



ÁLGEBRA Y FUNCIONES.
SUPLETORIO DEL EXAMEN FINAL . 24 de mayo de 2008

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

NOTA: i) El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos. **SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.**

ii) En este examen **no se permite el uso de calculadora.** Aquellas respuestas que involucren raíces o logaritmos deben quedar indicadas en la forma más simplificada posible.

1. (15 puntos)

(a) Resuelva la ecuación $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2 - 2x}$

(b) Resuelva la desigualdad: $\frac{2}{3} < \frac{1}{x-2} \leq 1$ y exprese la solución en forma de intervalo.

(c) Resuelva la ecuación logarítmica $2 \ln x - \ln 2 = \ln(3x - 4)$

2. (10 puntos) Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 5 y coeficiente principal 3, que satisfaga las siguientes condiciones: $p(1 - i) = 0$, $p(-2i) = 0$ y $p(0) = 0$

3. (16 puntos)

(a) Identifique la cónica representada por la ecuación $4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16$. Haga un bosquejo gráfico de la cónica.

(b) Muestre gráficamente que el siguiente sistema de ecuaciones tiene dos soluciones. Luego resuelva el sistema para identificar claramente dichas soluciones

$$\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

4. (20 puntos) Considere las funciones: $f(x) = 2 - \frac{\ln x}{\ln 3}$ y $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-10}}$

(a) Pruebe que la función f es **invertible** y halle una fórmula explícita para $f^{-1}(x)$. Verifique su respuesta usando la **composición** de funciones.

(b) Halle el dominio y el rango de la función g .

5. (15 puntos)

(a) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, \pi)$ de la ecuación $-2\text{sen}^2 x - 3 \cos x + 3 = 0$

(b) Trace la gráfica de la función $y = -\frac{1}{2} \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ en un período.

6. (24 puntos)

(a) Encuentre dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo

(b) Si $N(t) = 2000e^{\frac{1}{10} \ln(\frac{2}{4})t}$ corresponde a la cantidad de material radiactivo de una sustancia al cabo de t días, ¿cuál es la vida media de esta sustancia?

(c) Un atleta empieza a correr desde un punto P, a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en la dirección $S40^\circ E$ durante 24 minutos y luego toma la dirección $N20^\circ E$, a la misma velocidad, durante los siguientes 16 minutos, al cabo de los cuales llega al punto Q. Calcule la distancia entre los puntos P y Q.

7. (20 puntos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y justifique su decisión

(a) La ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes coordenados, centro en el segundo cuadrante y radio 4 es $x^2 + 8x + y^2 - 8y + 16 = 0$

(b) La gráfica de la ecuación $y = x^3$ sólo tiene simetría respecto al origen

(c) Si $\text{sen}^{-1} x = \alpha$ entonces $\text{sen}(2\text{sen}^{-1} x) = 2x \sqrt{1 - x^2}$

(d) La gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$ tiene exactamente dos asíntotas verticales.

(e) $(5i + 3i^3)^2 = 4$