tendimiento, el desarrollo económico y de su infraestructura, obtención de inversión extranjera, ampliación de los mercados, profundización del desarrollo industrial y tecnológico de la región dentro de un gran mercado integrado.

PROYECTO ICESI-UNIVERSIDAD DE MIAMI

Durante el encuentro realizado en Miami, con la participación de universidades latinoamericanas y norteamericanas, surgió la necesidad de plantearse una agenda que permitiera establecer una nueva relación entre los Estados Unidos y América Latina.

El ICESI asistió a esta reunión en representación de Colombia, acompañado por la Universidad de los Andes. La Universidad ha venido internacionalizándose en respuesta a las necesidades identificadas por el sector empresarial de la región, a mediados de los años 80, lo que llevó a desarrollar programas de Gerencia Internacional. Se hacía evidente la necesidad de establecer un proyecto de investigación aplicada que evaluara el impacto de la internacionalización de nuestra economía sobre el sector productivo. Esta oportunidad se presentó con la propuesta hecha por la Universidad de investigar las consecuencias de un acuerdo de libre comercio entre Colombia y el grupo norteamericano, de tal forma que ambos gobiernos dispongan de un análisis técnico que evalúe los aspectos positivos y negativos de dicho acuerdo.

Con este propósito, el ICESI y la Universidad de Miami han iniciado el proyecto que establecerá las bases de negociación de este acuerdo, estudiando los aspectos macroeconómicos y los impactos sectoriales en las economías de ambos países.

Las evaluaciones previas parecen indicar que va a ser necesario introducir importantes cambios a la estructura productiva, las leyes de propiedad intelectual y las regulaciones de preservación del medio ambiente en Colombia. Igualmente parece evidente que los Estados Unidos tendrán que desmontar sus mecanismos proteccionistas y subsidios a la agricultura. Sea cual fuere el resultado de la investigación en términos generales, es posible especular que las cifras finales en generación de comercio, empleo, desarrollo industrial y tecnológico e infraestructura, entre otros, serán positivos para las partes involucradas: NAFTA - Colombia. Esto parece estar respaldado por la teoría económica ortodoxa.

CONCLUSION

Este ejercicio de reflexión con el sector privado de ambos países, protagonistas principales en este caso, será positivo y revelador y pondrá a prueba las hipótesis sobe apertura, reconversión tecnológica y desarrollo de nuevos mercados. Dependiendo de estos resultados y de las decisiones que tomen los respectivos gobiernos, es muy probable que para el siglo XXI, o sea dentro de ocho años, Colombia se encuentre en un mercado libre de 430 millones de consumidores.

AXIOMATIZACION DE CLASES Y CONJUNTOS EN LA MATEMATICA Y EN LA PROGRAMACION ORIENTADA A OBJETOS.

LUIS EDUARDO MUNERA

Matemático de la Universidad del Valle. Master y Doctor en Informática de la Universidad Politécnica de Madrid, Ex-profesor de la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Profesor del ICESI.

INTRODUCCION

El objetivo de este documento es presentar dos aproximaciones generales a la axiomatización de clases y conjuntos. De una parte, la aproximación matemática, mostrando el origen, evolución y desarrollo de la teoría matemática de clases y conjuntos, sin formular completamente el desarrollo axiomático, sólo mostrando los conceptos básicos y las crisis generadas por ellos y la solución más usualmente aceptada. Por otra parte, la aproximación dada por el paradigma orientado a objetos, siguiendo especialmente la línea marcada por el lenguaje smalltalk-80.

La idea es mostrar las dos aproximaciones desde una perspectiva más intuitiva que formal, sin señalar los desarrollos axiomáticos explícitos o implícitos de ambas aproximaciones, dado que el objetivo fundamental es compararlas, estableciendo sus similaridades y diferencias, y pensando especialmente en su viabilidad a la hora de una implantación práctica. En resumen, se pretende presentar un material básico que sirva de ayuda en la toma de decisiones sobre la filosofía y formalización a realizar acerca de los fundamentos de un modelo de conocimiento orientado a objetos.

Una vez tomada una decisión al respecto, se podrá trabajar entonces en un desarrollo axiomático completo.

1. CLASES Y CONJUNTOS EN LA MATEMATICA

En una serie de publicaciones iniciadas en 1874, el matemático George Cantor, desarrolló una teoría general de conjuntos muy intuitiva.

La pseudo-definición de conjunto dada por Cantor es muy vaga: "Un conjunto es una colección de objetos bien definidos de nuestra intuición o pensamiento".

El primer intento de axiomatizar la intuitiva teoría de conjuntos de Cantor se debe a George Frege en 1893 a 1903.

El sistema axiomático de Frege utiliza dos constantes primitivas (no definidas) que son "=" y "ϵ". La primera de ellas (la igualdad) se usa en el sentido de identidad lógica; "1 + 1 = 2" significará que "1 + 1" y "2" son nombres del mismo objeto. Además de los axiomas usuales de la igualdad se admite una regla de sustitución sin restricciones: en particular el resultado de cambiar un teorema reemplazando un objeto por su igual es de nuevo un teorema.

La otra constante, "ϵ", se lee "es miembro de" o "pertenece a".

El elemento fundamental del sistema de Frege es el llamado axioma de abstracción (también llamado de comprensión y clasificación), el cual asevera la existencia, para cualquier propiedad dada, de un conjunto cuyos miembros son precisamente esos objetos que tienen la propiedad. Formalmente:

AXIOMA DE ABSTRACCION
(FREGE 1.893)

$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varnothing(x))$ en donde $\varnothing(x)$ es cualquier fórmula en la cual la variable y no es libre.

El axioma de abstracción es un axioma esquema, es decir, no es una sola sentencia sino un conjunto infinito de sentencias variando $\varnothing$ sobre todas las fórmulas. Cualquier sentencia simple obtenida escogiendo una fórmula particular para $\varnothing$, se dice que es una "instancia" del axioma esquema, y es también llamada "un axioma de abstracción".

El segundo axioma fundamental del sistema de Frege es el axioma de extensión que simplemente dice que dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos miembros, o en otros términos, si y sólo si todo miembro de uno es miembro del otro. Formalmente:

**AXIOMA DE EXTENSION
(FREGE 1893)**

$$\forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in z) \Rightarrow y = z$$

Ahora lo esencial es la cuestión de encontrar o construir los conjuntos. Deseamos que cualquier colección de objetos, sea lo que sea (por ejemplo conjuntos) sea un conjunto. En otras palabras, el principal acto de generación de la teoría de conjuntos es que los objetos son coleccionados para formar un conjunto, el cual es a su vez un objeto que puede ser coleccionado en un nuevo conjunto.

Sin embargo, no toda colección de objetos que satisfaga el axioma de abstracción de Frege es un conjunto, en otras palabras, no toda colección de objetos que pueda ser especificada en un lenguaje formal puede ser coleccionada para formar un "nuevo" conjunto.

El axioma de abstracción no es consistente, es decir, conduce a contradicciones. Una de las primeras y ciertamente la más simple fue descubierta por Bertrand Russell en 1903.

Russell razonó como sigue. Dado un conjunto s y un objeto x, las reglas de la lógica dictan que ó x es un miembro de s ó x no es un miembro de s. En particular, un conjunto s ó es miembro de sí mismo o no es miembro de sí mismo.

Russell consideró el conjunto **R** que consta de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Un conjunto s pertenece a **R** si y sólo si s no es miembro de s. La pregunta es: ¿Es **R** un miembro de sí mismo? Si **R** es un miembro de **R**, entonces por definición de **R**, **R** no es un miembro de **R**. Sin embargo, si **R** no es un miembro de **R**, entonces a su vez, por la definición de **R**, **R** es un miembro de **R**. Por lo tanto **R** es un miembro de **R** si y sólo si **R** no es un miembro de **R**; ¡lo cual es una contradicción!

Formalmente:

**TEOREMA
(paradoja de Russell, Russell 1903).**

$$\neg\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x).$$

Demostración (por reducción al absurdo): Supongamos que y es un conjunto tal que $\forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$, entonces, puesto que se mantiene para todo x se mantiene en particular para y, por lo tanto $y \in y \leftrightarrow y \notin y$, lo cual es una contradicción.

Como consecuencia de la paradoja de Russell, no podemos asegurar que, dada una fórmula $\varnothing$, existe un conjunto y tal que $\forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varnothing(x))$. Sin embargo, por el axioma de extensión podemos garantizar que si existe, es único:

PROPOSICION

Si existe un y tal que $\forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varnothing(x))$ entonces y es único.

Demostración: Supongamos que también existe un y' tal que $\forall x\, (x \in y' \leftrightarrow \varnothing(x))$, entonces $\forall x\, (x \in y' \leftrightarrow x \in y)$, y por el axioma de extensión, y' = y.

La aparición de paradojas como la de Russell, condujo a los matemáticos a una búsqueda de una fundamentación rigurosa de la teoría de conjuntos. Varios sistemas axiomáticos fueron propuestos, los cuales pueden ser clasificados en dos categorías de acuerdo con la forma en que ellos resuelven las dificultades creadas por el axioma de abstracción. La primera es debida a E. Zermelo, A.A. Fraenkel, y T. Skolem y básicamente establece que una propiedad dada determina solamente el conjunto de esos objetos que tienen la propiedad y que también son miembros de algún conjunto del que se sabe que existe. Así que el sistema Zermelo-Frenkel-Skolem simplemente prohibe la formación de colecciones tan grandes como la colección **R** de Russell. Esta aproximación que podríamos llamar de "limitación de tamaño", fue formulada primero por Russell en 1903 en su teoría de Tipos.

De acuerdo con este punto de vista, el axioma de abstracción es básicamente falso, puesto que representa un mero acto "mental" de coleccionar elementos que satisfacen una sentencia. Es decir, desde esta perspectiva, para especificar un conjunto no es suficiente con pronunciar algunas palabras mágicas (las cuales pueden formar una sentencia como "$x \notin x$"); es necesario también tener a la mano un conjunto a cuyos elementos aplicarle las palabras mágicas.

El axioma de abstracción es reemplazado por el siguiente axioma:

AXIOMA DE ESPECIFICACION

A todo conjunto A y a toda condición $\varnothing(x)$ les corresponde un conjunto B cuyos elementos son exactamente los elementos de A que satisfacen $\varnothing(x)$

Para indicar que B es obtenido de A y $\varnothing(x)$ se acostumbra escribir, $B = \{x \in A \,/\, \varnothing(x)\}$. Obviamente la condición $\varnothing(x)$ es una fórmula o sentencia de la lógica.

En esta primera categoría el axioma de Extensión se mantiene, lo que permite establecer que el conjunto B es único.

$$(\bigstar)\ \left\{\begin{array}{l}\text{Sea } B = \{x \in A \,/\, x \notin x\},\\ \text{entonces, para todo y,}\\ y \in B \text{ si y sólo si } (y \in A \wedge y \notin y).\end{array}\right.$$

¿$B \in A$? Si $B \in A$, entonces ó $B \in B$ también ó $B \notin B$. Si $B \in B$ entonces por ($\bigstar$), la asunción de que $B \in A$ produce $B \notin B$ lo cual es una contradicción. Si $B \notin B$ entonces por ($\bigstar$), la asunción de que $B \in A$ produce $B \in B$ lo cual es una contradicción.

En conclusión, es imposible que $B \in A$ lo cual trae como consecuencia la imposibilidad de que se cree una colección como la de Russell. Un ejemplo de teoría axiomática de conjuntos de este estilo se encuentra en HALMOS.[5]

La segunda categoría se debe esencialmente a J. Von Neumann, P. Bernays, y K. Gödel. En esta categoría se sigue creyendo en el axioma de abstracción, pero se introducen algunos cambios. Aquí la noción primitiva corresponde a la idea intuitiva de una colección de objetos, que se denomina clase. Los axiomas especifican el comportamiento de las clases.

Un conjunto es por definición una clase que es miembro de alguna clase. Para una propiedad dada, se garantiza la existencia de una clase cuyos miembros son exactamente esas clases que son realmente conjuntos y que tienen la propiedad. Así la colección de Russell se convierte en una clase que no es un conjunto.

De esta manera es ventajoso ser capaz de hablar acerca de colecciones como si fueran conjuntos aun sabiendo que, como resultado de la paradoja de Russell, no todas son conjuntos. Esta forma uniforme de hablar acerca de conjuntos y colecciones tiene también la siguiente ventaja. A menudo hablamos de colecciones sin saber si son conjuntos o no. Hablar acerca de ellas en la misma forma que hablamos de los conjuntos pone lo que decimos acerca de ellas en una forma que conserva su conveniencia aunque las colecciones puedan resultar ser conjuntos.

La idea de usar clases en la teoría de conjuntos estaba implícita en Cantor (1899) y fue formulada primero por Russell (1906).

Los sistemas actuales son derivaciones del sistema Von Neumann-Bernays-Godel y están basados en los trabajos de Morse, Kelley, Quine. Ejemplos de dichos sistemas axiomáticos se pueden encontrar en Kelley[6], Eisenberg[3], Levy[7]. En general estos sistemas axiomáticos adoptan como lenguaje formal el cálculo de predicados de primer orden al que se le añaden los símbolos "=", "ϵ" y "$\{.../...\}$". Los dos primeros ya los mencionamos, y el tercero que se lee "la clase de todos los... tales que..." es el clasificador. De esta manera una colección general especificable mediante el lenguaje, que puede o no ser un conjunto, será llamada una clase.

Una clase está dada por una fórmula $\varnothing(x)$ como la clase de todos los objetos x para los cuales $\varnothing(x)$ es verdad. Tal clase será denotada por $\{x/\varnothing(x)\}$. Obviamente los conjuntos son clases, de hecho, el conjunto y es la clase $\{x/x \in y\}$. Podemos clasificar las clases en conjuntos y en clases propias (aquellas que no son conjuntos). Estos sistemas utilizan entonces una versión más fuerte del axioma de abstracción de Frege, debida a A.P. Morse y W.V.O. Quine:

AXIOMA ESQUEMA DE ABSTRACCION (MORSE-QUINE):

Un objeto matemático "a" pertenece a la clase $\{x/\varnothing(x)\}$ si y sólo si la proposición $\varnothing(a)$ es verdadera y, además, "a" es un conjunto.

Este axioma caracteriza la pertenencia, no la define. Este axioma implica que los únicos objetos matemáticos que pueden ser elementos de una clase son los conjuntos.

Un axioma de extensión similar al de Frege se anuncia para clases.

Es interesante observar que la existencia de conjuntos no es demostrable sobre la base de los axiomas de abstracción y extensión, pero sin embargo se resuelve la paradoja de Russell:

Definición: La clase de Russell, denotada por $\mathbf{R}$, se define como $\{x/x \notin x\}$. Así que de acuerdo con el axioma de abstracción, $x \in \mathbf{R} \leftrightarrow x$ es un conjunto $\wedge\ x \notin x$.

La consecuencia inmediata es:

TEOREMA

La clase de Russell $\mathbf{R}$ no es un conjunto.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{R}$ es un conjunto. Obviamente $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ ó $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$. Si $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$, entonces $\mathbf{R}$ es un conjunto y $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$, así que $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ por definición de $\mathbf{R}$. Si $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$, entonces puesto que ningún elemento de $\mathbf{R}$ pertenece a sí mismo, $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$.

Así que $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ si y sólo si $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mathbf{R}$ no es un conjunto.

Obsérvese que si el axioma de abstracción no contuviera la calificación "es un conjunto", resultaría una contradicción inmediata: $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ si $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ consecuencia importante del teorema anterior es que la clase de todos los conjuntos, denotada por U (se le llama universo) y definida como $\{x/x = x\}$ no es un conjunto, es una clase propia. En las tres referencias anteriores se puede encontrar la demostración de que $U = \mathbf{R}$.

Por lo tanto el "universo" no es un objeto, es simplemente un "universo del discurso", es decir, una colección de todos los objetos que intervienen en una discusión particular.

2. CLASES Y METACLASES EN SMALLTALK- 80

El concepto de clase inventado por Simula y re-implantado por Smalltalk- 80 es usado para expresar el comportamiento de un conjunto de objetos los que comparten las mismas operaciones semánticas sobre los mismos atributos.

Una clase contiene la descripción de sus objetos, describiendo su estructura (a través de las instancias) y su comportamiento (a través de los métodos pertenecientes a las instancias). Los objetos son instancias de las clases.

La clase "Object" es la raíz de todas las clases y por lo tanto todo objeto es una instancia de Objetc y toda clase es una subclase de Object. Las clases se comportan como objetos, éstas tienen estados y uno les envía mensajes, los que son implantados a través de métodos asociados con la clase. Por lo tanto cada clase en smalltalk es una instancia de otra clase asociada con ella, la metaclase de la clase. Cada clase es la única instancia de su metaclase y la jerarquía de metaclases es paralela a la jerarquía de clases.

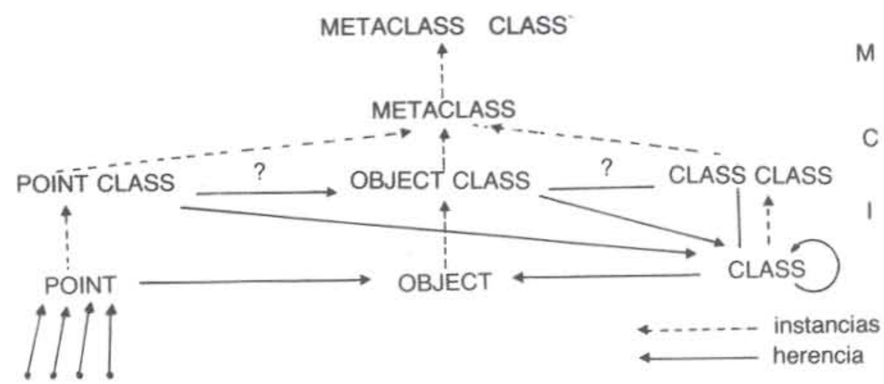
El tema está completamente desarrollado en Goldberg y Robson,[4] nosotros presentaremos a continuación un resumen basado en Cointe.[1]

Resumen:

1. Todo objeto es una instancia de "Object" y toda clase es una subclase de Object. La metaclase de Object es "Object Class". Object Class es una subclase de "Class", la clase de todas las clases, sin embargo Object Class no tiene una metaclase.
2. Además de las dos clases genéricas Object y Class, existe la clase "Point" que es la clase de todos los puntos u objetos atómicos.

   "Class Class" y "Point Class" son las respectivas metaclases de Class y Point.
3. Toda metaclase es una subclase de Class. La metaclase Class Class es una subclase de Object Class, es ella misma una subclase de Class y por lo tanto es transitivamente una subclase de sí misma.
4. Todas las metaclases son instancias de "Metaclass". La metaclase de Metaclass es "Metaclass Class", la cual es una subclase de Class.

Esperamos que la siguiente figura sirva para aclarar lo anterior.



La propuesta de Smalltalk-80 presenta varios inconvenientes, entre los que se puede destacar la enorme confusión que genera su manejo de clases y metaclases, especialmente para los usuarios. También hay que mencionar las limitaciones impuestas por el hecho de que se cree una metaclase para cada clase y que la metaclase no pueda existir sin su respectiva clase. Otro hecho a destacar es que el usuario sólo tiene acceso al nivel de clases y que es el implementador el que controla el nivel de metaclases.

OTROS SISTEMAS

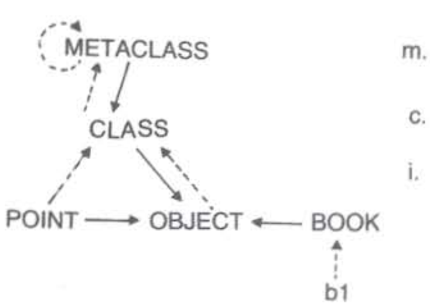
Sin lugar a dudas, Smalltalk-80 es una referencia básica dentro del paradigma orientado a objetos, y no es de extrañar entonces que muchos sistemas orientados a objetos sean similares a él. Tal es el caso por ejemplo de "Loops" que introduce tres niveles correspondientes a tres tipos de objetos: instancias, clases y metaclases:

METACLASS: Es la clase que describe el comportamiento para las metaclases como si fueran objetos. Es la metaclase de todas las otras metaclases (¡más de una instancia!) y su propia metaclase.

CLASS: Es la clase que describe el comportamiento para las clases consideradas como objetos. Es la metaclase de todas las clases.

OBJECT: Es la clase que describe el comportamiento para todas las instancias. Es la raíz de todas las clases.

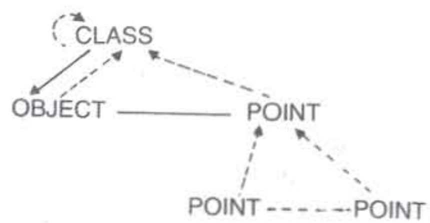
La siguiente figura resume la filosofía de Loops:

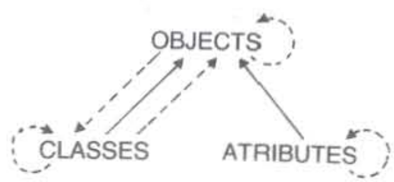


La propuesta de Loops, aunque similar a la de Smalltalk-80, es menos confusa, pero presenta algunos inconvenientes que ilustraremos a continuación con otros sistemas.

Los sistemas a los que nos referimos anteriormente son ObjVlisp[1] y FIS[2]. En ambos sistemas el grafo de instancias y herencia se simplifica al desaparecer las metaclases, y quedar solamente dos clases genéricas: Class y Object. Aparte de estas dos clases fundamentales, ambos sistemas mencionan una clase más específica, pero importante. En el caso de ObjVlisp esa clase es "Point" y en el caso de FIS es "Atributes".

Los grafos asociados a ambas propuestas son respectivamente:





En ambos sistemas tenemos dos clases fundamentales: Object(S) que es la clase de todos los objetos que están presentes en el sistema en un momento dado, y que es la cima de la jerarquía de generalización. Y Class(ES) que es la clase que contiene todas las clases en el modelo, y es una subclase de Object(S).

El principio de uniformidad presente en estos dos sistemas (y en muchos otros), que considera a todas las clases como objetos, tiene el inconveniente de generar una recursividad a dos niveles: en primer lugar las clases Object(S) y Class(ES) se contienen a sí mismas, y en segundo lugar se contienen mutuamente.

Una consecuencia inmediata es la aparición de la paradoja de Russell. Consideremos la clase de Russell definida en términos de clases, es decir, $\mathbb{R}$ es la clase formada por todas aquellas clases que no se contienen a sí mismas, obviamente llegaremos a la misma inconsistencia anterior de que $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}$.

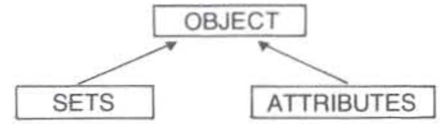
Ahora, dado que Class es la clase de todas las clases, entonces $\mathbb{R}$ es una subclase de Class; con lo cual tenemos un objeto inconsistente en el sistema, es más, introduciendo los axiomas apropiados se puede llegar a demostrar que $\mathbb{R} = \text{Class}$.

Una posible solución consistiría en adoptar un sistema axiomático como los referidos anteriormente. Podríamos por ejemplo distinguir entre clases propias y conjuntos, es decir, partir de la noción de clase adoptada por estos sistemas y considerar que las clases que son instancias de otras clases se llamen conjuntos.

Análogamente podemos asumir que las clases que no son conjuntos (clases propias) no son objetos del sistema. De esta manera resulta que Class, la clase de todas las clases, es realmente la clase de todos los conjuntos y por lo tanto la podríamos llamar Sets, y ella misma es una clase que no es un conjunto. Por lo tanto no es un objeto.

En cuanto a Object, ésta también sería una clase propia, y por lo tanto no sería ni un conjunto ni un objeto.

De esta manera rompemos la circularidad, ya que ni Object ni Sets se contienen a sí mismas, ni entre ellas:



Las que deberían analizarse son las posibles implicaciones de cara a una implantación práctica, que tendría el hecho de considerar que las clases Object y Sets no sean ellas mismas objetos del sistema, aunque contienen los objetos del sistema.

REFERENCIAS

1. Cointe, P., *Metaclasses are First Class: The ObjVlisp Model*, OOPSLA' 87 Proceedings, p.p. 156-165, Octubre 1987.
2. Costilla, C.R., y otros: *A knowledge-model kernel for Communicating Distributed Objet-Oriented-Information Systems*. Publicación interna, Universidad Politécnica de Madrid, 1989.
3. Eisemberg, M., *Axiomatic Theory of Sets and Classes*, Massachusetts University, 1970.
4. Goldberg, A., Robson, D., *Smalltalk-80 - The Language and its Implementation*, Addison-Wesley, Reading MA, USA, 1983.
5. Halmos, P.R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1960.
6. Kelley, J.L., *Topología General*, Eudeba, Buenos Aires, 1975.
7. Levy, A., *Basic Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1979.