentro de las metodologías de estructura a plazos es usado en otros mercados. El modelo en mención se implementa numéricamente evolucionando la tasa de interés y finalmente valorando una opción a través de la fórmula modificada de Black (1976).

Acto seguido, se exhibe una aplicación para un título de deuda pública nacional, específicamente hablando, un TES con vencimiento al 24 de julio de 2020. Para tales efectos, se implementa una formulación en la hoja electrónica Excel 2007[®] complementada por un algoritmo de programación en Visual Basic (VBA) y procedimientos econométricos para estimar los parámetros de entrada que exige el modelo en EViews 5.0[®].

Como resultado de esta implementación se encuentra que la metodología arroja resultados no satisfactorios. Dicho de otra manera, el modelo no se ajusta a valores consistentes, por lo tanto, los precios de las primas no son coherentes, ni razonables. Por otro lado, si se realiza el ejercicio introduciendo parámetros basados en criterios empíricos (ensayo y error) basados en otros trabajos, los resultados son satisfactorios y totalmente coherentes.

Finalmente, el documento está estructurado de la siguiente manera, en la sección 2 se presenta un primer intento por valorar una opción sobre un título de renta fija mediante la metodología genérica de Black – Scholes, en la sección 3 se explican brevemente los modelos de evolución de tasas y se enfatiza en la metodología de Vasicek (1977), en la sección 4 se caracteriza el bono a evaluar, en la sección 5 se muestra la aplicación citada en el párrafo anterior, y finalmente se concluye y se realizan unas recomendaciones.

2. Valoración de una opción sobre un bono, una aproximación.

Primero que todo, una opción es un acuerdo entre dos partes por el cual el titular (comprador) tiene el derecho, aunque no la obligación, de comprar o vender un activo financiero específico (subyacente), a un precio establecido (precio de ejercicio), antes de o en una fecha determinada (fecha de

expiración). La opción de comprar se denomina *call*, mientras que la opción de vender se conoce como *put*.

En función del momento en que esta pueda ejercerse la opción puede ser: americana, cuando se ejerce en cualquier fecha antes del vencimiento; y europea, sólo si se ejecuta en la fecha de expiración.

El precio de una opción se fija en el mercado y tiene dos componentes: el valor intrínseco y una prima. El primero se refiere al beneficio que se obtendría al ejercerla, teniendo en cuenta la fecha en que se realice, en una *call* sería la diferencia entre la cotización del activo subyacente (S) y el precio de ejercicio o *strike* (K), cuando $S > K$; caso contrario, si $K > S$ el precio de la opción es cero. Para la *put*, el valor intrínseco se obtendrá de la diferencia entre el precio *strike* (K) y la cotización del subyacente (S), siempre que $K > S$, en caso contrario, el valor es cero.

Aunque el precio de una opción viene determinado por la ley de la oferta y la demanda, las principales variables (factores) que inciden en la formación de este son: el precio del subyacente o *spot* (S), el precio de ejercicio o *strike*, la fecha de vencimiento (expiración) o maduración de la opción, la volatilidad (variabilidad en los rendimientos), los tipos de interés, y los dividendos (este último para el caso de opciones sobre acciones).

Para valorar opciones o calcular la prima se emplean dos métodos: el binomial y el modelo de Black – Scholes. Para efectos de este trabajo se utilizará sólo el segundo método.

2.1. Modelo de Valoración de Opciones de Black – Scholes³

Este método se usa para valorar opciones europeas y asume una distribución lognormal estimada mediante la siguiente fórmula:

Para una *call* europea:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (1)$$

Mientras que para una *put* europea se tiene:

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2)$$

En donde,

³ Se le llama así por ser el resultado del trabajo de Fisher Black y Myron Scholes en 1973 resumido en el documento "The Pricing of Options and Corporate Liabilities".

$N(d_1)$, $N(d_2)$, $N(-d_1)$ y $N(-d_2)$ son parámetros de normalidad (distribución normal estándar acumulada en d_i),

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

S es el precio spot o actual del activo (en tiempo cero), K es el precio de ejercicio o strike, T es el tiempo al vencimiento, r es la tasa libre de riesgo compuesta continua, y σ la volatilidad en el precio del activo (desviación estándar periódica de los rendimientos).

Para valorar un título de renta fija con el modelo en mención, las fórmulas (1) y (2) sufren una pequeña variante. Simplemente se sustituye la variable “ S ” por “ B ”, en ese orden de ideas, el precio teórico de una opción *call* y de una *put* sobre un bono son calculados mediante las ecuación (3) y (4).

$$C = BN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (3)$$

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - BN(-d_1) \quad (4)$$

Donde B es el precio del bono subyacente y todos los demás parámetros continúan iguales. Esto implica que en los indicadores d_1 y d_2 también deben realizarse la sustitución.

Siguiendo la recomendación de Choudhry (2005), para el caso de un bono cero cupón el precio simplemente es el valor presente de su valor futuro, mientras que para un bono subyacente con cupones se debe restar el valor presente de los cupones pagados durante la vida de la opción.

Nótese además que esta metodología y en general otros modelos estándares tienen un supuesto clave que a su vez la hace cuestionable, y se refiere al hecho de asumir que la tasa de interés es constante. Evidentemente si lo que se quiere es valorar opciones sobre tipos de interés y se supone que estos son constantes, se asume que la volatilidad también es cero, y si la volatilidad fuese cero, no tendría ningún sentido valorar una opción para la tasa de interés. La realidad evidencia que su naturaleza es aleatoria, por tal razón, el modelo debe sufrir un ajuste más estructural que considere la dinámica estocástica de la tasa.

3. Una solución al problema de la dinámica estocástica en el tipo de interés: Modelos de evolución de tasas, el trabajo de Vasicek y la variante en la formulación de Black-Scholes.

Los modelos de tasa de interés, también conocidos como modelos de estructura a plazos⁴, están basados en teorías concernientes al comportamiento de las tasas de interés. Tales modelos buscan identificar elementos o “factores” que pueden explicar la dinámica de estas. Dichos factores son aleatorios o estocásticos, lo que implica que sus valores futuros no pueden ser pronosticados con certidumbre. Por lo tanto, los modelos en mención utilizan procesos estadísticos para describir las propiedades estocásticas de los factores y de este modo llegar a una representación razonablemente precisa del comportamiento de la tasa.

Los primeros modelos descritos en la literatura académica explican el comportamiento de la tasa de interés en términos de la dinámica de una tasa corta⁵. Esta estructura se refiere a la tasa de interés para un período que es infinitesimalmente pequeño.

El punto de partida en esta temática fue marcado por el trabajo de Itô (1951), el cual se exhibe en la ecuación diferencial estocástica (5)

$$dP(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ(t) \quad (5)$$

donde $P(t)$ se refiere al precio, $\mu(t)$ es la media, $s(t)$ la volatilidad y $Z(t)$ es un movimiento Browniano⁶.

A partir del teorema en mención se realiza una extrapolación al mundo de las tasas de interés. De esta manera surgen los modelos de evolución de tasas. De acuerdo con Botero & Restrepo (2008), estos se pueden clasificar en modelos de equilibrio y de no arbitraje, los primeros se basan en una serie de supuestos referentes a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa de interés de corto plazo. En dichos modelos las estructuras a plazos de tipos de interés y de volatilidades se determinan de forma endógena. Aquí se pueden referenciar trabajos como los de Vasicek (1977) y Cox-Ingersoll-Ross (1985). Por otro lado, los de no arbitraje tratan las estructuras antes mencionadas como exógenas, procurando que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado. En este plano se pueden resaltar los trabajos de Ho y Lee (1986), Hull y White (1990),

⁴ Atendiendo a Arango, Melo y Vásquez (2002) una estructura a plazo de tasa de interés es una relación entre los rendimientos y los períodos de maduración de títulos con similar calidad crediticia, regularmente libres de riesgo. A la representación gráfica de esta estructura se le conoce como curva de rendimientos (yield curve).

⁵ En una literatura más técnica, tasa de interés de corto plazo.

⁶ Un movimiento Browniano es un proceso estocástico surgido en el escenario de la física-química que explica el comportamiento aleatorio en el movimiento de las partículas en un fluido, el concepto fue adaptado a la economía y las finanzas para describir la dinámica probabilística de los precios de los activos financieros.

Black, Derman y Toy (1990), Heth, Jarrow y Morton (1990) y Black y Karasinski (1991).

Otra manera de clasificar los trabajos de tasa de interés es de acuerdo al número de factores aleatorios objeto de análisis. Mientras los modelos unifactoriales contemplan la tasa corta de interés como único factor de relevancia, aspecto que los hace débiles; los modelos multifactoriales asumen por lo menos dos factores relevantes en su estructura a plazos de tipo de interés, por ejemplo, la tasa corta y su tendencia, la cual sigue un proceso de Gauss-Wiener⁷. Con respecto a esta última caracterización se pueden mencionar los trabajos de Brennan y Schwartz (1979), Extended Cox-Ingersoll-Ross (CIR) en Chen y Scott (1992), y el de Heath-Jarrow-Morton (HJM) (1992).

3.1. Modelo de Vasicek (1977)

Este trabajo fue el primer modelo de estructura a plazo descrito en la literatura académica, en Vasicek (1977). Es un modelo de tasa corta unifactorial de equilibrio que asume que esta tasa corta es un proceso que sigue una distribución normal incluyendo una reversión a su nivel medio.

El modelo es muy popular en los círculos académicos y en los laboratorios de mercados financieros dado que es analíticamente tratable y fácil de implementar. A pesar de que tiene un elemento de volatilidad constante, la reversión a la media elimina la certeza de presentar tasas de interés negativas en el largo plazo. No obstante, al no librarse del arbitraje (por no tratarse de un modelo de no-arbitraje) respecto a los precios de los bonos en el mercado, algunos profesionales no trabajan con el modelo para evitar este tipo de situaciones.

El modelo de Vasicek describe la dinámica de la tasa corta de interés y satisface el proceso de Ito dado en (6)

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (6)$$

donde

a = velocidad de reversión a la media, es decir, la rapidez con que la tasa de interés de corto plazo tiende a regresar a su valor de largo plazo, b , una vez que se ha desviado de este.

b = nivel medio de reversión de r o tasa promedio de interés a largo plazo.

⁷ Estrictamente hablando, un proceso de Gauss-Wiener se refiere a un movimiento Browniano, el cual se describió en la nota anterior.

z = proceso de Wiener estándar con media 0 y desviación estándar 1.

σ = volatilidad de los cambios de la tasa de interés de corto plazo.

dt = intervalo de tiempo que tiende a cero (0).

dz = es un proceso browniano.

A su vez, la dinámica de la tasa de interés dada en (6), tal y como lo interpretan Botero y Restrepo (2008), implica que los cambios en la tasa corta se componen de una tendencia dada por $[a(b - r)dt]$ y de un componente estocástico σdz .

En algunos otros textos se usan diferentes notaciones, presentando la fórmula (6) como

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dz \quad (7)$$

ó

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dz \quad (8)$$

De esta manera, y partiendo de (6), el precio en el tiempo t de un bono cero cupón que paga una (1) unidad monetaria y madura al tiempo T está dado por (9)⁸.

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (9)$$

Siendo

$r(t)$: tasa de corto plazo en el tiempo t

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = e^{\left(b - \frac{1\sigma^2}{2a^2}\right)(B(t, T) - (T-t)) - \frac{1\sigma^2 B(t, T)^2}{4a}}$$

En cuanto a la estructura a plazos en Vasicek (1977), siempre que la ecuación (9) se exhiba como $P(t, T) = e^{-({}_tR_T)(T-t)}$, donde ${}_tR_T$ es la tasa de interés en el tiempo t para el plazo de $(T - t)$, se obtiene:

$${}_tR_T = \frac{1}{T-t} [B(t, T)r(t) - \ln[A(t, T)]] \quad (10)$$

⁸ Para mayor profundización, remitirse a Vasicek (1977) y ver la sección 5.3 en Van Deventer e Imai (1997).

En el modelo de Vasicek, la tasa corta r distribuye normalmente. Por lo tanto, esto implica una probabilidad de que la tasa sea negativa, lo que no tiene sentido desde el punto de vista económico. Sin embargo, este inconveniente no lo descalifica absolutamente, ya que tal y como lo mencionan Longstaff y Schwartz (1995), y Lamothe (2003), la probabilidad de que eso ocurra es muy pequeña con unos parámetros realistas y, debido a que el valor inicial de los tipos es positivo, el valor esperado de los mismos seguirá siendo mayor que cero.

Para ilustrar el uso del modelo de Vasicek, considérese una situación donde la actual tasa corta, $r(t)$, es del 8%, la media de largo plazo, b , es 10%, la volatilidad instantánea, σ , es 5%, y la velocidad de reversión, a , es 0,2. Este conjunto de parámetros generan los resultados exhibidos en la Tabla 1, en la cual se puede notar la convexidad de la función ${}_tR_T$ ante el crecimiento en $1 \leq (T - t) \leq 3$, y los posteriores decrecimientos en $(T - t) = 4$ y 5.

Los parámetros “ a ” y “ b ” se pueden estimar mediante una regresión debido a que este modelo supone que la tasa corta de interés sigue un proceso AR(1)⁹ tal como se explica en (11).

Tabla 1. Estructura a plazo usando el modelo de Vasicek

Tiempo al vencimiento en años ($T - t$)	$B(t, T)$	$A(t, T)$	Valor del Bono Cero- cupón [$P(t, T)$]	Tasa de Interés [${}_tR_T$]
1	0,9063	0,9910	0,9217	8,15%
2	1,6484	0,9679	0,8484	8,23%
3	2,2559	0,9351	0,7807	8,25%
4	2,7534	0,8964	0,7192	8,24%
5	3,1606	0,8541	0,6633	8,21%

Fuente: Copeland, Weston & Shastri (2005)

$$r_t = \alpha_0 + \beta_0 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (11)$$

Donde

$$\alpha_0 = ab$$

$$\beta_0 = 1 - a$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

De otra manera, la expresión (11) podría reescribirse como en (12).

$$r_t = ab + (1 - a)r_{t-1} + \sigma dZ_t \quad (12)$$

⁹Quiere decir que la tasa corta se comporta como una serie autoregresiva cuyo rezago máximo es la tasa del período inmediatamente anterior. En otras palabras, el valor de las tasas cortas futuras depende de la tasa misma.

Siendo

$$\partial Z \sim N(0, \partial t)$$

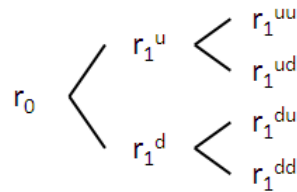
Por otro lado, la volatilidad “ σ ” puede ser estimada mediante un modelo GARCH(p,q)¹⁰, donde p y q pueden tomar el máximo valor de 1, en general, el modelo puede ser descrito como en (13).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (13)$$

Siempre que

$$u_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Adicionalmente, el modelo de tasa de corto plazo de Vasicek puede exhibirse mediante un árbol de tasas de interés. Básicamente consiste en realizar una representación en tiempo discreto de un proceso estocástico para un modelo de tasa corta. La estructura de la ecuación de tasa corta en el modelo se realiza a través de un árbol binomial de tasas de interés, con pasos de tiempo Δt entre los nodos y probabilidades p_u y p_d de producirse movimientos en la tasa corta hacia arriba o abajo, respectivamente. Así las cosas, la forma del árbol sería la siguiente.



Con $r_1^{du} = r_1^{ud}$, r_0 es la tasa de interés en el momento de la valoración,

$$r_1^u = r_0 + \frac{a(b - r_0)}{12} + \frac{\sigma}{\sqrt{12}} ; r_1^d = r_0 + \frac{a(b - r_0)}{12} - \frac{\sigma}{\sqrt{12}} ; y \text{ así sucesivamente}^{11}$$

3.2. La evolución del tipo de interés y la variante en la formulación de Black-Scholes

¹⁰ Un proceso GARCH ó Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity mide el grado de variabilidad presente en una serie de tiempo y estima las variaciones futuras a partir de sus datos históricos. Bajo un modelo GARCH(p, q), la volatilidad se concibe como una composición de una parte residual y otra parte explicada a partir de su variación histórica, donde p y q indican los rezagos máximos tanto en sus varianzas como en sus residuos, respectivamente. Por fortuna, generalmente un modelo GARCH(1,1) será suficiente para solucionar el problema de volatility clustering presente en las series, basados en Brooks (2008).

¹¹ Asumiendo cálculos mensuales y probabilidades de 0,5 de que la tasa suba o baje. Para profundizar, consultar Tuckman (2002).

Dejando claro el comportamiento aleatorio en los tipos de interés, se puede abordar nuevamente el tema de la valoración por el modelo de Black-Scholes. Como ya se mencionó en la sección 2, el modelo presentaba una dificultad al asumir la tasa de interés como un valor constante, frente a esto, en 1976 Fisher Black presentó una versión modificada del modelo convencional B-S, usando supuestos similares, para valorar opciones sobre contratos a plazo, desde entonces el modelo se conoce como Black-76. Hoy los bancos emplean esta versión modificada para valorar swaptions¹² e instrumentos similares, de igual manera se ha conocido su empleo para opciones sobre bonos y tipo de interés, tales como caps¹³ y floors¹⁴. De tal forma que las opciones sobre bonos pueden ser tratadas como opciones sobre contratos futuros de bonos. Para tal efecto, el académico modificó las ecuaciones (3) y (4) cambiando la nomenclatura de algunas variables y haciendo cambios estructurales, tal y como se muestran en (14) y (15).

$$C = e^{-rT} [FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (14)$$

$$P = e^{-rT} [KN(-d_2) - FN(-d_1)] \quad (15)$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

F , es el precio forward del bono subyacente en el momento t , K , es el precio de ejercicio o strike, σ , es la volatilidad del precio forward y T , es el vencimiento del contrato a plazo.

Lo interesante de esta variante es que en aras de tratar todo en términos del precio forward, el modelo de Vasicek puede enlazarse con el de Black-76 para valorar una opción sobre tipo de interés, por lo que el modelo que finalmente se utilizará en este trabajo se resumiría en las expresiones (16) y (17).

$$C = FN(d_1) - KN(d_2) \quad (16)$$

$$P = KN(-d_2) - FN(-d_1) \quad (17)$$

Siendo

¹² Un Swaption es un derivado financiero consistente en una opción cuyo subyacente es un swap, normalmente un interest rate swap (IRS). Es decir, ofrece la posibilidad de entrar en una permuta de tipo de interés.

¹³ Un cap es un instrumento de gestión de riesgo del tipo de interés a medio y largo plazo que consiste en un acuerdo entre dos partes mediante el cual un prestatario se asegura el tipo máximo que se le aplicará a un préstamo a cambio del pago de una prima.

¹⁴ Un floor es lo contrario a un cap, en este contrato el comprador se asegura la rentabilidad mínima de un depósito a cambio de una prima.

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{F}{K}\right)}{V} + \frac{1}{2}V$$

$$d_2 = d_1 - V$$

$$V = \sigma B(t, T) \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(1 - e^{-2at})}{a}}$$

$$F = P(0, T)$$

$$K = P(t, 0)P(t, T)$$

$P(t, T)$; $B(t, T)$; y $A(t, T)$ se tratan en la sección 3.1. Cuando t y T toman el valor de cero en las expresiones anteriores se generan las variables de salida $P(0, T)$, $P(t, 0)$, $B(0, T)$, $B(t, 0)$, $A(0, T)$ y $A(t, 0)$.

La descripción de las variables son las mismas, no hay variación alguna.

4. Datos para la aplicación

Para este trabajo se tomó como referencia los Bonos emitido por el Gobierno nacional con vencimiento al 24 de Julio de 2020, **TFIT15240720**¹⁵, por ser los títulos con más volumen de negociación y con más liquidez del mercado. El rango de datos va desde el 5 de agosto de 2005, fecha en la cual empezaron a cotizar en pantalla, hasta el 5 de noviembre de 2010, cuyas estadísticas descriptivas y evolución de tasas se pueden visualizar en la Tabla 2 y en el Figura 1, respectivamente. Con la serie de datos obtenidos de los cierres diarios en el intervalo de fechas mencionadas se presentarán 4 escenarios de vencimiento para las opciones *call* y *put*, el primero a 15 días, el segundo a 30 días (1 mes), el tercero a 180 días (6 meses) y finalmente a 360 días (1 año).

En el resumen de estadísticas se puede apreciar que entre el 5 de agosto de 2005 y el 5 de noviembre de 2010 el rendimiento promedio del título escogido fue del 9,58% efectivo y su volatilidad de 1,39% diaria. Al observar el coeficiente de asimetría se puede inferir que la distribución de los tipos de interés en el intervalo de tiempo analizado para este título es positiva, o dicho de otra manera, sesgada hacia la derecha. Mientras tanto, la curtosis evidencia que la distribución en mención es platocúrtica, lo que sugiere que gráficamente se pueda percibir más como una curva achatada que inclinada. Finalmente, la tasa más baja se ubicó en 6,96% e.a., evidenciada el 8 de octubre de 2010, y la más alta estuvo por el orden del 13,60% e.a., apreciada el 27 de octubre de 2008, generándose una brecha de 664 puntos básicos.

¹⁵ Este título es emitido por la Tesorería del Gobierno Nacional, vence a la fecha especificada y no paga cupones.

Tabla 2. Resumen de Estadísticas Descriptivas para el TFIT15240720

Media	0,0958
Error típico	0,0004
Mediana	0,0944
Moda	0,0942
Desviación estándar	0,0139
Varianza de la muestra	0,0002
Curtosis	-0,1132
Coefficiente de asimetría	0,4233
Rango	0,0664
Mínimo	0,0696
Máximo	0,1360
Suma	118,7412
Cuenta	1239,0000

Fuente: Datos banco de la República.
Cálculos de los autores

Para este caso, los parámetros de entrada que tomará el modelo (6) se estimarán mediante procedimientos econométricos, cuyos resultados se presentarán en la siguiente sección. La velocidad de reversión a la media “ a ” y la tasa de largo plazo “ b ” se estimarán mediante un proceso AR(1); mientras que para la volatilidad “ σ ” se correrá un proceso GARCH(1,1). Lo anterior de acuerdo a los supuestos planteados en el modelo de Vasicek descritos en la sección 3, específicamente en las expresiones (11) y (13).

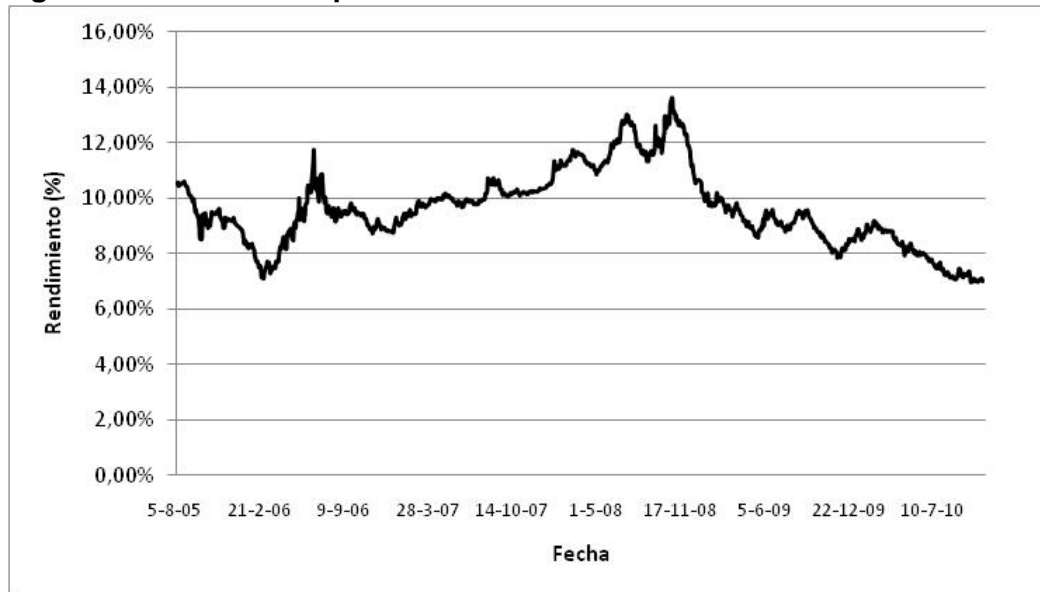
Por otra parte, r_0 ó tasa de interés cuando t es igual a cero (0), es decir, en el momento de realizar la valoración, tomará el valor de 7,08%, cifra que corresponde al rendimiento actual del mercado para el TES escogido.

t = es la maduración de la opción para el bono, la cual será analizada mediante los cuatro escenarios especificados al inicio de esta sección.

T = es la maduración del bono, que para este caso es aproximadamente igual a 9,6932 desde la última cotización analizada en este trabajo, es decir el 5 de noviembre de 2010. Es de aclarar y como ya se mencionó anteriormente, el bono fue emitido el 24 de julio de 2005 con un horizonte a esa fecha de 15 años, es decir, con un vencimiento al 24 de julio de 2020, por lo tanto el tiempo restante de caducidad es el anteriormente citado.

Para realizar análisis adicionales, también se tomarán parámetros ficticios o predeterminados. “ a ” tomará el valor de 0,06. Para contrastar la veracidad de la escogencia, Hull (2006), Choudhry (2005), y Brigo y Mercurio (2006) coinciden en asumir este valor, asimismo, en el caso de una aplicación a un título colombiano, igualmente lo sugieren Grajales y Pérez (2008).

Figura 1. Serie de tiempo de los rendimientos del título TFIT15240720



Fuente: Datos Banco de la República. Gráfico de los autores

Entre tanto, la tasa de largo plazo, “ b ”, tomará el valor de 0,0581. Si bien es cierto que este parámetro también es constante, también cabe resaltar que al ser una función del tiempo, permite ajustar el modelo a cualquier estructura a plazos de tasa de interés, es por eso que de acuerdo al valor que tome el strike, de igual manera se debe ajustar este parámetro. En este aspecto también coinciden Grajales y Pérez (2008).

Finalmente, la volatilidad, “ σ ”, se calculará con una ventana de estimación que dependerá de la maduración “ t ” de la opción, tal y como lo sugiere Lamothe (2003).

Las demás variables de entrada no tomarán valores diferentes a los anteriormente especificados.

5. Los Resultados

5.1. Estimación de los parámetros “ a ” y “ b ”

Como se explicó en la sección 3.1, debido a que el modelo de Vasicek asume un proceso AR(1) para las tasas de interés, es necesario realizar una prueba de estacionariedad antes de estimar los parámetros, los resultados se pueden evidenciar en la tabla A1 de los anexos.

Los entregables antes citados evidencian que la serie de la tasa de interés es no estacionaria en su nivel, mientras que en su primera diferencia, si lo es. Por

tal razón la serie de los tipos de interés para el título valor seleccionado demanda el uso de tratamientos estadísticos adicionales para efectos de análisis econométricos.

Teniendo claro el procedimiento previo, los coeficientes del modelo descrito en (11) resultantes de correr el proceso AR(1), los cuales se describen en la tabla A2 (ver Anexo 2) se deben transformar en términos del modelo (6). De esta manera:

$a = (1 - \beta_0)252$, por lo tanto, $a = (1 - 0,9974)252$, es decir, $a = (0,0026)(250) = \mathbf{0,6552}$.

$b = \alpha_0 / a$, por lo tanto, $b = 0,0521 / 0,6552$, es decir, $\mathbf{b = 0,0795}$.

Según las cifras arrojadas por los cálculos, se evidencia que la velocidad con la cual los rendimientos del bono TFIT15240720 revierten a su media es alta (0,6552), esto supone que una vez la tasa de interés del título analizado se aleja de su nivel de largo plazo 7,95%, tardaría aproximadamente 1,06 años para recorrer la mitad de la brecha que las separa de su nivel de reversión.¹⁶

5.2. Estimación de la Volatilidad “ σ ”

Partiendo de la expresión (13) y la estimación de los parámetros exhibidos en la tabla A3 (ver anexos) la volatilidad requerida en Vasicek será la siguiente:

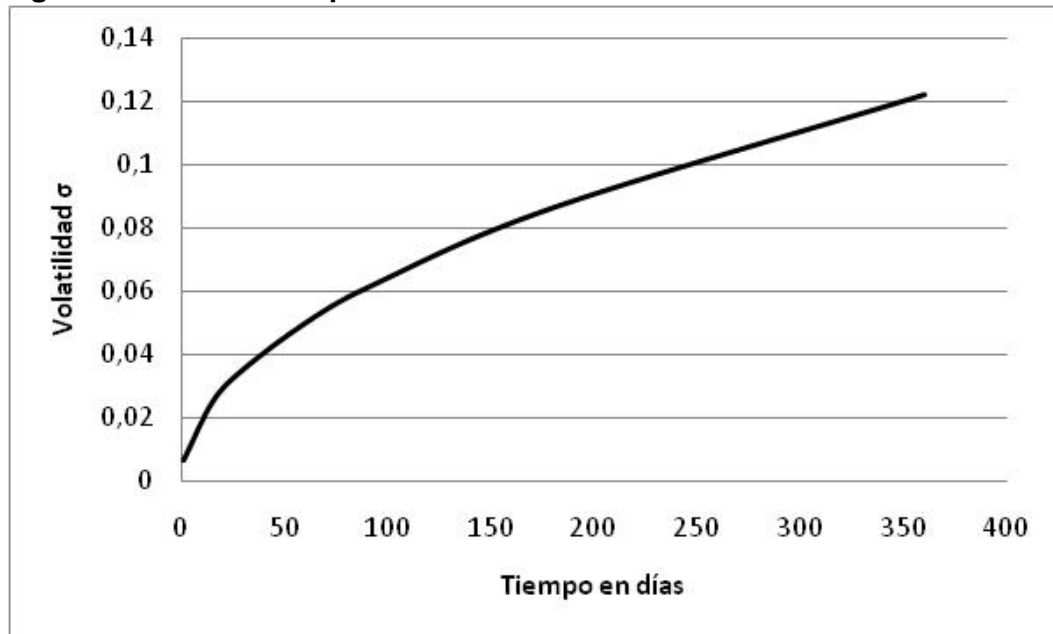
$\sigma_t^2 = 3,96 \times 10^{-8} + 0,0484u_{t-1}^2 + 0,8695\sigma_{t-1}^2$, por lo tanto,

$\sigma_0 = \mathbf{0,0064}$ diaria.

En cuanto a la estructura a plazos de la volatilidad, su tendencia es creciente según la figura 2. A su vez existe una relación directa entre dicha volatilidad y el tiempo.

¹⁶ El mismo análisis es abordado por Botero y Restrepo (2008), basados en Tuckman (2002), quien argumenta que es posible mostrar que la distancia entre el valor actual de una variable y su nivel de reversión de largo plazo decae exponencialmente a una tasa igual a la velocidad de reversión. Con frecuencia, este análisis se cuantifica mediante el indicador *half-life*, $HL = \ln(2)/a$, siendo “a” la velocidad de reversión. Dicho indicador explica cuánto tarda una variable en recorrer la mitad de la distancia que la separa de su nivel de largo plazo.

Figura 2. Estructura a plazos de la Volatilidad “ σ ”



Fuente: Elaboración propia

5.3. Valoración de las Opciones *call* y *put*

El valor de las opciones *call* y *put* a partir de los parámetros estimados econométricamente no arrojan resultados satisfactorios, dado que son alejados de la realidad. En la tabla 6 se puede evidenciar que para una tasa de interés que se ha mantenido en promedio en 7,04% e.a. en las últimas dos semanas (teniendo en cuenta la fecha de valoración), la tasa strike calculada a partir del modelo es de 7,1% e.a., en una opción con vencimiento a 15 días, la prima *call* es de 0,00635 (132,78 en precio y en tasa 6,37%) y la *put* es de 0,00633 (122,38 en precio y en tasa 7,63%). Para una mejor comprensión gráfica, en las figuras 3 y 4 se pueden observar las sensibilidades de las primas *call* y *put* ante cambios en la volatilidad y la velocidad de reversión.

Una posible explicación sobre la no conformidad de los resultados podría corresponder a que los cálculos llevados a cabo a partir de los parámetros a , b y σ estimados econométricamente, no fueron los mejores para el mercado colombiano.

Ante la aseveración anterior, se debe tener en cuenta que el modelo econométrico se basa en la historia de la serie de tiempo de los tipos de interés, por lo tanto, no posee la capacidad de evidenciar cambios estructurales ocasionados por otras variables de la economía que impactan directamente las expectativas de movimiento de la serie a futuro.

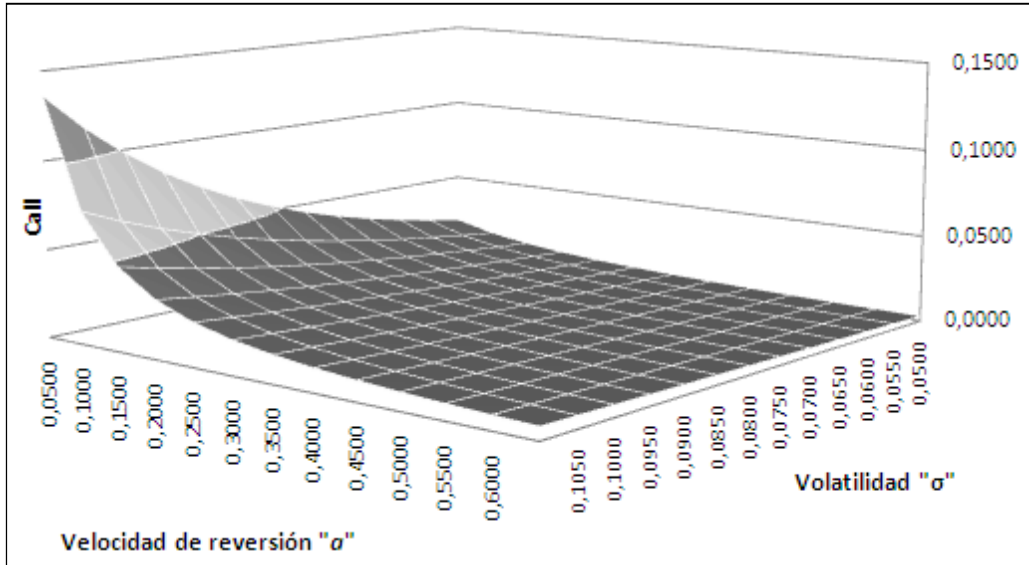
A pesar del inconveniente, los resultados de este estudio coinciden con los encontrados por Restrepo y Botero (2008), quienes utilizaron los modelos de estructura temporal unifactorial de Hull y White (1990), y Black y Karasinski (1991) para aplicaciones en títulos colombianos. Finalmente, ellos concluyen que la estimación de la velocidad de reversión basada en parámetros econométricos no fue satisfactoria, motivo por el cual se vieron en la necesidad de asumir un valor sugerido en otras literaturas y continuar en otros frentes de su investigación. Por otro lado, Grajales y Pérez (2008) en el caso de la valoración de dos bonos corporativos con opción *call* embebida de ISA (Colombia) mediante la metodología de Hull y White (1990), igualmente asumen los parámetros iniciales del modelo con valores referenciados por otros autores por inconsistencias en estimaciones econométricas y la ausencia de métodos de calibración.

De acuerdo a lo anterior, ¿qué posibles cambios de tipo econométrico podrían resolver el problema o mejorar la situación?. Para este caso, se considera que ninguna modificación lo remediaría. El modelo de Vasicek (1977) por definición supone un proceso autorregresivo de orden uno [AR(1)] para la tasa de interés, esto quiere decir que si se realizaran estimaciones de orden superior o de tipo ARMA(p,q) se desvirtuaría el modelo y perdería toda validez. Si se hiciera una prueba con un proceso AR(p), con $p = 2, 3, \dots$, para la evolución de los rendimientos del título estudiado, los parámetros de entrada “*a*” y “*b*” serían negativos, argumentos matemáticamente lógicos, pero paralelamente ilógicos desde la óptica de las necesidades de este estudio.

Pese a los resultados, para enriquecer el análisis será pertinente asumir unos parámetros basados en criterios empíricos, los cuales se abordarán más adelante en esta misma sección.

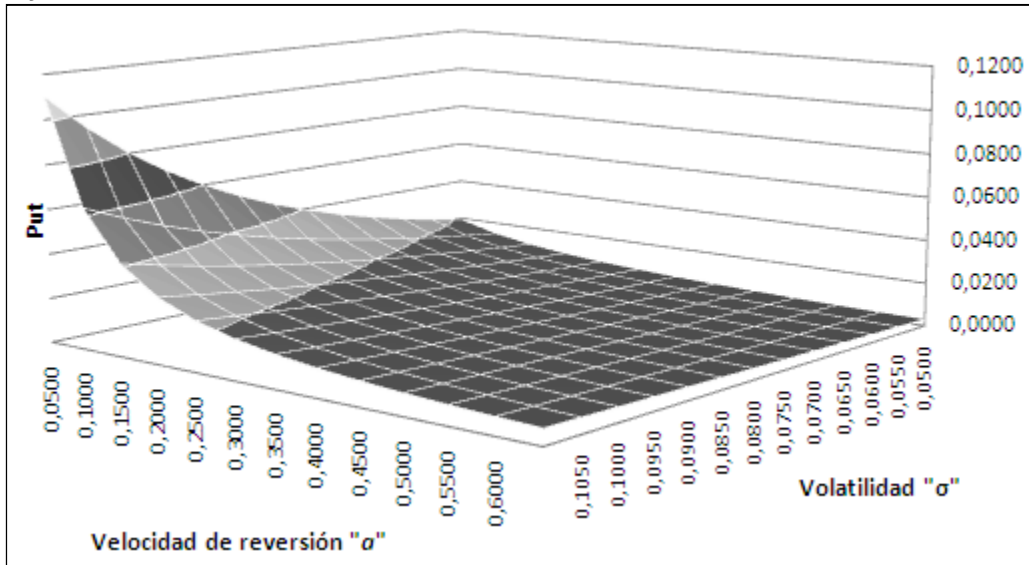
Entre tanto, las figuras 3 y 4, respectivamente, muestran que el valor de una opción *call* al igual que el de una *put* incrementa conforme aumenta la volatilidad y se disminuye la velocidad de reversión a la media. En otras palabras, el valor de la prima de una opción sobre títulos de renta fija es mayor mientras más varíe su rendimiento (tipo de interés) y menor sea el retorno de la tasa a su nivel medio de largo plazo. Este comportamiento es independiente de la consistencia en los resultados obtenidos.

Figura 3. Sensibilidad del precio de la *call* respecto a los parámetros a y σ



Fuente: Elaboración propia

Figura 4. Sensibilidad del precio de la *put* respecto a los parámetros a y σ



Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Resultados obtenidos de la valoración sobre una opción *call* con parámetros estimados econométricamente.

Par/Vcto	15 Días		30 Días		180 Días		1 Año	
a	0,6552		0,6552		0,6552		0,6552	
b	0,0795		0,0795		0,0795		0,0795	
	TASA	PRECIO	TASA	PRECIO	TASA	PRECIO	TASA	PRECIO
Spot	7,0000%	127,3532803	7,0000%	127,3532803	7,0000%	127,3532803	7,0000%	127,3532803
Strike	7,1002%	126,5443426	7,0695%	126,7916345	6,7626%	129,2973062	6,3954%	132,3843882
Call	0,0063519	5,435873759	0,008882	7,637924129	0,019467	17,4052451	0,024424	22,30715573
Nominal		\$ 500.000.000		\$500.000.000		\$500.000.000		\$ 500.000.000
Prima		\$ 34.613.818		\$ 48.635.735		\$110.830.753		\$ 142.044.473

Fuente: Elaboración propia

La información consignada en la tabla anterior deja ver que las primas son muy costosas con respecto al strike y no aplicaría para una cotización de la vida real. No obstante, la razón que explica este patrón de comportamiento puede estar en el hecho de trabajar con una volatilidad relativamente alta, teniendo en cuenta que dicha volatilidad se estimó mediante un método econométrico.

Para dar una mayor claridad a lo que los datos de la Tabla 3 arrojan, se tomará como punto de análisis el vencimiento a 30 días, donde el título se negocia a un precio de 127,35. Según los datos econométricos, el strike sería del 126,54 (in the Money para una *call*), lo cual supone que el comprador como mínimo debe pagar 6,95 pb de prima (diferencial entre strike menos spot en tasa) más la prima de lo que el mercado estima, podría ser la volatilidad en 30 días. Si la prima total de la opción *call* fue de 88,8 pb menos los 6,95 pb del diferencial de la *call* in the Money, la prima asignada según el modelo por una volatilidad de 30 días sería de 81,85 pb, la cual evidentemente resulta muy costosa e improbable según los datos estadísticos del título. Lo que significa esto en dinero es que si se tiene la percepción de que la tasa del título va a caer desde su nivel actual (de otro modo, el precio del título sube), para un título con valor nominal de \$500 millones y valor actual de \$635,42 millones (V/r nominal del título por el precio), el comprador debe pagar una prima de \$48,64 millones lo que representa pagar una prima del 7,64% para un vencimiento de 30 días, es decir, un porcentaje efectivo anual del 141,87%, lo cual y como se mencionó anteriormente no corresponde a la realidad de un mercado eficiente. Sin embargo, uno se podría preguntar, ¿entonces qué es un mercado eficiente para este producto?. Para responder a esta pregunta y realizar las comparaciones respectivas de los anteriores cálculos, nos remitiremos a la cotización de Opciones de la Nota del Tesoro Americano a 10 años cuyo nemotécnico es ZNH1 con vencimiento a 30 días (Febrero 11 de 2010).

Tabla 4. Opción 10-year Treasury Note ZNH1

VCTO	30 DÍAS
	PRECIO
SPOT	120,90625
STRIKE	120,5
CALL	0,55
NOMINAL	100.000
PRIMA USD \$	665

Fuente: www.cmegroup.com

De acuerdo a la anterior tabla, la prima que se cotiza para este título cuyas características en términos de la opción son muy similares a las del título estudiado en este documento, equivale a un 0,55% mensual o del 6,8% efectivo anual en dólares. Si lleváramos esta tasa a pesos por devaluación, nos daría una tasa del 1,29%, la cual es muy baja debido al efecto revaluacionista que tuvo el peso Colombiano en el 2010. Pero, si ajustamos esta tasa de manera que se adicionen los puntos básicos del riesgo país medidos por el EMBI, que para el caso de Colombia está alrededor de 110 pb, resultaría una tasa en pesos del 7,9% anual.

La tasa anual ajustada en pesos de la prima de una opción a 30 días de un título que se transa en un mercado más desarrollado y líquido (7,9%) es mucho más acertada de acuerdo a la estructura de tasas en el mercado para la época y dista enormemente de la tasa arrojada por el modelo cuyos cálculos fueron basados en parámetros econométricos (141,87%).

Por otra parte, una desventaja observada en el modelo es el no permitir ajustes en el strike, dado que Vasicek (1977) lo contempla como una variable de salida. En la realidad, las negociaciones con opciones incluyen la fijación de un precio strike.

Luego, si se consideran los ajustes en los parámetros “*a*”, “*b*” y “*σ*” citados en la sección 4 y anteriormente en esta misma sección, y basados en criterios empíricos llevados a cabo en trabajos anteriores, cuyos autores ya se mencionaron (en la sección 4), los resultados son más satisfactorios para el mercado colombiano (ver tabla 5).

Analizando los resultados de la tabla 5, para el vencimiento a 30 días, se puede observar que, en este caso, el valor a pagar por la prima equivale a un 1,14% mensual o un 14,57% efectivo anual, lo que resulta más consistente y coherente con la estructura de tasas para el mercado Colombiano y aún más, teniendo en cuenta que no hay una justa formación de precios.

Tabla 5. Resultados obtenidos de la valoración sobre una opción *call* con parámetros predeterminados basados en trabajos anteriores (sugeridos).

Par/Vcto	15 Días		30 Días		180 Días		1 Año	
a	0,06		0,06		0,06		0,06	
b	0,0581		0,0581		0,0581		0,0581	
	TASA	PRECIO	TASA	PRECIO	TASA	PRECIO	TASA	PRECIO
Spot	7,0000%	127,0437465	7,0000%	127,0437465	7,0000%	127,0437465	7,0000%	127,0437465
Strike	6,9136%	127,7380958	6,8801%	128,0080717	6,5579%	130,6500294	6,1964%	133,7028425
Call	0,000623	0,936135604	0,001247	1,448177684	0,006579	5,941120454	0,010285	9,189788999
Nominal		\$ 500.000.000		\$500.000.000		\$500.000.000		\$ 500.000.000
Prima		\$ 5.946.509		\$ 9.199.096		\$ 37.739.110		\$ 58.375.261

Fuente: Elaboración propia

Las anteriores cifras estimadas por el modelo y partiendo de parámetros predeterminados, podrían servir de referente para la formación precios de los títulos de renta fija que se negocian en el mercado. Los valores de las primas de una *call* con los cuatro escenarios de vencimiento estudiados no son tan descabellados como ocurrió en los resultados arrojados por la tabla 3.

6. Conclusiones y Recomendaciones

En esta investigación se estimaron los valores de las opciones call y put para un bono del gobierno colombiano con vencimiento en 2020, por medio del modelo de evolución de tasa corta de Vasicek. Para llegar a este punto, se implementó la siguiente ruta:

- Estimación econométrica de los parámetros de entrada: velocidad de reversión “a” y tasa de largo plazo “b” a través de un proceso AR(1).
- Estimación econométrica de la volatilidad “σ” mediante un proceso GARCH(1,1).
- Estimación de la evolución de la tasa de interés utilizando el modelo de Vasicek. mediante un algoritmo en Visual Basic en la hoja electrónica Excel.
- Cálculo del valor de las primas de las opciones call y put usando el modelo de Black76 mediante un algoritmo en Visual Basic en la hoja electrónica Excel.

Para las estimaciones de los parámetros “a”, “b” y “σ” fue necesario el uso del software EViews 5.0 ®. Igualmente para la evolución de las tasas de interés y el cálculo de las primas de las opciones fue necesario implementar un algoritmo de programación en Visual Basic mediante la hoja electrónica Excel 2007 ®. Finalmente en este último programa se realizaron los análisis de sensibilidad que posibilitaron los razonamientos pertinentes.

Los resultados que se obtuvieron a partir de los parámetros estimados econométricamente no fueron los mejores, por lo tanto, el valor de las opciones

no permitieron realizar del todo análisis objetivos. Sin embargo, cuando dichos parámetros se calibraron manualmente basados en criterios predeterminados, las cifras se tornaron más satisfactorias.

Los resultados del trabajo permiten realizar aportes importantes en el proceso de maduración en el tema del uso de instrumentos derivados sobre tipos de interés en Colombia.

Para efectos de investigaciones futuras, se podría abordar la aplicación de una metodología para valorar opciones americanas sobre tipos de interés, incluyendo los árboles binomiales mediante el modelo unifactorial de Vasicek u otros modelos de similares características, tal vez más sofisticados.

De igual manera, posibles trabajos futuros podrían tratar el tema de la calibración de los parámetros velocidad de reversión, tasa de largo plazo y volatilidad para obtener cifras más consistentes con la realidad, debido a que las estimaciones llevadas a cabo en este estudio no arrojaron resultados satisfactorios. Lo anterior, con el ánimo de enriquecer este tipo de temas y avanzar en el aspecto de la introducción y desarrollo del mercado de derivados en Colombia.

Referencias y Bibliografía

ALBANESE, C. and CAMPOLIETI, G., (2006). *Advanced Derivatives Pricing and Risk Management*. Oxford, UK: Elsevier Academic Press.

ARANGO, L. E., MELO, L. F., y VÁSQUEZ, D. M. (2002). “Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia”. *Borradores de Economía* No. 196. Banco de la República.

BEAUMONT, P. (2004). *Financial Engineering Principles A Unified Theory for Financial Product Analysis and Valuation*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

BENNINGA, S. and WIENER, Z. (1998). “Binomial Term Structure Models By Benninga”. *Mathematica in Education and Research*. Vol 7, No. 3, pp. 1 – 10.

BLACK, F. (1976). “The pricing of Commodity Contracts”. *Journal of Financial Economics*, No. 3, pp 167 – 179.

BLACK, F., DERMAN, E., and TOY, W. (1990). “One-Factor Model for Interest Rate Option”. *Financial Analyst Journal*.

- BLACK, F., DERMAN, E., and TOY, W. (1990). "A One-factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options." *Financial Analyst Journal*, Jan-Feb., pp 33 – 39.
- BLACK, F. and KARASINSKI, P. (1991). "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal". *Financial Analyst Journal*, July – Aug., pp 52 – 59.
- BLACK, F. and SCHOLES, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol 81, No. 3. May – Jun, pp 637 – 654.
- Bolsa de Valores de Colombia (2011). Informe Anual "Mercados de la BVC 2010".
- BRENNAN, M. and SCHWARTZ, E. (1979). "A Continuous Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, Vol 35. pp. 405 – 417.
- BRIGO, D. and MERCURIO, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit (2nd ed.)*. Berlin: Springer Verlag.
- BROOKS, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance (2nd. Ed.)*. New York, NY: Cambridge University Press.
- CARMONA, R. and DURRLEMAN, V. (2003). "Pricing and Hedging Spread Options". *Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM – Review*. Vol 45, No. 4, pp. 627-685.
- CHANCE, D. (2003). *Analysis of Derivatives for the CFA Program*. Baltimore, MD: Association for Investment Management and Research – AIMR.
- CHANCE, D. (2008). *Binomial Pricing of Interest Rate derivatives*. Teaching Note 97-14.
- CHEN, R. and SCOTT, L. (1992). "Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-Style Margining", *The Journal of Futures Markets*. Vol 13. pp 15-22.
- CHOUDHRY, M., (2005). *Fixed Income Securities and Derivatives Handbook, Analysis and Valuation*. Princeton, NJ: Bloomberg Press.
- COPELAND, T., WESTON, J., and SHASTRI, K. (2005). *Financial Theory and Corporate Policy (4th ed.)*. Bogotá: Pearson Education.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., and ROSS, S. A. (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53 (2):385-408

- DEWYNNE, J., HOWISON, S., and WILMOTT, P. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. New York, NY: Press Syndicate of the University of Cambridge.
- ERAKER, B. (2010). *The Vasicek Model*. Wisconsin School of Business. Teaching Notes.
- FABOZZI, F. (1996). *The Handbook of Fixed Income Options: Strategies, Pricing and Applications (Revised edition)*. Chicago, IL: IRWIN Professional Publishing.
- FABOZZI, F., (2002). *The Handbook of Financial Instruments*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- GRAJALES, C. A. y PÉREZ, F. O. (2008). *Modelo de Tasa Corta de Hull y White y Valoración de Bonos con Opción Call*. Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.
- HEATH, D., JARROW, R., and MORTON, A. (1990). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, pp 419 – 440.
- HEATH, D., JARROW, R., and MORTON, A. (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation". *Econometrica*, Vol. 60, pp 77 – 105.
- HO, T., and LEE, S. (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, No. 41, pp 1011 – 1029.
- HULL, J. (2006). *Options, Futures and other Derivatives (6th ed.)*. Toronto: Prentice Hall.
- HULL, J., and WHITE, A. (1990). "Pricing Interest-Rate- Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, Vol 3, No. 4, pp. 392 – 573.
- HULL, J., and WHITE, A. (1993). "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 28, No. 2, pp 235–254.
- HULL, J., and WHITE, A. (1993). "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices". *Advances in Futures and Option Research*, Vol. 6, pp 1 – 13.
- ITÔ, K. (1951). "On Stochastic Differential Equations". *Memoirs of American Mathematical Society*, Vol. 4, p 51.

- ILYA, G. (2006). *Fixed-Income Instrument Pricing*. Munich Personal RePEc Archive – MPRA.
- JULIO, J. M., MERA, S. J., y REVÉIZ, A. (2002). “*La Curva Spot (Cero Cupón): Estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos*”. Borradores de Economía No. 213. Banco de la República.
- KLOSE, C., and YUANG, L. C. (2003). *Implementation of the Black, Derman and Toy Model on Bonds*. Seminar Financial Engineering, University of Vienna.
- KUEN, Y., (2008). *Mathematical Models of Financial Derivatives (2da ed.)*. Springer Finance.
- LAMOTHE, P. (2003). *Opciones Financieras y Productos Estructurados (2da ed.)*. Madrid: McGraw-Hill.
- LEIPPOLD, M., and WIENER, Z. (1998). *Algorithms behind Term Structure Models of Interest Rates, Valuation and Hedging of Interest Rate Derivatives with the Ho-Lee Model*.
- LONGSTAFF, F. and SHWARTZ, E. (1992). “Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model”. *The Journal of Finance*, Vol 47, No. 4, pp 1259–1282.
- MARTÍNEZ, J. (2000). “Modelos de No-Arbitraje y Modelos de Equilibrio. Fórmulas de Valoración de Derivados de Tanto de Interés”. *Anales de Economía Aplicada*. XIV Reunión ASEPELT – España, Oviedo. 22 y 23 de Junio.
- MARTÍNEZ, J. y PEDREIRA, L. (2000). *Valoración de Títulos Mediante el Uso de los Procesos Estocásticos*. V Jornadas ASEPUMA. Universidad de la Coruña, España.
- MELO, L. F., y VÁSQUEZ, D. M. (2004). “*Estimación de la Estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones B-spline cúbicas*”. Borradores de Economía No. 210. Banco de la República.
- NELSON, C. and SIEGEL, A. (1987). “Parsimonious Modeling of Yield Curves”, *Journal of Business*, Vol. 70, No. 4, pp 473 – 489.
- RAMÍREZ, F. H. (2007). *Conceptos y Construcción de la Curva de Rendimiento de TES en Colombia con las Metodologías de Nelson-Siegel y Svensson*. Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

RESTREPO, D. A., y BOTERO, J. C. (2008). *Modelos Unifactoriales de Tipo de Interés: Aplicación al Mercado Colombiano*. Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

SVENSSON, L. (1994). *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates*. Sweden 1992 – 1994, NBER Working Paper No. 4871.

TUCKMAN, B. (2002). *Fixed Income Securities: Tools for Today's Market*. Toronto: Wiley

VAN DEVENTER, D. and IMAI, K. (1997). *Financial Risk Analytics*. New York: McGraw-Hill Companies.

VASICEK, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.

WHALEY, R. (2006). *Derivatives Markets, Valuation, and Risk Management*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Anexos

Anexo 1. Pruebas de estacionariedad para la serie de los rendimientos del bono TFIT15240720

Tabla A1. Prueba de Raíces Unitarias para la evolución de tasas de interés del Bono TFIT15240720 05/09/2005 - 05/11/2010. P-valores entre paréntesis.

	<i>Nivel</i>			<i>Primera Diferencia</i>		
	ADF	PP	KPSS	ADF	PP	KPSS
r_t	-1,8025 (0,7032)	-1,2003 (0,9092)	0,8615 +++	-7,5052 *** (0,0000)	-34,1881 *** (0,0000)	0,0984

ADF y PP corresponden a sus respectivos estadísticos de la prueba de estacionariedad de Dickey-Fuller aumentado y Phillips-Perron respectivamente.

KPSS corresponde al estadístico de la prueba de raíces unitarias de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin p-valores entre paréntesis

*** Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 1%

+++ Rechaza la hipótesis nula de un proceso estacionario alrededor de una tendencia a un nivel de significancia del 1%

Fuente: Elaboración propia

Como ya se mencionó en el apartado 5.1, los resultados arrojados por las pruebas evidencian que la serie de la tasa de interés en el rango de tiempo seleccionado es no estacionaria en su nivel, mientras que en su primera diferencia, si lo es.

Anexo 2. Estimación econométrica de los parámetros velocidad de reversión, a , y tasa de largo plazo, b .

Tabla A2. Estimación del modelo (11) mediante un proceso AR(1)

Variable dependiente: r_t	
Estadísticos t entre paréntesis	
Ecuación 10	
MCO	
Constante	0,0521 (0,6213)
r_{t-1}	0,9974 (128,9441) ***
R²	0,9878
R² Ajustado	0,9877
F	16626,58 ***
# de Obs.	208

(*) nivel de significancia: 10%

(**) nivel de significancia: 5%

(***) nivel de significancia: 1%

MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios

Fuente: Elaboración propia

Anexo 3. Estimación Econométrica de la volatilidad “ σ ”.

Tabla A3. Estimación del modelo GARCH(1,1) para el proceso AR(1)

Variable dependiente: r_t	
Estadísticos z entre paréntesis	
Ecuación 12	
ML	
Constante	3,96E-08 (-1,9197) *
u_{t-1}	0,0484 (1,2993)
σ^2_{t-1}	0,8695 (12,6909) ***

(*) nivel de significancia: 10%

(**) nivel de significancia: 5%

(***) nivel de significancia: 1%

ML: Máxima Verosimilitud

Fuente: Elaboración propia

Tabla A4. Pruebas de Autocorrelación de Ljung-Box para los residuos y los residuos al cuadrado del modelo.

Prueba de Ljung-Box para los residuos modelo GARCH(1,1) del proceso AR(1) para la 1ra diferencia (modelo de Vasicek)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat	Prob
1	0,028	0,028	0,993	
2	0,046	0,045	3,572	0,059
3	0,033	0,030	4,917	0,086
4	-0,011	-0,015	5,069	0,167
5	0,037	0,035	6,755	0,149
6	0,014	0,013	7,006	0,220
7	0,070	0,067	13,025	0,043
8	0,023	0,016	13,672	0,057
9	0,065	0,059	18,986	0,015
10	-0,006	-0,016	19,032	0,025

Fuente: Cálculos de los autores

Prueba de Ljung-Box para los residuos al cuadrado modelo GARCH(1,1) del proceso AR(1) para la 1ra diferencia (modelo de Vasicek)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat	Prob
1	0,004	0,004	0,025	
2	-0,007	-0,007	0,083	0,773
3	-0,013	-0,013	0,028	0,869
4	0,008	0,008	0,037	0,947
5	-0,026	-0,026	1,183	0,881
6	0,022	0,022	1,760	0,881
7	-0,047	-0,047	4,514	0,607
8	-0,020	-0,020	5,034	0,656
9	-0,041	-0,040	7,083	0,528
10	-0,020	-0,023	7,605	0,574

Fuente: Cálculos de los autores

Los resultados de las pruebas de autocorrelación muestran que estadísticamente no existe correlación serial de los residuos y residuos al cuadrado de los modelos seleccionados (en su primera diferencia) para órdenes menores a diez rezagos.

Anexo 4. Estructura a plazo del bono con los parámetros estimados econométricamente.

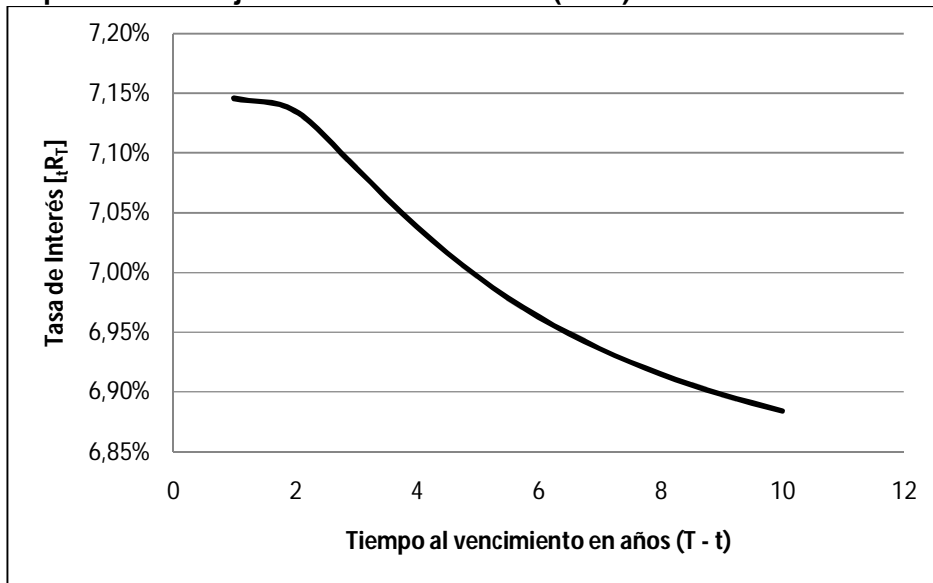
Tabla A5. Estructura a plazos del TFIT15240720 con estimación econométrica de parámetros bajo el modelo de Vasicek (1977).

Tiempo al vencimiento en años ($T - t$)	$B(t, T)$	$A(t, T)$	Valor del Bono Cero-cupón [$P(t, T)$]	Tasa de Interés [r_{R_T}]
1	0,733610829	0,9801	0,931035331	7,15%
2	1,114602946	0,93736459	0,86700965	7,14%
3	1,3124667	0,88625107	0,808457104	7,09%
4	1,415224903	0,83321069	0,754624892	7,04%
5	1,468591161	0,78112189	0,704811102	7,00%
6	1,496306297	0,73122702	0,658511864	6,96%
7	1,510699825	0,68400769	0,615367818	6,94%
8	1,518174934	0,6395903	0,575106686	6,91%
9	1,5220570	0,59793748	0,537507226	6,90%
10	1,524073171	0,5589392	0,502379385	6,88%

Fuente: Cálculos de los autores

La curva tabla A5 y la figura A1 evidencian que la estructura a plazo del título analizado presenta un comportamiento decreciente que es moderado entre los tiempos al vencimiento 1 y 2, y aún más pronunciado a partir de ($T-t$) mayor ó igual a 2. De manera complementaria en un espacio de diez años (específicamente de 1 a 10 años) el rango de variación de Tasa de interés (r_{R_T}) es de 26 puntos básicos (0,26% ó desde 6,88% a 7,15%).

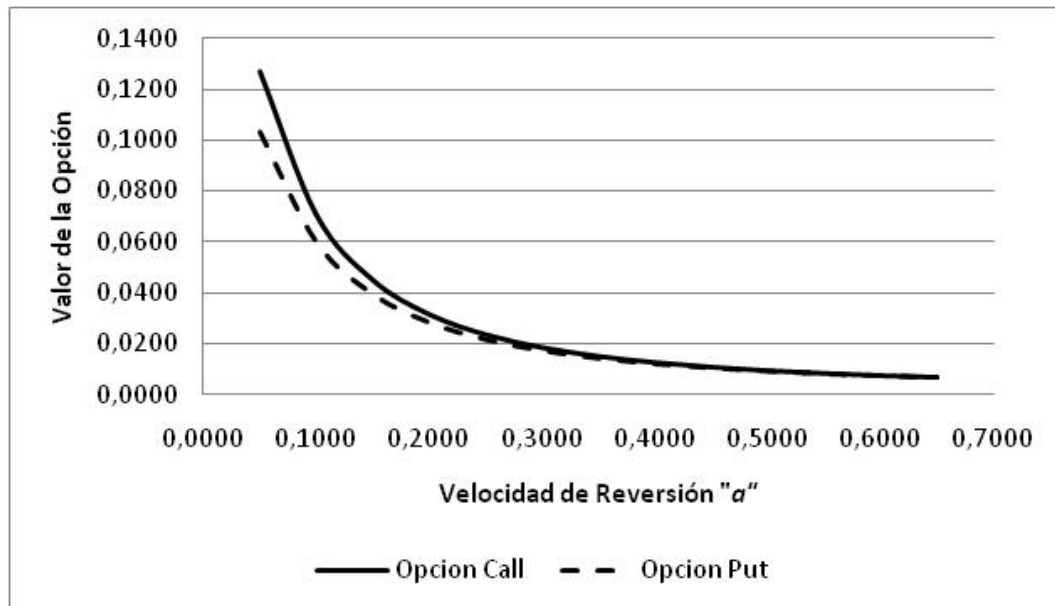
Figura A1. Estructura a plazos del TFIT15240720 con estimación econométrica de parámetros bajo el modelo de Vasicek (1977).



Fuente: Cálculos de los autores

Anexo 5. Análisis de sensibilidad bidimensionales con los principales parámetros del modelo para el TFIT15240720

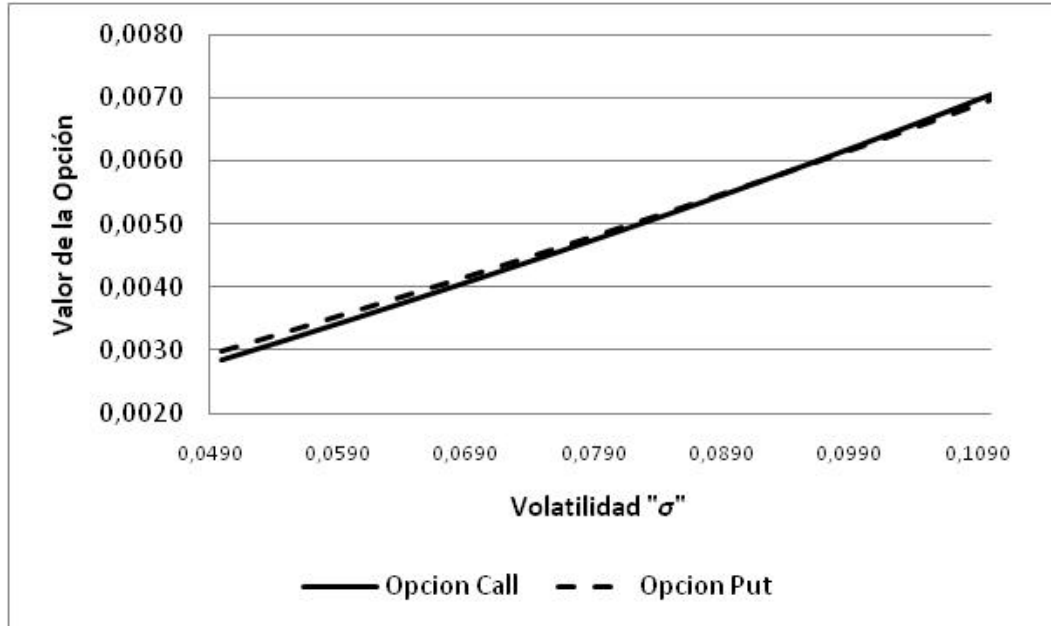
Figura A2. Sensibilidad de los Valores de las Opciones *call* y *put* Vs Velocidad de Reversión



Fuente: Cálculos de los autores

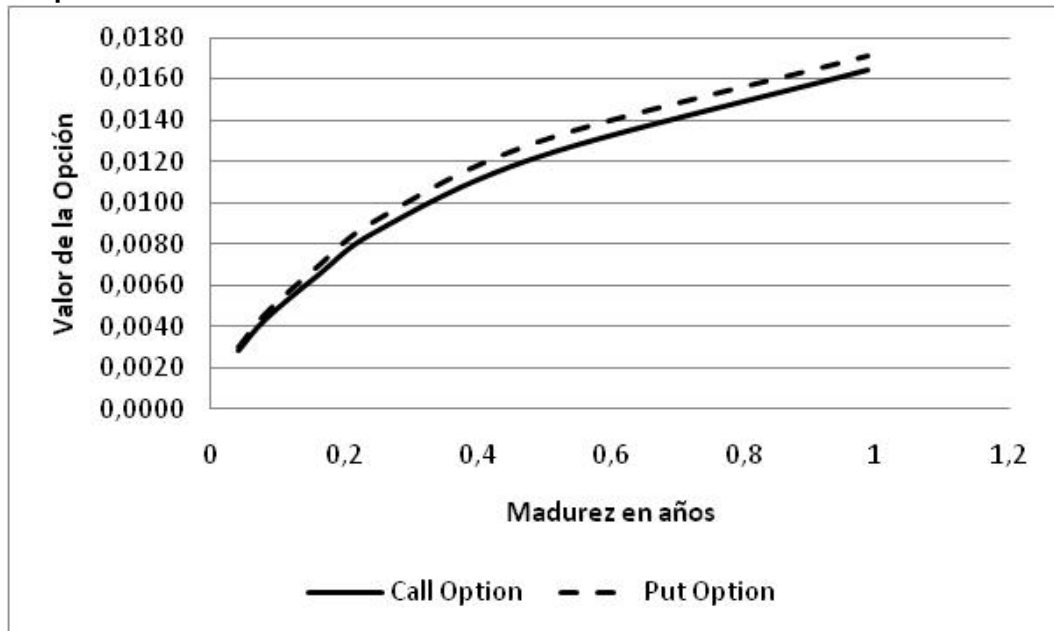
De acuerdo a la figura anterior se puede observar que el valor de las opciones *call* y *put* es altamente sensible a la velocidad de reversión, para este caso, entre mayor sea la reversión a la media, menor es el valor de las opciones.

Figura A3. Sensibilidad de los Valores de las Opciones *call* y *put* Vs Volatilidad



Fuente: Cálculos de los autores

Figura A4. Sensibilidad de los Valores de las Opciones *call* y *put* Vs madurez de la Opción



Fuente: Cálculos de los autores

Las dos figuras anteriores (A3 y A4) dejan ver que existe una relación directa, por un lado, entre la volatilidad de la yield y el valor de las opciones *call* y *put*, y por otro lado, entre la madurez del bono y el valor de las opciones *call* y *put*. La primera relación además marca un crecimiento con concavidad, mientras que la segunda exhibe crecimiento con convexidad.

Anexo 6. Matriz de sensibilidad del valor de las opciones *call* y *put* para el TFIT15240720 con los parámetros estimados econométricamente.

Tabla A6. Matriz de Valoración de una Opción *call* vs Velocidad de reversión y Volatilidad

		VALOR DE UNA OPCIÓN CALL												
		Volatilidad												
		0,0500	0,0550	0,0600	0,0650	0,0700	0,0750	0,0800	0,0850	0,0900	0,0950	0,1000	0,1050	0,1100
Velocidad de Reversión	0,0500	0,0210	0,0246	0,0286	0,0333	0,0387	0,0450	0,0524	0,0611	0,0714	0,0835	0,0980	0,1153	0,1361
	0,1000	0,0154	0,0177	0,0203	0,0231	0,0264	0,0300	0,0341	0,0388	0,0441	0,0503	0,0573	0,0654	0,0747
	0,1500	0,0118	0,0134	0,0152	0,0172	0,0193	0,0216	0,0242	0,0271	0,0303	0,0338	0,0378	0,0423	0,0473
	0,2000	0,0094	0,0106	0,0119	0,0133	0,0148	0,0165	0,0183	0,0202	0,0223	0,0246	0,0271	0,0299	0,0329
	0,2500	0,0077	0,0087	0,0097	0,0108	0,0119	0,0131	0,0144	0,0158	0,0173	0,0189	0,0206	0,0225	0,0246
	0,3000	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0118	0,0128	0,0139	0,0151	0,0164	0,0178	0,0192
	0,3500	0,0055	0,0062	0,0069	0,0076	0,0083	0,0091	0,0099	0,0107	0,0116	0,0125	0,0135	0,0146	0,0157
	0,4000	0,0048	0,0054	0,0060	0,0065	0,0072	0,0078	0,0085	0,0091	0,0099	0,0106	0,0114	0,0122	0,0131
	0,4500	0,0043	0,0047	0,0052	0,0057	0,0063	0,0068	0,0074	0,0080	0,0086	0,0092	0,0098	0,0105	0,0112
	0,5000	0,0038	0,0042	0,0047	0,0051	0,0056	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0081	0,0086	0,0092	0,0098
	0,5500	0,0034	0,0038	0,0042	0,0046	0,0050	0,0054	0,0058	0,0063	0,0067	0,0072	0,0077	0,0082	0,0087
	0,6000	0,0031	0,0035	0,0038	0,0042	0,0045	0,0049	0,0053	0,0057	0,0061	0,0065	0,0069	0,0073	0,0078
	0,6500	0,0029	0,0032	0,0035	0,0038	0,0041	0,0045	0,0048	0,0052	0,0055	0,0059	0,0063	0,0067	0,0070

Fuente: Cálculos de los autores

Tabla A7. Matriz de Valoración de una Opción *put* vs Velocidad de reversión y Volatilidad

		VALOR DE UNA OPCIÓN PUT												
		Volatilidad												
		0,0500	0,0550	0,0600	0,0650	0,0700	0,0750	0,0800	0,0850	0,0900	0,0950	0,1000	0,1050	0,1100
Velocidad de Reversión	0,0500	0,0191	0,0222	0,0256	0,0294	0,0339	0,0390	0,0450	0,0519	0,0600	0,0696	0,0808	0,0941	0,1100
	0,1000	0,0143	0,0164	0,0186	0,0210	0,0238	0,0268	0,0303	0,0341	0,0385	0,0435	0,0492	0,0557	0,0631
	0,1500	0,0112	0,0127	0,0143	0,0159	0,0178	0,0198	0,0220	0,0245	0,0271	0,0301	0,0334	0,0371	0,0413
	0,2000	0,0091	0,0102	0,0114	0,0126	0,0140	0,0154	0,0169	0,0186	0,0204	0,0224	0,0246	0,0269	0,0295
	0,2500	0,0076	0,0084	0,0094	0,0103	0,0113	0,0124	0,0136	0,0148	0,0161	0,0175	0,0190	0,0207	0,0224
	0,3000	0,0064	0,0071	0,0079	0,0087	0,0095	0,0103	0,0112	0,0122	0,0132	0,0143	0,0154	0,0166	0,0179
	0,3500	0,0056	0,0062	0,0068	0,0074	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128	0,0137	0,0147
	0,4000	0,0049	0,0054	0,0059	0,0065	0,0071	0,0076	0,0083	0,0089	0,0095	0,0102	0,0109	0,0117	0,0125
	0,4500	0,0043	0,0048	0,0053	0,0057	0,0062	0,0067	0,0073	0,0078	0,0084	0,0089	0,0095	0,0101	0,0108
	0,5000	0,0039	0,0043	0,0047	0,0051	0,0056	0,0060	0,0065	0,0069	0,0074	0,0079	0,0084	0,0089	0,0095
	0,5500	0,0035	0,0039	0,0043	0,0047	0,0050	0,0054	0,0058	0,0062	0,0067	0,0071	0,0075	0,0080	0,0085
	0,6000	0,0032	0,0036	0,0039	0,0043	0,0046	0,0049	0,0053	0,0057	0,0060	0,0064	0,0068	0,0072	0,0076
	0,6500	0,0030	0,0033	0,0036	0,0039	0,0042	0,0045	0,0049	0,0052	0,0055	0,0059	0,0062	0,0066	0,0070

Fuente: Cálculos de los autores

Las tablas A6 y A7 muestran como el valor de las opciones *call* y *put* aumentan conforme incrementa la volatilidad y cae la velocidad de reversión, aspectos que ya se habían analizado bidimensionalmente en las figuras A2 y A3. La visualización de las cifras contenidas en estas tablas se puede apreciar en las figuras 3 y 4 de este documento (sábanas de precios *call* y *put* Vs parámetros).