UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.
EXAMEN FINAL.

Diciembre 3 de 2005.

NOMBRE ______________________________ CODIGO ____________

1. (18 ptos) Diagonalice ortogonalmente la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mostrando la matriz ortogonal P y la matriz diagonal D, tales que $AP = PD$.

2. (22 ptos) Considere la transformación $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida por $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, donde la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Muestre que L es una transformación lineal.
   (b) Determine una base del $Kernel(L)$ y otra base para $Im(L)$.
   (c) Calcule $dim(ker\ L)$ y $dim(Im\ L)$. ¿Qué resultado verifican estos números?
   (d) ¿Es la transformación L sobre? ¿Es la transformación L uno a uno? Explique.

3. (8 puntos) Resuelva uno y sólo uno de los siguientes puntos:

4. Escriba la forma cuadrática $g(\boldsymbol{x}) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4yz$ en la forma matricial $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ donde $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, y encuentre la forma cuadrática equivalente $h(\boldsymbol{y})$ (forma canónica). ¿Es la matriz A una matriz definida positiva?

5. (36 ptos) Califique cada una de las afirmaciones siguientes como verdadera o falsa, argumentando el por qué de su respuesta:

   (a) El conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ es un subespacio del espacio de matrices $M_{n\times n}$.
   (b) Todo conjunto de 4 polinomios distintos no nulos en P_4 es linealmente independiente.
   (c) Si $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k\}$ es un subconjunto de vectores ortogonales al vector $\boldsymbol{v}$, entonces todo vector que pertenezca al $gen\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 ..., \boldsymbol{u}_k\}$ es ortogonal a $\boldsymbol{v}$.
   (d) Si el producto de los valores propios de una matriz A es cero, entonces A es singular.
   (e) Si las columnas de una matriz A de 6×4 son linealmente independientes, entonces $rango\ (A) = 6$.
   (f) Si λ es un valor propio de una matriz de $n \times n$, entonces $A - \lambda I_n$ es una matriz singular.
   (g) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Entonces $L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$.