Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

ECUACIONES DIFERENCIALES. Grupo 05 Profesor: Hendel Yaker A.

PRIMER EXAMEN PARCIAL 01 de marzo de 2010

1. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$

   (a) (2 puntos) Verifique que la familia paramétrica $y = \left(\dfrac{x^2}{4} + c\right)^2$ es solución de la ecuación.

   (b) (5 puntos) Compruebe que al intentar encontrar una curva de la familia anterior que pase por el punto (2,1) aparecen dos posibles valores del parámetro c . ¿Qué se concluye del teorema de Picard para este problema de valor inicial? ¿Existe alguna contradicción? Explique.

2. (20 puntos) En cada uno de los casos siguientes encuentre una familia paramétrica de soluciones de la ecuación dada, o una solución del p.v.i. dado:

$$\text{i) } \frac{dy}{dx} = \sin(x+y) \quad \text{ii) } x^3y' + 2x^2y = 10\sin x,\ \ y(1) = 0) \quad \text{iii) } (4y + 9x^2)\frac{dy}{dx} + 6xy = 0 \quad \text{iv) } y^{1/2}\frac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1$$

3. .

   (a) (4 puntos)Utilice integración para resolver la ecuación $y' = |2y - 3|$. Determine cuántas curvas solución pasan por el punto $(0, 3/2)$ e identifíquelas, si es posible.

   (b) (3 puntos)Pruebe que una ecuación de la forma $dy/dx = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ puede transformarse en una ecuación lineal, siempre que se conozca una solución particular de la ecuación.

4. (6 puntos) Se lleva un termómetro de una habitación al exterior, donde la temperatura del aire es de $5^0\,F$. Después de un minuto el termómetro marca $55^0\,F$ y después de 5 minutos la lectura es de $30^0\,F$. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

5. .

   (a) (3 puntos) Compruebe que el conjunto de funciones $\{\sin(\ln x), \cos(\ln x)\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Escriba la solución general de la ecuación.

   (b) (6 puntos) Pruebe que si y_1 y y_2 son soluciones particulares de una ecuación lineal no homogénea $L(y) = g(x)$, entonces existen infinitas combinaciones lineales de y_1 y y_2 que también son soluciones de la ecuación.

   (c) (6 puntos) Obtenga una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden, que satisfaga las siguientes características: i) $y = \sin x$ es una solución de la ecuación. ii) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada. Escriba la solución general de la ecuación.

NOTA: Se califica sobre 50 puntos.