

Nombres y apellidos: _____ Código: _____

Justifique todas sus respuestas ¹

1. (16 pts) Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x-16}{4-\sqrt{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x} \qquad d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{2}{x}}$$

2. (7 pts) Considere la función:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $g(x)$ es derivable en 0 y calcule $g'(0)$

3. (24 pts) Evalúe las siguientes integrales:

$$a) \int (1-x)e^{-x} dx \qquad b) \int x\sqrt{16-4x^2} dx$$

$$c) \int e^{2x} \operatorname{sen} x dx \qquad d) \int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} dx$$

4. (6 pts) Encuentre el área de la región encerrada por las gráficas de las ecuaciones $x = 4 - y^2$ y $x = y - 2$ planteando una integral con respecto a x y otra con respecto a y

5. (8 pts) Halle el volumen del sólido de revolución generado al girar la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$ alrededor de la recta $x = 2$

6. (24 pts) Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$a) f(x) = (x^2 + \frac{1}{x})^2 \operatorname{sen}^2(\frac{4x}{3}) \qquad b) F(x) = \int_x^{\cos x} \frac{t^2}{1-t^2} dt$$

$$c) f(x) = \frac{e^{1-4x^2}}{\arctan 4x^2} \qquad d) f(x) = \frac{(1-2x)(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$

7. (10 pts) Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared. Su base se desliza por la pared a razón de 2 pies por segundo:

a) ¿A qué ritmo está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7 pies de la pared?

b) Calcule el ritmo del ángulo de cambio formado por la escalera y la pared cuando la base se encuentra a 7 pies de la pared

¹El examen se calificará sobre 100 puntos

8. (5 pts) Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $x^3 + y^3 = 4xy + 1$ en el punto $(2, 1)$
9. (10 pts) Dibuje la gráfica de una función con las siguientes características:
a) $f(0) = f(6) = 0$ b) $f'(3) = f'(5) = 0$ c) $f'(x) > 0$ si $x < 3$
d) $f'(x) > 0$ si $3 < x < 5$ e) $f'(x) < 0$ si $x > 5$ f) $f''(x) < 0$ si $x < 3$
g) $f''(x) > 0$ si $3 < x < 4$ h) $f''(x) < 0$ si $x > 4$
10. (9 pts) Una ventana Norman se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria. Encuentre las dimensiones de una ventana Norman de área máxima si el perímetro total es de 16 pies.