Taller #1
Econometría 06169
Grupo 1

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Dos dados son lanzados al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada; un dado es de color azul y el otro de color rojo. Definamos:

- X el número en la cara superior del dado azul después de lanzado ***multiplicado por 3***,
- Y el número en la cara superior del dado rojo después de lanzado ***dividido por 3***,
- Z la suma del número en la cara superior de cada uno de los dos dados después de ser lanzados,
- W = XZ.

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $E(Y)$ $E(Z)$ $E(W)$

1.2 $Var(X)$ $Var(Y)$ $Var(Z)$ $Var(W)$

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

2. Considere las siguientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo, no use calculadora!!)

$A^T A$ $(A)^{-1}$ $A \cdot B$ $A^T y$ $y^T y$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$\left|A^T A\right|$ $|A|$

3. Pruebe que $Cov(X,Y) \equiv E(XY) - E(X) E(Y)$

4. Pruebe que $Var(aX) \equiv a^2 \cdot Cov(X,Y)$

Respuestas Sugeridas al Taller #1
Econometría 06169
Grupo 1

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Dos dados son lanzados al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada; un dado es de color azul y el otro de color rojo. Definamos:
- X el número en la cara superior del dado azul después de lanzado ***multiplicado por 3***,
- Y el número en la cara superior del dado rojo después de lanzado ***dividido por 3***,
- Z la resta del número en la cara superior de cada uno de los dos dados después de ser lanzados,
- W = XZ.

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1

Sean D_A y D_R variables aleatorias que toma el valor que aparezca en la cara superior del dado azul y rojo despues de lanzado, respectivamente. Así, los posible valores de D_A son $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Recuerden que $E(D_A) = \sum_{i=1}^{n} d_{Ai} \cdot P(d_{Ai})$ .Entonces, $E(D_A) = \frac{7}{2}$ (En el archivo de PowerPoint de la presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo). Similarmente, $E(D_R) = \frac{7}{2}$.

Entonces,

a. Como $X = 3D_A$, tenemos que $E(X) = E(3D_A) = 3\frac{7}{2} = \frac{21}{2}$

b. Ahora note que $Y = \frac{1}{3}D_R$. Entonces $E(Y) = E\left(\frac{1}{3}D_R\right) = \frac{1}{3} \cdot E(D_R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{6}$

c. Por definición tenemos que $Z = D_A + D_R$ (o si quieren $Z = \frac{X}{3} + 3Y$). Luego

$$E(Z) = E(D_A + D_R) = E(D_A) + E(D_R) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7 .$$

d. Note que $W = X\cdot Z = X\cdot\left(D_A + D_R\right) = 3\cdot D_A\cdot\left(D_A + D_R\right) = 3\cdot\left[\left(D_A\right)^2 + D_A\cdot D_R\right]$. De esta forma, $E(W) = E\left[3\cdot\left[\left(D_A\right)^2 + D_A\cdot D_R\right]\right] = 3\cdot\left[E\left[\left(D_A\right)^2\right] + E\left(D_A\cdot D_R\right)\right]$. Así pues necesitamos calcular $E\left[\left(D_A\right)^2\right]$ y $E\left(D_A\cdot D_R\right)$. En clase vimos que $E\left[\left(D_A\right)^2\right] = \frac{91}{6}$(ver presentción #1). Además, es bastante intuitivo reconocer que D_A y D_R son variables aleatorias independientes, luego $E\left(D_A\cdot D_R\right) = E\left(D_A\right)E\left(D_R\right)$. La prueba de esto se presenta al final en el Apendice 1.

Ahora bien, ya tenemos todos los elementos para encontrar $E(W)$. Es decir,
$E(W) = 3\cdot\left[E\left[\left(D_A\right)^2\right] + E\left(D_A\cdot D_R\right)\right] = 3\cdot\left[\frac{91}{6} + \left(\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}\right)\right] = \frac{329}{4}$.

1.2 $\mathrm{Var}(X)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(Y)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(Z)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(W)$

a. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(3\,D_A\right) = 9\,\frac{35}{12} = \frac{105}{4}$.(En el archivo de PowerPoint de la presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo)

b. $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{3}D_R\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\mathrm{Var}\left(D_R\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{108}$

c. Como $Z = D_A + D_R$, entonces
$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\left(D_A + D_R\right) = \mathrm{Var}\left(D_A\right) + \mathrm{Var}\left(D_R\right) + 2\cdot\mathrm{Cov}\left(D_A, D_R\right)$. Como D_A y D_R son variables aleatorias independientes entonces $\mathrm{Cov}\left(D_A, D_R\right) = 0$. Por lo tanto,
$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\left(D_A\right) + \mathrm{Var}\left(D_R\right) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = 2\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{6}$

d. Ahora note que $\mathrm{Var}(W) = E\left(W^2\right) - \left(E(W)^2\right)$. Ya encontramos que $E(W) = \frac{329}{4}$, sólo nos falta encontrar $E\left(W^2\right)$. Hagamos este cálculo, pero primero tenemos que identificar a que es igual W^2. $W^2 = \left[3\cdot\left[\left(D_A\right)^2 + D_A\cdot D_R\right]\right]^2 = 9\cdot\left[\left(D_A\right)^4 + 2\cdot\left[\left(D_A\right)^3\cdot D_R\right] + \left(D_R\right)^2\cdot\left(D_A\right)^2\right]$. Luego, $E\left(W^2\right) = 9\cdot\left[E\left[\left(D_A\right)^4\right] + 2\cdot E\left[\left(D_A\right)^3\cdot D_R\right] + E\left[\left(D_R\right)^2\cdot\left(D_A\right)^2\right]\right]$. Como D_A y D_R son variables aleatorias independientes, luego $E\left(D_A\cdot D_R\right) = E\left(D_A\right)E\left(D_R\right)$. De igual forma $E\left[\left(D_A\right)^3\cdot D_R\right] = E\left[\left(D_A\right)^3\right]E\left(D_R\right)$ y $E\left[\left(D_R\right)^2\cdot\left(D_A\right)^2\right] = E\left[\left(D_R\right)^2\right]E\left[\left(D_A\right)^2\right]$.

Entonces necesitamos conocer las siguientes cantidades para encontrar la varianza de W:

- $E\left[\left(D_A\right)^4\right]$
- $E\left[\left(D_A\right)^3\right]$
- $E\left[\left(D_R\right)^2\right]$ y $E\cdot\left[\left(D_A\right)^2\right]$
- $E\left(D_R\right)$

De estas cantidades conocemos las dos últimas, las otras las necesitamos calcular.

<u>*Cálculo de* $E\left[\left(D_A\right)^3\right]$</u>.

Los posibles valores de $\left(D_A\right)^3$ son $\left(1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3\right) = (1, 8, 27, 64, 125, 216)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definicón,

$$E\left[\left(D_A\right)^3\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(d_{Ai}\right)^3 \cdot P\left[\left(d_{Ai}\right)^3\right] = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(d_{Ai}\right)^3\right] = \frac{1}{6}\cdot 441 = \frac{147}{2}$$

<u>*Cálculo de* $E\left[\left(D_A\right)^4\right]$</u>.

Los posibles valores de $\left(D_A\right)^4$ son $\left(1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4\right) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definicón,

$$E\left[\left(D_A\right)^4\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(d_{Ai}\right)^4 \cdot P\left[\left(d_{Ai}\right)^4\right] = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(d_{Ai}\right)^4\right] = \frac{1}{6}\cdot 2275 = \frac{2275}{6}$$

Regresando a nuestro problema, tenemos que:

- $E\left[\left(D_A\right)^4\right] = \frac{2275}{6}$
- $E\left[\left(D_A\right)^3\right] = \frac{147}{2}$
- $E\left[\left(D_R\right)^2\right] = \frac{91}{6}$ (ver presentación #1)
- $E\left(D_R\right) = \frac{7}{2}$

Ahora si tenemos todas las piesas para encontrar $E\left(W^2\right)$, Recuerden que $E\left(W^2\right) = 9\cdot\left[E\left[\left(D_A\right)^4\right] + 2\cdot E\left[\left(D_A\right)^3\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left[\left(D_R\right)^2\right]\cdot E\left[\left(D_A\right)^2\right]\right]$. Así, tenemos que $E\left(W^2\right) = 9\cdot\left(\frac{2275}{6} + 2\cdot\frac{147}{2}\frac{7}{2} + \frac{91}{6}\frac{91}{6}\right) = 9\cdot\left(\frac{2275}{6} + \frac{1029}{2} + \frac{8281}{36}\right) = 9\cdot\frac{40453}{36} = \frac{40453}{4}$.

Finalemente, podemos encontrar la $\mathrm{Var}(W)$.

$$\mathrm{Var}(W) = E\left(W^2\right) - \left(E(W)^2\right) = \frac{40453}{4} - \left(\frac{329}{4}\right)^2 = \frac{40453}{4} - \frac{108241}{16} = \frac{53571}{16} = 3.348 \times 10^3$$

Nota: Como ven, este ejercicio era relativamente facil. Lo que intentaba con este ejercicio era que aplicaran las propiedades de la varianza y de la esperanza matemática. No era mi intención que ustedes gastarán mucho tiempo encontrando directamente el valor esperado de Z y mucho menos el de W.

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Noten que W y Y son independientes si y solamente si $E(WY) = E(W)\cdot E(Y)$ (*).
Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación (*).

$$E(W)\cdot E(Y) = \left[3\cdot\left[\left(D_A\right)^2 + D_A\cdot D_R\right]\right]\cdot E\left(\frac{1}{3}\cdot D_R\right)$$

$$E(W)\cdot E(Y) = \left[E\left[\left(D_A\right)^2\right] + E\left(D_A\cdot D_R\right)\right]\cdot E\left(D_R\right)$$

$$E(W)\cdot E(Y) = \left[E\left[\left(D_A\right)^2\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left(D_A\cdot D_R\right)\cdot E\left(D_R\right)\right]$$

Por independencia de D_A y D_R tenemos

$$E(W)\cdot E(Y) = \left[E\left[\left(D_A\right)^2\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left(D_A\right)\cdot E\left(D_R\right)\cdot E\left(D_R\right)\right]$$

$$E(W)\cdot E(Y) = \left[E\left[\left(D_A\right)^2\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left(D_A\right)\cdot\left(E\left(D_R\right)\right)^2\right] \qquad (**)$$

Ahora veamos a que es igual el lado izquierdo de la ecuacion (*).

$$E(WY) = E\left[3\cdot\left[\left(D_A\right)^2 + D_A\cdot D_R\right]\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot D_R\right)\right]$$

$$E(WY) = E\left[D_R\cdot\left(D_A\right)^2 + D_R\cdot\left(D_A\cdot D_R\right)\right]$$

$$E(WY) = \left[E\left[D_R\cdot\left(D_A\right)^2\right] + E\left[D_A\cdot\left(D_R\right)^2\right]\right]$$

Por independencia de D_A y D_R tenemos

$$E(WY) = \left[E\left[\left(D_A\right)^2\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left(D_A\right)\cdot E\left[\left(D_R\right)^2\right]\right] \qquad (**)$$

Ahora si podemos comparar la parte dereacha e izquierda de la ecuación (*):

$$E(WY) \overset{?}{=} E(W)\cdot E(Y)$$

$$E\left[\left(D_A\right)^2\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left(D_A\right)\cdot E\left[\left(D_R\right)^2\right] \quad ? \quad E\left[\left(D_A\right)^2\right]\cdot E\left(D_R\right) + E\left(D_A\right)\cdot\left(E\left(D_R\right)\right)^2$$

$$E\left(D_A\right)\cdot E\left[\left(D_R\right)^2\right] \quad ? \quad E\left(D_A\right)\cdot\left(E\left(D_R\right)\right)^2$$

$$E\left[\left(D_R\right)^2\right] \neq E\left(D_R\right)^2$$

Como ven, en este caso $E(WY) \neq E(W)\cdot E(Y)$ y por tanto W y Y no son independientes

2. Considere las siquientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo, no use calculadora!!)

$A^T A$ $\qquad (A)^{-1}$ $\qquad A\cdot B$ $\qquad A^T y$ $\qquad y^T y$

a)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 7 \\ 15 & 77 & 35 \\ 7 & 35 & 17 \end{pmatrix}$$

b)

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

c)

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 33 & 37 \\ 46 & 48 \\ 37 & 49 \end{pmatrix}$$

d)

$$A^T y = \begin{pmatrix} 36 \\ 166 \\ 74 \end{pmatrix}$$

e)

$$y^T y = (680)$$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\left|A^T A\right| = 4 \qquad \left|A\right| = -2$$

3. Pruebe que $\mathrm{Cov}(X, Y) \equiv E(XY) - E(X)\,E(Y)$

Por definición tenemos que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))\cdot(Y - E(Y))]$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(XY) - X\,E(Y) - E(X)\,Y + E(X)\cdot E(Y)]$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X\cdot E(Y)) - E\cdot(E(X)\cdot Y) + E(E(X)\cdot E(Y))$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y)\cdot E(X) - E(X)\cdot E\cdot(Y) + E(X)\cdot E(Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y)\cdot E(X)$$

Q.E.D

4. Pruebe que $\mathrm{Cov}(aX, bY) \equiv a\cdot b\cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$

Por definición tenemos que

$$\mathrm{Cov}(a\cdot X, b\cdot Y) = E(a\cdot X)\cdot E(b\cdot Y) - E(a\cdot X)\,E(b\cdot Y)$$

$$\mathrm{Cov}(a\cdot X, b\cdot Y) = a\cdot b\cdot E(X)\cdot E(Y) - a\cdot b\cdot E(X)\cdot E(Y)$$

$$\mathrm{Cov}(a\cdot X, b\cdot Y) = a\cdot b\cdot (E(X)\cdot E(Y) - E(X)\cdot E(Y))$$

$$\mathrm{Cov}(a\cdot X, b\cdot Y) = a\cdot b\cdot (\mathrm{Cov}(X, Y))$$

Q.E.D

Apendice 1. Prueba de la independencia de D_A y D_R

De acuerdo con la definición de indepedencia, tenemos que D_A y D_R son independientes si y solamente si $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A)\,E(D_R)$. Como vimos anteriormente, $E(D_A) = E(D_R) = \frac{7}{2}$, luego $E(D_A) \cdot E(D_R) = \frac{49}{4}$. Ahora debemos calcular a que es igual $E(D_A \cdot D_R)$. Noten que existen 18 diferentes valores para el producto $D_A \cdot D_R$ de 36 posibles combinaciones. Los posibles valores de $D_A \cdot D_R$ y sus respectivas probabilidades se reportan en la siguiente tabla.

Tabla 1.
Posibles Valores de $D_A \cdot D_R$ y
sus Repectivas Probabilidades

D_A * D_R	P(D_A * D_R)
1	1/36
2	2/36
3	2/36
4	3/36
5	2/36
6	4/36
8	2/36
9	1/36
10	2/36
12	4/36
15	2/36
16	1/36
18	2/36
20	2/36
24	2/36
25	1/36
30	2/36
36	1/36

Siguiendo la definicion de valor esperado, tenemos

$$E(D_A \cdot D_R) = \sum_{i=1}^{n} (d_A \cdot d_R)_i \cdot P\left[(d_A \cdot d_R)_i\right] = \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

Entonces tenemos que

$$E(D_A \cdot D_R) = E(D_A)\,E(D_R)$$

$$\frac{49}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

Luego el valor esperado del producto de D_A y D_R es igual al producto del valor esperado de cada una de las dos variables aleatorias. Por lo tanto D_A y D_R son independientes.

Q.E.D