PRIMER EXAMEN PARCIAL. MATEMÁTICA DISCRETA

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$, y sea $c = a \mod b$. (Este `mod` se refiere a la operación módulo o residuo que proveen todos los lenguajes de programación incluido Java). Probar que bajo estas condiciones se cumple que $mcd(a,b) = mcd(b,c)$[20 PUNTOS]

2. **(a)** Considere la definición de lista presentada en el curso junto con las operaciones $tail(l)$ y $head(l)$. Definir recursivamente una función *replace* que reemplace cada instancia de un caracter por otro caracter en un lista de caracteres.[10 PUNTOS]

   (b) Considera el siguiente programa:

```
function lookUp(array,first,last,key){
 mid = first - (last-first)/2;
  if (array[mid] == key ) return mid;
  if (array[mid] > key) return lookUp(array,first,mid-1,key);
  return lookUp(array,mid+1,last,key);
}
```

   En este caso `array` es un conjunto de enteros. Los valores almacenados en array se clasifican; esto es, se sabe que

   `array[1] < array[2] < array[3] < ...`

   También se sabe que 1 $\leq$`first`$\leq$`last` y que hay un índice j entre `first` y `last` para el cual `array`$[j]$ es igual a `key`. Demostrar que este programa determina el índice j. [20 PUNTOS]

3. Suponga que se define un conjunto de fórmulas bien formadas fbf determinadas por las siguientes reglas:

   - Toda letra es una una fbf
   - Si α es una fbf entonces $\neg\alpha$ también es fbf
   - Si α y β son fbf entonces $(\alpha \star \beta)$ también es fbf con $\star \in \{\Rightarrow, \Leftrightarrow \vee, \wedge\}$.

   a) Con base en la definición anterior de fbf construya una definición inductiva de las funciones $D[\alpha]$, $I[\alpha]$ donde $D[\alpha]$ denota el número de paréntesis derechos de α, y $I[\alpha]$ representa el número de paréntesis izquierdos de α

   b) Enuncie el principio de inducción en fórmulas para fbf y utilícelo para demostrar que

$$D[\alpha] = I[\alpha]$$

   [20 PUNTOS]

4. Pablo Patrañas presenta el siguiente argumento para probar que cualesquiera dos enteros positivos, estos son iguales. Se usa inducción para probar que si a y b son enteros positivos y $n = \max\{a, b\}$ entonces $a = b$.

   Caso base: (n=1). Si a y b son enteros positivos y $1 = \max\{a, b\}$ debe tenerse que $a = b = 1$.

   Paso inductivo: Suponga que si a' y b' son enteros positivos y $n = \max\{a', b'\}$ entonces $a' = b'$. Suponga que a y b son enteros positivos y que $n + 1 = \max\{a, b\}$. Ahora, $n = \max\{a - 1, b - 1\}$. Por hipótesis inductiva $a - 1 = b - 1$, por lo tanto $a = b$. Es usted Primo de Patrañas? De no ser así, encontrar el error cometido por el.[20 PUNTOS]

5. Una persona sube una escalera avanzando uno o dos peldaños en cada paso. Si la escalera consta de 25 peldaños, ¿de cuantas formas diferentes puede subirla?. [10 PUNTOS]

TODA RESPUESTA DEBE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA
NO SE ADMITEN PREGUNTAS DURANTE EL EXAMEN