UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

PRIMER PARCIAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. (15 puntos)

(a) $y=\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$ y $y=\phi_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$ en el intervalo $(-5,5)$. Explique por qué la función definida por tramos

$$y=\begin{cases}\sqrt{25-x^2}, & -5<x<0\\ -\sqrt{25-x^2}, & 0\le x<5\end{cases}$$

No es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo $(-5,5)$.

(b) Las funciones

$$y(x)=\tfrac{x^4}{16},\ -\infty<x<\infty \quad \text{y} \quad y(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^4}{16}, & x\ge 0\end{cases}$$

Son soluciones del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2},\ y(2)=1$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$. Aclare la contradicción aparente entre lo anterior y la oración "sabemos que existe un intervalo centrado en 2, en que el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2},\ y(2)=1$, tiene una única solución.

(c) Compruebe que la familia de soluciones $y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+c_1e^{-x^2}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'+2xy=1$.

2. (7 puntos) Determine una solución continua que satisfaga la ecuación general

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=f(x),\quad f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ -x, & x\ge 1\end{cases},\quad y(0)=0.$$