Reflexión sobre la aplicabilidad del modelo de Makowitz en la gestión de portafolios de inversión; una propuesta alternativa al cálculo de la covarianza entre dos activos financieros, para seleccionar el portafolio óptimo.

GUILLERMO BUENAVENTURA VERA

Profesor Titular de Tiempo Completo de la Universidad ICESI; PhD (C) Nuevas Tendencias en Administración, Universidad de Salamanca; PhD (en curso) Doctorado en Dirección de Empresas: Estrategia y Organización, Universidad de Valencia; Magíster en Administración de Empresas, Eafit-Icesi; Magíster en Ingeniería Industrial y Sistemas, Universidad del Valle; Especialista en Finanzas, Universidad del Valle; Ingeniero Químico, Universidad del Valle

JHONATAN PARRA HERRERA

Estudiante de Economía y Negocios Internacionales, Simultáneamente con Contaduría y finanzas Internacionales, Semestre 12 de 13; Diplomado en Operación Bursátil, Universidad ICESI en convenio con la bolsa de Valores de Colombia (BVC); ha sido monitor en la universidad ICESI de Laboratorio Financiero, Valor del dinero en el tiempo (MBA), Competencia de la bolsa millonaria, Finanzas Internacionales (Especialización en Finanzas), Finanzas Internacionales (MBA), Valoración de proyectos Financieros (MBA), Mercado Internacional de Capitales (Pregrado), Finanzas Corporativas (MBA), Burkenroad reports: Modelos y reportes en Finanzas (Pregrado), Competencia: trading divisas (pregrado y MBA), Investigador Tesis Maestría en Finanzas (MF), Derivados Financieros (MBA).

RESUMEN

Este trabajo pretende abordar tres objetivos específicos sobre la teoría de portafolios: el primero es mostrar cómo se comporta la precisión predictiva del modelo de Makowitz de acuerdo con el tamaño de la serie de datos involucrados. El segundo es, establecer la relación de la longitud de la serie de datos con el rendimiento real del portafolio. Por último los autores proponen una forma alternativa de calcular la covarianza entre dos activos financieros, y contrastan dichos resultados con los obtenidos del cálculo convencional. Los resultados evidencian que utilizar 60 datos ofrece una mayor presión predictiva que utilizar 30 datos, sin embargo 30 datos ofrece un mayor retorno promedio real.

PALABRAS CLAVES

Covarianza, Portafolio, Frontera Eficiente, Makowitz, Desempeño, Rentabilidad.

ABSTRACT

This project emphasizes three specific objectives regarding portfolio theory, the first is to show, how the predictive accuracy Makowitz model behaves according to the size of the data series, the second is to establish the relationship between the length of the data series and the real portfolio performance, finally, the authors propose an alternative way to calculate the covariance between two financial assets and then contrast the obtained results with conventional calculation results. The results show a greater predictive pressure using sixty data than using thirty data; however thirty data provides on average a higher real return.

KEY WORDS

Covariance, Portfolio, Efficient Frontier, Makowitz, Performance, Profitability.

1. INTRODUCCIÓN

Markowitz con su teoría "*selección de portafolio* (1952)", y su posterior publicación del libro "*Portfolio Selection*, *Efficient Diversification of Investments (1959)",* sentó las bases iniciales para la búsqueda de modelos matemáticos-estadísticos, cuyo fin es lograr identificar la composición optima de un portafolio, brindando al "manager portfolio", las composiciones optimas que le brindan rentabilidades dadas al menor riesgo posible, teniendo en cuenta que dichos cálculos se basan en datos históricos. Posteriormente Sharpe (1963) complemento dicha teoría implementado una razón matemática, con el fin de ubicarse en el punto más óptimo de la frontera eficiente, siendo posible endeudarse a una tasa libre de riesgo.

Se debe tener en cuenta que por mucho que se logre identificar la configuración optima de un portafolio, esta será optima solo para los datos históricos con los que fue calculada, lo cual, implica que para la tranquila utilización de este modelo en la administración de portafolios se debe asumir un supuesto muy fuerte, el cual es pretender que en los periodos posteriores, las rentabilidades de los activos financieros en cuestión se van a comportar de manera similar a como se comportaron en el pasado, es decir, que la rentabilidad histórica, la desviación estándar histórica de estas rentabilidades y covarianza histórica entre los rendimientos de los activos ,se va a comportar en el futuro de manera muy similar al pasado.

Este trabajo pretende, por medio de un estudio, tomando como referencia dos activos financieros que cotizan en la bolsa de valores de Colombia, las acciones de cementos Argos y de Bancolombia, mostrar cuál de las cuatro metodologías para el cálculo de la frontera eficiente usadas en este trabajo ofrece una mejor predictibilidad de los rendimientos futuros, tomando como punto óptimo de la frontera eficiente el indicado por la razón de Sharpe para las cuatro metodologías usadas.

Para establecer cuál de las cuatro metodologías llevadas a cabo en este trabajo tuvo la mejor predictibilidad de los rendimientos futuros, cada metodología fue llevada a cabo 33 veces. Cada una de las veces con datos históricos de periodos diferentes y consecutivos.

La primera de estas cuatro metodologías usada para el cálculo de la frontera eficiente se efectuó tomando como referencia los 30 datos históricos de rentabilidades inmediatamente anteriores al día en que se calcula la frontera eficiente, y calculando la covarianza entre los rendimientos de manera convencional, la segunda metodología al igual que la primera se llevó a cabo tomando 30 datos históricos para el cálculo de la frontera eficiente, con la diferencia de que en esta metodología, la covarianza entre los dos activos financieros se calcula según el planteamiento alternativo propuesto por los autores. La tercera metodología que se realizó en este estudio fue tomando como referencia 60 datos históricos y calculando la covarianza de manera convencional; La cuarta metodología se realizó tomando como referencia los 60 datos inmediatamente anteriores al momento del cálculo de la frontera eficiente y llevando a cabo el cálculo de la covarianza según la novedosa propuesta que los autores proponen.

Gracias a que este estudio se realiza con cuatro metodologías distintas, es posible comparar entre ellas y concluir que método hubiese sido más rentable utilizar para la administración mensual activa de un portafolio compuesto por dos acciones y que metodología tuvo mayor predictibilidad de los rendimientos futuros.

Un Objetivo adicional de este trabajo, es plantear la inquietud al lector, que es posible modificar la manera en como es calculada la frontera eficiente de Markowitz, sin alterar su esencia, en aras de intentar ser más asertivos y rentables con la configuración elegida de los portafolios.

2. METODOLOGÍA USADA

Para la elaboración de este estudio se utilizó los precios históricos de cierre diarios de las acciones Cementos Argos y Bancolombia las cuales cotizan en la bolsa de valores de Colombia, del periodo comprendido entre el primero de marzo del 2007 y el 12 de mayo del 2011. Este rango de datos dio para efectuar 33 fronteras eficientes, para cada una de las cuatro metodologías usadas, partiendo de datos diferentes en cada una de las fronteras eficientes calculadas.

2.1 MEMORIAS DE CÁLCULO[1]

El Cálculo de las rentabilidades diarias, se efectuó de la siguiente manera:

$$Ri = Ln\left(\frac{Pi_{t+1}}{Pi_t}\right)$$

Dónde:

- Ri $\equiv$ Rentabilidad continua del activo i
- $Pi_{t+1} \equiv$ Precio del Activo i en el periodo t+1
- $Pi_t \equiv$ Precio del Activo i en el periodo t

La rentabilidad usada para el cálculo de la frontera eficiente, es una rentabilidad promedio continua de 246 días, en concordancia a que en promedio solo se transan en bolsa 22 de los días calendario del mes.

Se tomó como referencia para la rentabilidad libre de riesgo, la rentabilidad efectiva anual de Los TES con vencimiento en julio del 2020, la cual era del 8.3% E.A el 29 de abril, del 2011, día en el que se corrieron de nuevo todos los cálculos inherentes a este estudio.

[1] Basado en el libro Fundamentos de finanzas internacionales, Guillermo Buenaventura Vera, 2008

Para hallar el punto más óptimo de la frontera eficiente de Markowitz, en las cuatro metodologías llevadas a cabo en este estudio, se utilizó la herramienta de Excel Solver, dándole como factor a maximizar la razón de Sharp, esperando como resultado la composición optima del portafolio, sujeto a dos restricciones: variables resultados no negativas, y la suma de las variables resultado no negativas debe ser igual al 100%.

Esto es:

Max: $S = \frac{(Rp - Rf)}{\sigma p}$

Con: Rp = X1*R1 + X2*R2

$\sigma p = \sqrt{X1^2 * \sigma 1^2 + X2^2 * \sigma 2^2 + 2 * X1 * X2 * \rho 12}$

Sujeto a: X1+X2=1

Dónde: S = Razón de Sharpe

Rp = Rentabilidad del portafolio

Rf = Rentabilidad Libre de Riesgo.

σp = Deviación Estándar Poblacional del Portafolio.

X1 = Proporción a invertir en al activo 1

X2 = Proporción a invertir en al activo 2

2.2 UTILIZACIÓN DE 30 DATOS VERSUS 60 DATOS HISTÓRICOS, PARA EL CÁLCULO DE LA FRONTERA EFICIENTE.

Del planteamiento original de Markowitz “Portfolio Selection” , queda la duda, de que cantidad de datos históricos es más acertado utilizar para el cálculo de la frontera eficiente, lo cual nos indujo a efectuar un estudio empírico en pro de establecer si es mejor utilizar 30 o 60 datos históricos para el cálculo de la frontera eficiente y el punto óptimo de dicha frontera según Sharp.

Para la realización de este estudio se tomó como referencia 30 rentabilidades diarias históricas, para calcular la distribución optima del portafolio según Sharpe, para aplicar esta distribución sobre el portafolio durante los siguientes 30 días bursátiles, esto se realizó 33 veces, es decir una vez por cada periodo de 30 días bursátiles, durante el periodo en estudio (18/01/2007-12/05/2011); este mismo análisis se realizó de igual manera, utilizando 60 rentabilidades históricas diarias, como base para el cálculo de la distribución optima del portafolio para los siguientes 30 días bursátiles, según el punto óptimo de Sharpe.

2.3. PSEUDOCOVARIANZA

Los autores proponen una manera alternativa, de calcular la covarianza entre dos activos, denominada en adelante pseudocovarianza.

Esta propuesta radica en que la reacción de un activo A ante variaciones positivas de un activo B, puede ser distinta en magnitud o dirección ante variaciones negativas del activo B, y viceversa.

Esto es fácil de evidenciar, la afirmación anterior se demuestra calculando la covarianza entre las rentabilidades de dos activos (A y B) de la siguiente manera, calculando primero la covarianza entre los rendimientos positivos del activo A y los rendimientos de B correspondientes a las mismas fechas de los rendimientos positivos de A, luego calculando la covarianza entre los rendimientos negativos del activo A y los rendimientos de B correspondientes a las mismas fechas de los rendimientos negativos de A; en este punto se cuenta con dos covarianzas distintas entre las acciones A y B, la primera es la covarianza entre los rendimientos positivos de A y los rendimientos para las mismas fechas de B, la segunda es la covarianza entre los rendimientos negativos de A y los rendimientos para las mismas fechas de B, evidenciándose pues que ambas covarianzas son distintas.

La metodología alternativa del cálculo de la covarianza entre dos activos propuesta y utilizada en este trabajo tomando como referencia las acciones de Cementos Argos y Bancolombia, en adelante denotadas como C y B respectivamente, es la siguiente:

1. Partido de n datos históricos de las rentabilidades diarias de los activos C y B, se procede calcular la covarianza entre las rentabilidades positivas C y las rentabilidades que obtuvo B en esas mismas fechas en que C obtuvo sus rentabilidades positivas. Esta correlación la llamaremos de ahora en adelante C+.

2. Se calcula la covarianza entre las rentabilidades negativas de C y las rentabilidades obtenidas por B en esas mismas fechas en que C obtuvo sus rentabilidades negativas. Esta correlación la llamaremos de ahora en adelante C-.

3. Se calcula la covarianza entre las rentabilidades positivas de B y las rentabilidades que obtuvo C en esas mismas fechas en que B obtuvo sus rentabilidades positivas. Esta correlación la llamaremos de ahora en adelante B+.

4. Se calcula la covarianza entre las rentabilidades negativas de B y las rentabilidades obtenidas por C en esas mismas fechas en que B obtuvo sus rentabilidades negativas. Esta correlación la llamaremos de ahora en adelante B-.

En este punto del proceso se cuenta con 4 pseudocovarianzas: C+, C-, B+ y B-

5. Luego se procede a calcular la proporción de las veces que C obtuvo rentabilidades positivas durante el periodo de n rentabilidades en cuestión, esta proporción la denotaremos: C%+

6. Posteriormente se procede a calcular la proporción de las veces que C obtuvo rentabilidades negativas durante el periodo de n rentabilidades en cuestión, esta proporción la denotaremos: C%-

7. De igual forma se procede a calcular la proporción de las veces que B obtuvo rentabilidades positivas y negativas durante el periodo de n rentabilidades en cuestión, denotando estas proporciones respectivamente como B%+ y B%-.

8. Finalmente se calcula la pseudocovarianza final ponderada.

Pseudocovarianza ponderada referencia C = ((C+)*(C%+)+(C-)*(C%-))

Pseudocovarianza ponderada referencia B = ((B+)*(B%+)+(B-)*(B%-))

Pseudocovarianza ponderada final = ((Pseudocovarianza ponderada referencia C) + (Pseudocovarianza ponderada referencia B))/2

Pseudocovarianza ponderada final = Pc Pond F

Pc Pond F= ((C+)*(C%+)+(C-)*(C%-))*50%+((B+)*(B%+) + (B-)*(B%-))*50%

La razón por la cual se pondera dándole igual peso (50%) a la Pseudocovarianza ponderada referencia C y a la Pseudocovarianza ponderada referencia B, es porque no se asume para este análisis que el movimiento de ninguna de las dos acciones lidere a la otra.

Una vez obtenida la Pseudocovarianza ponderada final, esta se usa para el cálculo de la frontera eficiente y la posterior elección del punto óptimo sobre la frontera propuesto por Sharpe.

2.4 ELECCIÓN DE LA METODOLOGÍA CON MEJOR PREDICTIBILIDAD DE LOS RENDIMIENTO FUTUROS

Para establecer cuál de las cuatro metodologías llevadas a cabo en este trabajo tuvo la mejor predictibilidad de los rendimientos futuros, cada metodología fue llevada a cabo 33 veces, con datos históricos de periodos diferentes con igual cantidad de datos y se procedió a calcular la sumatoria de las diferencias al cuadrado de cada una de las 33 veces, entre la rentabilidad esperada según la distribución óptima indicada por el punto óptimo de Sharp sobre la frontera eficiente, y la rentabilidad real obtenida durante los siguientes 30 días bursátiles con esta distribución óptima.

3. RESULTADOS Y HALLAZGOS

Para determinar la precisión de la predictibilidad de las cuatro metodologías propuestas y usadas en este estudio, se realizó, la sumatoria de las diferencias al cuadrado, entre la rentabilidad esperada en el punto óptimo de Sharp y las rentabilidades reales logradas en este punto óptimo, de cada una de las 33 iteraciones, obteniendo como resultado la siguiente tabla comparativa:

Tabla 1

Σ (R Real - R Est)^2	Covarianza	Pseudocovarianza
30 Dìas	40,832816	38,766610
60 Dìas	24,808224	24,179169

De la cual se puede deducir que tanto para la metodología con covarianza convencional y la metodología con pseudocovarianza ponderada propuesta por los autores, se obtuvo una predictibilidad de los rendimientos futuros más precisa a partir de 60 datos de rentabilidades logarítmicas diarias, que de 30.

También se puede apreciar de los resultados que al utilizarse la pseudocovarianza calculada de la forma propuesta por los autores se obtuvieron rentabilidades reales más cercanas a las esperadas según la distribución óptima indicada por el punto óptimo de Sharp sobre la frontera eficiente, que al utilizar la covarianza calculada de la manera convencional.

De los resultados anteriores se evidencia que la metodología con resultados reales obtenidos más cercanos a los esperados según la distribución óptima indicada por el punto óptimo de Sharp sobre la frontera eficiente, fue la metodología con 60 datos históricos y con el cálculo de la pseudocovarianza según la metodología alternativa propuesta por los autores.

Con el fin de establecer cuál de las cuatro metodologías aplicadas a un portafolio compuesto por dos activos financieros, Cementos Argos y Bancolombia, durante 33 periodos consecutivos, cada uno compuesto por 30 días bursátiles, hubiese sido la más rentable, se calculó la rentabilidad promedio de cada metodología obtenida durante los 33 periodos, obteniendo como resultado la siguiente tabla:

Tabla 2

Pormedio Rentabilidad Obtenida	Covarianza	Pseudocovarianza
30 Dìas	5,14%	6,18%
60 Dìas	1,66%	1,45%

Se obtuvo como resultado que utilizando 30 en vez de 60 datos se lograba mejor rentabilidad promedio entre los 33 periodos, y que la metodología que obtuvo mejor rentabilidad promedio entre los 33 periodos, fue la metodología con 60 datos históricos y con el cálculo de la pseudocovarianza según la metodología alternativa propuesta por los autores.

Otros resultados interesantes salen de la comparación ente las metodologías con el fin de establecer cual metodología supera más veces en rentabilidad real a las otras metodologías, para ello se elaboró dos cuadros comparativos:

Método usando 30 rentabilidades diarias logarítmicas históricas Vs. Método usando 60 rentabilidades diarias logarítmicas históricas:

Tabla 3

30 Datos Historicoss Vs. 60 Datos Historicos	Covarianza	Pseudocovarianza
Proporcion de las veces que 30 Datos presento Mayor rentabilidad real que 60 Datos	24,24%	30,30%
Proporcion de las veces que 60 Datos presento Mayor rentabilidad real que 30 Datos	27,27%	27,27%
Proporcion de las veces que ambos metodos presentaron igual rentabilidad	48,48%	42,42%
	100,00%	100,00%

De este cuadro comparativo se puede concluir que calculando la covarianza de manera convencional, el 27.27% de las veces, se logró mejor rentabilidad real usando 60 datos históricos versus 30 datos históricos; el 24.24% de las veces se logró mejor rentabilidad real usando 30 datos históricos versus 60 datos históricos y el 48.8% de las veces se obtuvo igual rentabilidad real entre los dos métodos.

Usando el método alternativo propuesto por los autores para el cálculo de la pseudocovarianza, el 30.30% de las veces, se logró mejor rentabilidad real usando 30 datos históricos versus 60 datos históricos; el 27.27% de las veces se logró mejor rentabilidad usando 60 datos históricos versus 30 datos históricos y el 48.8% de las veces se obtuvo igual rentabilidad real entre los dos métodos.

Método Convencional del cálculo de la covarianza Vs Método alternativo propuesto por los autores del cálculo de la pseudocovarianza:

Tabla 4

Covarianza Vs. Pseudocovarianza	30 Datos	60 Datos
Proporcion de las veces que "Covarianza" presento Mayor rentabilidad real que "Pseudocovarianza"	15,15%	15,15%
Proporcion de las veces que "Pseudocovarianza" presento Mayor rentabilidad real que "Covarianza"	18,18%	12,12%
Proporcion de las veces que ambos metodos presentaron igual rentabilidad real	66,67%	72,73%
	100,00%	100,00%

De este cuadro comparativo se puede concluir que usando 30 rentabilidades diarias logarítmicas históricas, el 18.18% de las veces, se logró mejor rentabilidad real calculando la pseudocovarianza según método alternativo presentado por los autores Vs la forma convencional de calcular la covarianza; el 15.15% de las veces se logró mejor rentabilidad calculando la covarianza de manera convencional Vs calculando la pseudocovarianza según método alternativo presentado por los autores y el 66.67% de las veces se obtuvo igual rentabilidad real entre los dos métodos de calcular la covarianza.

Usando 60 rentabilidades diarias logarítmicas históricas, el 15.15% de las veces, se logró mejor rentabilidad real calculando la covarianza según la forma convencional Vs. método alternativo de cálculo de la pseudocovarianza presentado por los autores, el 12.12% de las veces se logró mejor rentabilidad usando el método alternativo de cálculo de la pseudocovarianza presentado por los autores Vs calculando la covarianza según la forma convencional y el 72.73% de las veces se obtuvo igual rentabilidad real entre los dos métodos de calcular la covarianza.

Vale la pena aclarar que la mayoría de las veces en que los métodos presentaron igual rentabilidad real, se debe a que no hubo diversificación, a causa de que el punto óptimo de Sharp se conseguía al invertir el 100% en una acción y el 0% en la otra. (Ver tabla 9, Anexos).

4. CONCLUSIONES

Como hallazgos generales se tiene que para estas dos acciones durante el periodo en cuestión, utilizando 60 rentabilidades diarias logarítmicas históricas para el cálculo de la frontera eficiente y elección de la distribución optima del portafolio dada por el punto óptimo según la razón de Sharpe, se logra una mayor predictibilidad de los rendimientos reales (Rendimientos esperados menos distantes de los reales) que utilizando 30 rentabilidades diarias logarítmicas históricas, sin embargo los mejores rendimientos reales promedio se obtienen utilizando 30 rentabilidades diarias logarítmicas históricas, en vez de 60.

Como hallazgo interesante se tiene que al utilizarse la pseudocovarianza calculada de la forma propuesta por los autores se obtuvieron rentabilidades reales más cercanas a las esperadas según la distribución óptima indicada por el punto óptimo de Sharp sobre la frontera eficiente, que al utilizar la covarianza calculada de la manera convencional.

Este trabajo al igual que el propuesto por Eduardo Acosta González y Beatriz Gonzales Lopez-Valcarcel, "Formación de carteras con riesgo condicionado. Una aplicación empírica al mercado de valores español", proponen llevar a cabo metodologías alternas a la metodología convencional planteada por Markowitz, para el cálculo de la frontera eficiente, por medio de una manera alternativa de calcular la covarianza entre activos financieros, sin salirse de la esencia del modelo planteado por Markowitz.

5. ANEXOS.

Tabla 5

	Covarianza				
	30 Datos				
	X1	X2	R Optimo sharpe	R Real	(Real-Estimado)^2
1	0,00%	100,00%	15,34%	7,20%	0,006633
2	0,00%	100,00%	10,80%	57,33%	0,216532
3	62,44%	37,56%	156,65%	-9,40%	2,757078
4	100,00%	0,00%	1,05%	9,01%	0,006339
5	100,00%	0,00%	13,51%	32,53%	0,036141
6	0,00%	100,00%	58,36%	-75,80%	1,800109
7	0,00%	100,00%	-124,12%	-23,01%	1,022347
8	100,00%	0,00%	-29,43%	36,65%	0,436768
9	100,00%	0,00%	47,77%	7,49%	0,162212
10	0,00%	100,00%	45,01%	-54,44%	0,989150
11	0,00%	100,00%	-65,22%	53,89%	1,418611
12	37,57%	62,43%	91,08%	-26,33%	1,378515
13	0,00%	100,00%	-29,75%	-164,75%	1,822494
14	100,00%	0,00%	-210,86%	82,93%	8,631126
15	17,50%	82,50%	245,67%	-65,05%	9,654741
16	0,00%	100,00%	-89,82%	-40,17%	0,246564
17	100,00%	0,00%	104,50%	107,73%	0,001037
18	75,20%	24,80%	145,53%	36,71%	1,184168
19	0,00%	100,00%	142,10%	102,01%	0,160745
20	20,47%	79,53%	136,24%	76,21%	0,360346
21	0,47%	99,53%	120,90%	-66,61%	3,516054
22	100,00%	0,00%	18,82%	46,35%	0,075839
23	57,95%	42,05%	64,94%	2,73%	0,386943
24	0,00%	100,00%	62,44%	12,70%	0,247372
25	16,47%	83,53%	34,75%	-43,61%	0,614099
26	100,00%	0,00%	-2,36%	38,94%	0,170607
27	100,00%	0,00%	63,92%	42,09%	0,047645
28	100,00%	0,00%	71,17%	59,67%	0,013229
29	44,74%	55,26%	96,82%	-32,76%	1,679135
30	100,00%	0,00%	-5,45%	14,09%	0,038172
31	100,00%	0,00%	15,65%	-65,14%	0,652631
32	0,00%	100,00%	-62,37%	14,40%	0,589420
33	100,00%	0,00%	67,36%	-4,06%	0,510014
			Promedio:	5,14%	40,832816 Σ

Tabla 6

	Covarianza				
	60 Datos				
	X1	X2	R Optimo sharpe	R Real	(Real-Estimado)^2
1	0,00%	100,00%	-41,94%	7,20%	0,241424
2	0,00%	100,00%	13,07%	57,33%	0,195898
3	15,13%	84,87%	50,85%	-15,97%	0,446451
4	100,00%	0,00%	97,53%	9,01%	0,783562
5	100,00%	0,00%	7,28%	32,53%	0,063727
6	75,45%	24,55%	23,92%	-90,49%	1,308909
7	0,00%	100,00%	-32,88%	-23,01%	0,009739
8	0,00%	100,00%	-97,01%	-34,73%	0,387812
9	100,00%	0,00%	9,17%	7,49%	0,000280
10	100,00%	0,00%	30,64%	-113,64%	2,081600
11	0,00%	100,00%	-10,10%	53,89%	0,409489
12	0,00%	100,00%	5,89%	-19,84%	0,066180
13	76,55%	23,45%	29,84%	-121,32%	2,284951
14	100,00%	0,00%	-130,93%	82,93%	4,573377
15	0,00%	100,00%	8,99%	-59,88%	0,474280
16	0,00%	100,00%	87,64%	-40,17%	1,633454
17	100,00%	0,00%	-11,48%	107,73%	1,421036
18	100,00%	0,00%	130,99%	18,65%	1,262009
19	44,43%	55,57%	112,32%	103,08%	0,008550
20	30,09%	69,91%	122,12%	74,10%	0,230628
21	14,94%	85,06%	126,68%	-56,60%	3,359225
22	100,00%	0,00%	53,95%	46,35%	0,005762
23	100,00%	0,00%	46,70%	-27,84%	0,555681
24	0,00%	100,00%	57,04%	12,70%	0,196551
25	0,00%	100,00%	48,21%	-49,75%	0,959661
26	100,00%	0,00%	18,13%	38,94%	0,043322
27	100,00%	0,00%	30,78%	42,09%	0,012799
28	100,00%	0,00%	67,54%	59,67%	0,006201
29	77,62%	22,38%	77,08%	-13,51%	0,820709
30	100,00%	0,00%	47,74%	14,09%	0,113269
31	100,00%	0,00%	5,10%	-65,14%	0,493310
32	0,00%	100,00%	-36,56%	14,40%	0,259688
33	0,00%	100,00%	-27,06%	4,35%	0,098689
			Promedio:	1,66%	24,808224 Σ

Tabla 7

	Pseudocovarianza				
	30 Datos				
	X1	X2	R Optimo sharpe	R Real	(Real-Estimado)^2
1	0,00%	100,00%	15,34%	7,20%	0,006633
2	0,00%	100,00%	10,80%	57,33%	0,216532
3	54,71%	45,29%	148,96%	-10,47%	2,541724
4	100,00%	0,00%	1,05%	9,01%	0,006339
5	100,00%	0,00%	13,51%	32,53%	0,036141
6	25,74%	74,26%	52,96%	-80,81%	1,789527
7	0,00%	100,00%	-124,12%	-23,01%	1,022347
8	100,00%	0,00%	-29,43%	36,65%	0,436768
9	100,00%	0,00%	47,77%	7,49%	0,162212
10	0,00%	100,00%	45,01%	-54,44%	0,989150
11	0,00%	100,00%	-65,22%	53,89%	1,418611
12	38,10%	61,90%	91,28%	-26,43%	1,385390
13	0,00%	100,00%	-29,75%	-164,75%	1,822494
14	100,00%	0,00%	-210,86%	82,93%	8,631126
15	17,72%	82,28%	245,42%	-65,11%	9,643322
16	0,00%	100,00%	-89,82%	-40,17%	0,246564
17	100,00%	0,00%	104,50%	107,73%	0,001037
18	60,44%	39,56%	138,42%	47,46%	0,827403
19	30,61%	69,39%	108,91%	102,74%	0,003800
20	38,61%	61,39%	133,47%	72,23%	0,375048
21	35,37%	64,63%	109,75%	-42,46%	2,316759
22	100,00%	0,00%	18,82%	46,35%	0,075839
23	49,92%	50,08%	63,09%	8,57%	0,297247
24	0,00%	100,00%	62,44%	12,70%	0,247372
25	23,49%	76,51%	35,08%	-41,00%	0,578750
26	100,00%	0,00%	-2,36%	38,94%	0,170607
27	100,00%	0,00%	63,92%	42,09%	0,047645
28	100,00%	0,00%	71,17%	59,67%	0,013229
29	45,68%	54,32%	96,89%	-32,21%	1,666759
30	100,00%	0,00%	-5,45%	14,09%	0,038172
31	100,00%	0,00%	15,65%	-65,14%	0,652631
32	0,00%	100,00%	-62,37%	14,40%	0,589420
33	100,00%	0,00%	67,36%	-4,06%	0,510014
			Promedio:	6,18%	38,766610 Σ

Tabla 8

	Pseudocovarianza				
	60 Datos				
	X1	X2	R Optimo sharpe	R Real	(Real-Estimado)^2
1	0,00%	100,00%	-41,94%	7,20%	0,241424
2	0,00%	100,00%	13,07%	57,33%	0,195898
3	26,05%	73,95%	49,53%	-14,45%	0,409409
4	88,90%	11,10%	90,98%	6,47%	0,714258
5	100,00%	0,00%	7,28%	32,53%	0,063727
6	59,41%	40,59%	22,92%	-87,37%	1,216385
7	0,00%	100,00%	-32,88%	-23,01%	0,009739
8	0,00%	100,00%	-97,01%	-34,73%	0,387812
9	100,00%	0,00%	9,17%	7,49%	0,000280
10	100,00%	0,00%	30,64%	-113,64%	2,081600
11	0,00%	100,00%	-10,10%	53,89%	0,409489
12	0,00%	100,00%	5,89%	-19,84%	0,066180
13	55,35%	44,65%	28,12%	-133,35%	2,607258
14	100,00%	0,00%	-130,93%	82,93%	4,573377
15	0,00%	100,00%	8,99%	-59,88%	0,474280
16	0,00%	100,00%	87,64%	-40,17%	1,633454
17	100,00%	0,00%	-11,48%	107,73%	1,421036
18	100,00%	0,00%	130,99%	18,65%	1,262009
19	48,61%	51,39%	111,06%	103,18%	0,006217
20	44,34%	55,66%	113,31%	70,97%	0,179256
21	38,31%	61,69%	121,16%	-40,43%	2,610999
22	100,00%	0,00%	53,95%	46,35%	0,005762
23	100,00%	0,00%	46,70%	-27,84%	0,555681
24	2,40%	97,60%	55,97%	12,69%	0,187314
25	0,00%	100,00%	48,21%	-49,75%	0,959661
26	100,00%	0,00%	18,13%	38,94%	0,043322
27	100,00%	0,00%	30,78%	42,09%	0,012799
28	100,00%	0,00%	67,54%	59,67%	0,006201
29	60,39%	39,61%	70,18%	-23,60%	0,879385
30	100,00%	0,00%	47,74%	14,09%	0,113269
31	100,00%	0,00%	5,10%	-65,14%	0,493310
32	0,00%	100,00%	-36,56%	14,40%	0,259688
33	0,00%	100,00%	-27,06%	4,35%	0,098689
			Promedio:	1,45%	24,179169 Σ

Tabla 9	Covarianza		Pseudocovarianza	
	Diversifica	No diversifica	Diversifica	No diversifica
30 Datos	27,27%	72,73%	33,33%	66,67%
60 Datos	21,21%	78,79%	27,27%	72,73%

Referencias Bibliográficas:

- MARKOWITZ, H. (1952): «Portfolio selection». *Journal of Finance, vol. 7, n. º 1, marzo, pp. 77-91.*

- Sharpe, W.F (1963): “A Simplified Model for Portfolio Analysis”, Management Science 9. 277-293.

- Eduardo Acosta González y Beatriz Gonzales Lopez-Valcarcel, “Formación de carteras con riesgo condicionado. Una aplicación empírica al mercado de valores español”, Revista española de financiación y contabilidad, volumen XXVIII, n 102. Octubre-diciembre 1999 pp.937-966

- Fundamentos de finanzas internacionales, Guillermo Buenaventura Vera, 2008.