



EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES. 25 de noviembre de 2009

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

NOTA: NO ES NECESARIO CONTESTAR TODAS LAS PREGUNTAS DEL PRESENTE CUESTIONARIO: SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS DE UN TOTAL DE 110.

1. (24 puntos) Utilice los tres primeros términos de una serie de potencias adecuada para aproximar el valor de las integrales siguientes: (a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$. (b) $\int_0^1 \int_0^1 e^{xy} dy dx$.

2. (a) (6 puntos) Sea $w = f(x, y)$, donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Muestre que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (w_r)^2 + \frac{1}{r^2}(w_\theta)^2.$$

(b) (9 puntos) Considere la función $f(x, y) = \sqrt{4-x^2} + y$.

i. Identifique y dibuje el dominio y la gráfica de f .

ii. Calcule el gradiente de f en el punto $(1, 6)$ y la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por ese punto.

3. (24 puntos)

(a) Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$.

(b) Encuentre la distancia mínima del origen a la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

4. (a) (10 puntos) Calcule $\int_0^2 \int_x^2 x \sqrt{1+y^3} dy dx$.

(b) (12 puntos) Escriba la integral siguiente en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas (NO evalúe las integrales):

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x dz dy dx.$$

(c) (13 puntos) Calcule el volumen del sólido acotado entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - 3y^2$.

5. (12 puntos) Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes. Justifique claramente sus respuestas.

(a) El valor mínimo de $D_u f(p)$ es $-||\nabla f(p)||$, para todo vector u unitario.

(b) Las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n}$ tienen el mismo intervalo de convergencia.

(c) $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right)$