MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Introducción:

Además de los sistemas sexagesimal y centesimal usados para la medición de ángulos, se presenta el sistema de radianes el cual, por ser más natural en su definición es el más útil para el desarrollo de cursos superiores como el cálculo y la física

Prerrequisitos:

1. Ángulo central
2. Relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro

Preguntas de revisión:

1. Calcule el perímetro de una circunferencia de radio 8 cm.
2. Encuentre la razón entre el perímetro de una circunferencia de radio r y su diámetro
3. Determine el radio de una circunferencia de perímetro 2π

Objetivos:

1. Aplicar las relaciones de conversión entre los sistemas sexagesimal y radianes
2. Ubicar con buena precisión ángulos centrales de diferentes medidas dados en radianes

Ejemplos:

1. Calcular en radianes los siguientes ángulos dados en el sistema sexagesimal

a. 0^0 **b.** 90^0 **c.** 270^0 **d.** 135^0 **e.** -180^0 **f.** -720^0
g. 180^0 **h.** 1^0 **i.** $57{,}296^0$

De la relación $1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right) radianes$, que convierte grados en radianes, se debe multiplicar el número de grados por $\pi/180$ el cual representa el número de radianes que hay en un grado, se obtiene respectivamente para los ejemplos propuestos:

a. $0^0 = 0\left(\frac{\pi}{180}\right) = 0\ radianes$

b. $90^0 = 90\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{2}\ radianes$

c. $270^0 = 270\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{3\pi}{2}\ radianes$

d. $135^0 = 135\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{3\pi}{4}\ radianes$

e. $-180^0 = -180\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\pi\ \ radianes$

f. $-720^0 = -720\left(\frac{\pi}{180}\right) = 4\pi\ radianes$ Note que son dos giros completos en sentido negativo

g. $180^0 = 180\left(\frac{\pi}{180}\right) = \pi\ radianes$. Representa medio giro de la de la circunferencia en sentido positivo. Compare con ejemplo **e.**

h. $1^0 = 1\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}01745\ radianes$

i. $52{,}296^0 = 52{,}296\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 1\ radian$. Este ejemplo nos ilustra el hecho de que la medida de un radián es independiente del tamaño de la circunferencia. Siempre la medida de un radián es constante y aproximadamente igual a $52{,}296^0$. En algunas aproximaciones, es razonable aproximar esta medida a $52{,}3^0$. A esta característica del sistema de medida en radianes nos referimos cuando se habla de un sistema de medida más natural.

2. Calcular en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en el sistema radianes

a. $0\ rad$ **b.** $\pi/2\ rad$ **c.** $2\pi\, rad$ **d.** $-\pi/8\ rad$ **e.** $7\pi/3\ rad$

f. $29\pi/4\ rad$ **g.** $-321\pi/7\ rad$ **h.** $2\ rad$ **i.** $-1\ rad$

De la relación, $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, que convierte radianes en grados sexagesimales, se debe multiplicar el número de radianes por $180/\pi$ el cual representa el número de grados que hay en radián, se obtiene respectivamente para los ejemplos propuestos:

a. $0\ rad = 0\left(\frac{180}{\pi}\right) = 0^0$

b. $\pi/2\ rad = \pi/2\left(\frac{180}{\pi}\right) = 90^0$

c. $2\pi\, rad = 2\pi\left(\frac{180}{\pi}\right) = 360^0$

d. $-\pi/8\ rad = -\pi/8\left(\frac{180}{\pi}\right) = 22.5^0$

e. $7\pi/3\ rad = 7\pi/3\left(\frac{180}{\pi}\right) = 420^0$

f. $29\pi/4\ rad = 29\pi/4\left(\frac{180}{\pi}\right) = 1305^0$

g. $-321\pi/7\ rad = -321\pi/7\left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 8254{,}28^0$

h. $2\ rad = 2\left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 114{,}59^0$

i. $-1 rad = -1\left(\frac{180}{\pi}\right) \approx -57{,}29^0$.

NÚMEROS REALES RELACIONADOS CON PUNTOS SOBRE UNA CIRCUNFERENCIA

Introducción:

Se establece una relación entre números reales y puntos sobre una circunferencia unitaria de centro en el origen de coordenadas. Así, a cada número real t le podemos asociar un único punto $P(x,y)$ sobre la circunferencia unitaria. Se debe notar que esta relación no es biunívoca.

Prerrequisitos:

1. Ecuación de la circunferencia
2. Concepto de simetría de una ecuación
3. Resolución de la ecuación cuadrática
4. Teorema de Pitágoras

Preguntas de revisión:

1. Encuentre la ordenada o abscisa correspondiente de cada punto dado sobre la circunferencia unitaria en cada caso

a. $(1,y)$ **b.** $\left(\frac{1}{2},y\right)$ **c.** $\left(x,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **d.** $\left(x,\frac{1}{2}\right)$ **e.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},y\right)$

2. Verifique si los siguientes puntos están sobre la circunferencia unitaria de centro $(0,0)$

a. $(1,1)$ **b.** $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ **c.** $(0,-1)$ **d.** $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

e. $(0,0)$

Objetivos:

1. Determinar sobre la circunferencia unitaria las coordenadas del punto correspondientes con números reales t notables $\left(0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

2. Dadas algunas coordenadas de puntos sobre la circunferencia unitaria, estimar el número real asociado con ellas

3. Utilizar la simetría de la circunferencia para determinar las coordenadas asociadas con el número real t, $-t$, $t+k\pi$, k un número entero

Ejemplos:

1. Determinar las coordenadas sobre la circunferencia unitaria de los siguientes números reales t (longitudes de arcos medidos desde el origen de los arcos, $(1,0)$)

a. 0 **b.** $\pi/2$ **c.** π **d.** $3\pi/2$ **e.** 2π **f.** 5π

En la gráfica de la circunferencia unitaria (Insertar gráfica)

se puede observar que para los números reales dados, se tiene

a. Para $t=0$**,** $(1,0)$
b. Para $t=\pi/2$, $(0,1)$
c. Para $t=\pi$, $(-1,0)$
d. Para $t=3\pi/2$, $(0,-1)$
e. Para $t=2\pi$, $(1,0)$
f. Para $t=5\pi$, $(-1,0)$. En este caso, se ha medido un arco que tiene una longitud de dos giros (4π) y medio (π)

2. Determinar las coordenadas sobre la circunferencia unitaria de los siguientes números reales t (longitudes de arcos medidos desde el origen de los arcos, $(1,0)$)

a. $t=\pi/6+k(\pi/6)$, k es un número entero

b. $t = \pi/4 + k(\pi/4)$, k es un número entero

c. $t = \pi/3 + k(\pi/3)$, k es un número entero

Las coordenadas sobre la circunferencia unitaria correspondientes a los números reales dados se pueden obtener mediante construcciones geométricas y utilizando la simetría de la circunferencia.

a. Cuando $t = \pi/6 + k(\pi/6)$, k un número entero, primero ubiquemos las coordenadas para un arco de longitud $\pi/6$. Considere la gráfica (insertar gráfica)

En la gráfica se observa que el triángulo POQ es un triángulo equilátero de lado 1. Por consiguiente, la ordenada de P tiene un valor de $1/2$. La abscisa se puede obtener utilizando la ecuación de la circunferencia, esto es,

$$y = \pm\sqrt{1-\left(1/2\right)^2} = \pm\sqrt{3}/2$$

Por lo tanto, el punto sobre la circunferencia unitaria asociado con $t = \pi/6$ es $\left(\sqrt{3}/2\ , 1/2\right)$. Se escoge el valor positivo de la abscisa por estar el punto en el cuadrante I. Se puede observar que por la simetría de la circunferencia, para el punto Q las coordenadas son $\left(\sqrt{3}/2\ , -1/2\right)$. Para determinar las coordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria para $t = \pi/6 + k(\pi/6)$, k un número entero positivo, podemos dividir la longitud de la circunferencia 12 arcos iguales. Así, los arcos tendrán longitudes

$\pi/6$, $2\pi/6$, $3\pi/6$, $4\pi/6$, $5\pi/6$, $6\pi/6$, $7\pi/6$, $8\pi/6$, $9\pi/6$, $10\pi/6$,

$11\pi/6$, $12\pi/6$

Por el ejemplo 1, ya tenemos algunos valores calculados. A saber Para el arco $3\pi/6 = \pi/2$, las coordenadas son $(1,0)$. Así mismo, como $6\pi/6 = \pi$, las coordenadas son $(-1,0)$. También, por ser $9\pi/6 = 3\pi/2$, tiene coordenadas $(0,-1)$. Por último, las coordenadas de $12\pi/6$ son $(1,0)$. ¿Por qué?

Para el arco de longitud $5\pi/6$, por ser simétrico al arco de longitud $\pi/6$ y por estar en el cuadrante II, las coordenadas correspondientes serán $\left(-\sqrt{3}/2\,,\,1/2\right)$. Consideraciones análogas nos dan que las coordenadas de $7\pi/6$ son $\left(-\sqrt{3}/2\,,\,-1/2\right)$. Para el arco $11\pi/6$, las coordenadas ya se calcularon pues este corresponde al punto Q mencionado arriba. Cuando $t = \pi/6 + k(\pi/6)$, k un entero positivo nos da un número que excede el perímetro de la circunferencia, se puede, en principio hacer el conteo hasta llegar al punto sobre la circunferencia (camino que es muy poco recomendable en el caso que el número real sea muy grande). Lo más recomendable es hacer una aproximación como lo muestran los dos ejemplos siguientes:

i. Para $t = 79\pi/6$, se observa que $79\pi/6 = 72\pi/6 + 7\pi/6$. Esta aproximación nos permite observar que $72\pi/6 = 12\pi = 6(2\pi)$. Entonces, para ubicar las coordenadas sobre la circunferencia unitaria del número $t = 79\pi/6$ se deben hacer 6 giros completos sobre la circunferencia en sentido contrario al movimientos de las manecillas del reloj hasta llegar al punto correspondiente a $7\pi/6$, y cuyas coordenadas se determinaron antes.

ii. Para $t = 935\pi/6$, se observa que $935\pi/6 = 924\pi/6 + 11\pi/6$. En este caso, $924\pi/6 = 154\pi = 77(2\pi)$. Luego, las coordenadas de $t = 935\pi/6$ las mismas de $t = 11\pi/6$.

Desde luego, se pueden intentar otras aproximaciones aprovechándose de la simetría de la circunferencia de los valores ya conocidos para múltiplos de $\pi/6$

En el caso $t = \pi/6 + k(\pi/6)$, k un entero negativo, se observa que este es un caso trivial recordando que los números reales negativos se recorren por la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj.

Los otros múltiplos de $\pi/6$ que no hemos considerado, tales como $2\pi/6$, $4\pi/6$, $8\pi/6$, $10\pi/6$ están considerados en el ejemplo **c.**

b. Para $t = \pi/4 + k(\pi/4)$, k un número entero, primero ubiquemos las coordenadas de $t = \pi/4$. En la gráfica se observa que para un arco de esta longitud, el cuadrante queda dividido por dos arcos iguales (insertar gráfica)

Por la simetría de la circunferencia, el triángulo OPQ es rectángulo isósceles, ya que los ángulos complementarios son iguales. Así, los catetos son iguales, y por consiguiente, las coordenadas del punto sobre la circunferencia son iguales. Al considerar este hecho en la ecuación de la circunferencia, se puede deducir el valor de las coordenadas de la siguiente manera

$x^2 + y^2 = 1$, de donde se tiene $x^2 + x^2 = 1$, es decir, $2x^2 = 1$. Al calcular el valor para la abscisa, $x = \pm\sqrt{2}/2$. Para el primer cuadrante, las coordenadas sobre la circunferencia unitaria correspondientes al número real $t = \pi/4$ son $\left(\sqrt{2}/2 , \sqrt{2}/2\right)$

Para determinar las coordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria para $t = \pi/4 + k\left(\pi/4\right)$, k un número entero positivo, podemos dividir la longitud de la circunferencia 8 arcos iguales. Así, los arcos tendrán longitudes

$\pi/4 , 2\pi/4 , 3\pi/4 , 4\pi/4 , 5\pi/4 , 6\pi/4 , 7\pi/4 , 8\pi/4$. De estos casos, quedan por determinar las coordenadas para $t = 3\pi/4 , 5\pi/4 , 7\pi/4$. ¿Por qué? Valiéndose de la simetría de la circunferencia, para $t = 3\pi/4$, las coordenadas del punto asociado serán $\left(-\sqrt{2}/2 , \sqrt{2}/2\right)$ por encontrarse el punto en el cuadrante II. Similarmente, como el punto correspondiente a $t = 5\pi/4$ se ubica en el cuadrante III, sus coordenadas son $\left(-\sqrt{2}/2 , -\sqrt{2}/2\right)$. Por último, las coordenadas para $t = 7\pi/4$ son $\left(\sqrt{2}/2 , -\sqrt{2}/2\right)$.

Con estos valores, podemos argumentar de manera parecida al caso del ejemplo **a.** para múltiplos de $\pi/4$ mayores al perímetro de la circunferencia. Por ejemplo, para calcular las coordenadas sobre la circunferencia unitaria para el número $t = 831\pi/4$, basta observar que $t = 831\pi/4 = 824\pi/4 + 7\pi/4 = 103\,(2\pi) + 7\pi/4$ y por consiguiente, las coordenadas de $t = 831\pi/4$ serán las mismas de $t = 7\pi/4$ determinadas antes. En el caso de los múltiplos negativos de $\pi/4$, las coordenadas se establecen de manera similar, pero teniendo presente que el recorrido de las longitudes de arco se hacen de acuerdo al movimiento de las manecillas del reloj.

c. Cuando queremos determinar las coordenadas para números reales del tipo $t = \pi/3 + k\left(\pi/3\right)$, k un número entero, la gráfica a considerar es (insertar gráfica)

Haciendo primero el cálculo de las coordenadas asociadas con el número $t = \pi/3$, se observa que el triángulo OPQ es equilátero y por consiguiente el valor de la abscisa es $1/2$. Aplicando este valor en la ecuación de la circunferencia, se obtiene el valor de la ordenada, para el cuadrante I, de $\sqrt{3}/2$. Así, el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria para el número real $t = \pi/3$ tiene coordenadas $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$.

Para determinar las coordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria para $t = \pi/3 + k\left(\pi/3\right)$, k un número entero positivo, podemos dividir la longitud de la circunferencia 6 arcos iguales. Así, los arcos tendrán longitudes
$\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3, 6\pi/3$. De estos valores sólo nos queda determinar los valores de $\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$. ¿Por qué?. Usando la simetría de la circunferencia, (ver gráfica), se obtienen los siguientes valores para las coordenadas de estos números reales, en su orden: $\left(-1/2, \sqrt{3}/2\right)$, $\left(-1/2, -\sqrt{3}/2\right)$, $\left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)$. Aproximaciones usadas en los ejemplos anteriores

para números reales múltiplos de $t = \pi/3$ mayores a la longitud de la circunferencia pueden realizarse de manera similar mostrados en los ejemplos anteriores. Son válidas las mismas observaciones hechas para números reales negativos múltiplos de $t = \pi/3$. Por ejemplo, para calcular las coordenadas sobre la circunferencia unitaria asociadas con $t = -1025\pi/3$ se observa que $-1025\pi/3 = -1020\pi/3 - 5\pi/3 = -170(2\pi) - 5\pi/3$. Esto nos indica que las coordenadas de $t = -1025\pi/3$ son las mismas que las del número real $t = -5\pi/3$, es decir, $\left(1/2 \, , \sqrt{3}/2 \right)$.

3. Considere los siguientes puntos sobre la circunferencia unitaria. Estime por lo menos dos valores de números reales t al cual corresponden

a. $(0\,,1)$ **b.** $(-1\,,0)$ **c.** $\left(-\sqrt{2}/2 \, , -\sqrt{2}/2 \right)$

d. $\left(1/2 \, , -\sqrt{3}/2 \right)$ **e.** $\left(-\sqrt{3}/2 \, , 1/2 \right)$ **f.** $\left(\sqrt{2}/2 \, , \sqrt{2}/2 \right)$

Recordando que a cualquier número real t le podemos hacer corresponder puntos sobre la circunferencia unitaria y al considerar la siguiente gráfica, deducimos para los puntos dados que:
(Insertar gráfica)

a. $t = \pi/2$ **.** Otro valor para t es $t = \pi/2 + 2\pi = 5\pi/2$. Más generalmente, tenemos $t = \pi/2 + 2k\pi, k$ es un número entero

b. $t = \pi$. En forma general, $t = \pi + 2k\pi,\ k$ un número entero

c. Del ejemplo **2.b.** anterior, el valor correspondiente de t a estas coordenadas es, en forma general, $t = {}^{5\pi}\!/_{4} + 2k\pi,\ k$ es un número entero

d. Del ejemplo **2.c.** anterior, el valor correspondiente de t a estas coordenadas es, en forma general, $t = {}^{5\pi}\!/_{3} + 2k\pi,\ k$ es un número entero

e. Del ejemplo **2.a.** anterior, el valor correspondiente de t a estas coordenadas es, en forma general, $t = {}^{5\pi}\!/_{6} + 2k\pi,\ k$ es un número entero

f. Del ejemplo **2.b.** anterior, el valor correspondiente de t a estas coordenadas es, en forma general, $t = {}^{\pi}\!/_{4} + 2k\pi,\ k$ es un número entero

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS