MATEMATICAS DISCRETAS.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.

Profesor ANIBAL SOSA

1. (24 ptos) Considere los siguientes enunciados:

   (a) Sea $n \in Z$, n es par si y sólo si n^2 es par.

   (b) Suponga que S y T son subconjuntos de $\mathbb{R}$, y que $S \subset T$. Si S es un conjunto no acotado[1] en $\mathbb{R}$, entonces T es un conjunto no acotado.

   Establezca explícitamente la hipótesis, la tesis y luego dé una demostración de cada enunciado.

2. (10 ptos) Suponga que alguien afirma que el siguiente enunciado es un teorema, y enseguida da una prueba del mismo:
   Sea R una relación simétrica y transitiva en un conjunto A, entonces R es reflexiva.
   Demostración. Sea $a \in A$. Tome un elemento $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$, como R es simétrica, también se tiene que $(b, a) \in R$. Luego usando la propiedad de transitividad de R podemos concluir que $(a, a) \in R$, ya que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$.
   Usted debe elegir UNA! de dos opciones. Primera opción, confirma que el enunciado anterior es un teorema y punto. Segunda opción, lo refuta mostrando un contrejemplo y el error en la demostración.

3. (10 ptos) Considere el siguiente subconjunto R de $A \times A$, $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$. Usted debe agregar exactamente dos parejas (x, y) y quitar exactamente dos parejas (x', y') de manera tal que R sea una relación reflexiva, transitiva y asimétrica, en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

4. (24 ptos) Sea R la relación definida sobre el conjunto S de cadenas s_i de longitud 6 como, $s_1 R s_2$ siempre que s_1 y s_2 coincidan en los dos últimos bits.

   (a) Muestre que R es una relación de equivalencia.

   (b) Encuentre las clases de equivalencia definidas por R.

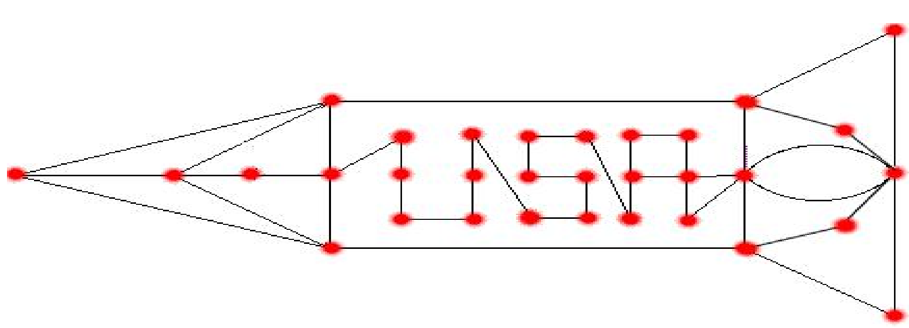
   (c) Determine una partición del conjunto S, verificando explícitamente las condiciones que definen una partición de un conjunto dado.

5. (18 ptos) Suponga que un circuito tiene tres LEDS, digamos x, y y z. El circuito produce una salida $s = 1$ si y sólamente si exactamente dos LEDS consecutivos están encendidos o apagados.

   (a) Determine la FND para la función booleana f que modela la salida s del circuito.

   (b) Muestre que la simplificación de la FND puede llevarse a una expresión de la forma $\sqcup \star \sqcup$, donde $\sqcup$ es un literal y $\star$ es uno de los operadores $+$, $\cdot$ o $\otimes$.

   (c) Encuentre un circuito equivalente usando sólo compuertas NAND.



6. (14 ptos)

[1] **Definición:** Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es acotado si existe $M > 0$ tal que para todo $s \in S$ se tiene que $|s| < M$.

(a) Escriba correctamente la definición de función inyectiva y de función sobreyectiva para $f : A \to B$.

(b) Suponga que f es una función de A en B, donde A y B son conjuntos finitos con el mismo número de elementos, esto es $|A| = |B|$. Muestre que si f es inyectiva entonces es sobreyectiva. ¿Es el resultado válido para el caso en que $|A| \neq |B|$? Explique.